СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ
Январь – март 1994. Том 1, № 1, 43–62

УДК 519.1

ЛОКАЛЬНЫЕ ДОПОЛНЕНИЯ ПРОСТЫХ И ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

Д. Г. Фон-Дер-Флаасс

Операция локального дополнения графов была введена А. Буше при изучении эйлеровых циклов в 4-регулярных графах и графов пересечений хорд. В настоящей статье приведен обзор результатов о локальных дополнениях графов. Обобщены понятия локального дополнения и локальной эквивалентности на случай ориентированных графов. Доказаны аналоги результатов, полученных ранее для простых графов. Подтверждена гипотеза А. Буше о простых графах, которые изоморфны всем своим локальным эквивалентам.

Понятия локального дополнения и локальной эквивалентности графов возникли при изучении преобразований эйлеровых циклов в связных 4-регулярных графах. Эйлеров цикл в таком графе однозначно определяется заданием пар транзитов через все вершины графа. *Транзит через вершину* — это некоторая пара ребер, инцидентных этой вершине. *k-Трансформацией эйлерова цикла* (или *набора транзитов*) называется замена пары транзитов через некоторую вершину v другой парой так, что полученный набор транзитов снова задает эйлеров цикл. Результат k-трансформации в каждой вершине определен однозначно.

А. Коциг доказал [1], что любой эйлеров цикл можно перевести в любой другой последовательностью k-трансформаций.

Эйлеров цикл в 4-регулярном графе $G(V, E)$ можно задать циклическим словом длины $2|V|$ над алфавитом V, в котором каждая буква встречается дважды: нужно прочитать, в какой последовательности цикл проходит вершины. На этом языке k-трансформации в вершине v соответствует переворачивание любой из двух частей, на которые слово разбивается двумя вхождениями буквы v.

Можно говорить о k-трансформациях и на языке графов пересечений хорд. Именно, циклическое слово, о котором говорилось выше, определяет граф пересечений хорд на множестве вершин V: вершина a смежна с вершиной b тогда и только тогда, когда вхождения букв a и b в слово чередуются. k-Трансформация в v на этом языке описывается

естественно: она состоит в замене графа, индуцированного на множестве вершин, смежных с v, на его дополнение. Описанная операция — назовем ее *локальным дополнением* — осмысленна и для произвольных графов, не обязательно являющихся графами пересечений хорд.

До сих пор количество статей по локальным дополнениям невелико. Здесь в первую очередь следует указать работы А. Буше [2–6]. В данной статье приводится обзор результатов, полученных А. Буше и автором, а также доказательства некоторых новых результатов. Изложение дается с новой точки зрения: на основе обобщения локального дополнения на случай ориентированных графов. При этом удается доказать многие уже известные результаты более просто и унифицированно.

В § 1 мы даем вспомогательные сведения. В § 2 мы обобщаем понятия локального дополнения и локальной эквивалентности на случай орграфов без петель и кратных дуг. Полученные результаты используются в § 3 при рассмотрении локальных дополнений простых графов.

§ 1. Обозначения и определения

В данной работе рассматриваются конечные орграфы без петель и кратных дуг. Часто будем отождествлять граф $G(V, E)$ (V — множество вершин, E — множество дуг) с его матрицей смежности $(g_{ij})_{i,j \in V}$ над полем $\mathrm{GF}(2)$ ($g_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $(i, j) \in E$) и писать $G = (g_{ij})$. *Неориентированный* или *простой граф* в этих терминах есть граф, матрица смежности которого симметрична.

Будем использовать следующие обозначения:

$$n_X^+(v) = \{x \in X \mid (v, x) \in E\}, \qquad n_X^-(v) = \{x \in X \mid (x, v) \in E\},$$

где $v \in V$, $X \subseteq V$. Если $X = V$ — множество всех вершин графа и из контекста ясно, о каком графе идет речь, будем писать кратко $n^+(v)$ и $n^-(v)$. Если граф G простой, то $n_X^+(v) = n_X^-(v)$. В этом случае используем обозначения $n_X(v)$ и $n(v)$. В случае простого графа обозначаем через $n^{(i)}(v)$ множество вершин, находящихся на расстоянии i от v.

Сначала введем основные понятия локального дополнения и локальной эквивалентности для простых графов. В § 2 они будут обобщены на случай орграфов.

Определение 1.1. *Операцией локального дополнения простого графа* $G = (V, E)$ *в его вершине* v называется замена индуцированного на окрестности v подграфа его дополнением. Полученный граф обозначается через $G * v$, а результат применения к графу G последовательности локальных дополнений в вершинах $v_1, \dots, v_s$ — через $G * v_1 \dots v_s$.

Два графа G и H (на одном и том же множестве вершин) называются *локально эквивалентными* ($G \sim H$), если один из них может быть получен из другого последовательностью локальных дополнений.

Длина кратчайшей такой последовательности называется *расстоянием между G и H* и обозначается через $d(G, H)$.

Локальным дополнением графа G в его ребре $e = (u, v)$ назовем граф $G * vuv$. Будем обозначать его через $G * e$. Легко проверить, что $G * vuv = G * uvu$, т. е. данное определение корректно.

Отметим, что трудно указать какие-либо характеристики графа, сохраняющиеся при локальных дополнениях, кроме очевидных (например, числа вершин или числа связных компонент). В следующих двух определениях мы введем нетривиальные характеристики графа, сохраняющиеся при локальных дополнениях. (Здесь и далее мы часто представляем подмножества множества вершин V как элементы векторного пространства на $\mathrm{GF}(2)$ с симметрической разностью множеств в качестве операции сложения.)

Определение 1.2. *Функцией связности орграфа $G(V, E)$* называется функция $\mathrm{conn}\colon \mathcal{P}(V) \to \mathbb{N}$, сопоставляющая каждому подмножеству множества вершин ранг множества векторов $\{n^{+}_{V\setminus U}(u) \mid u \in U\}$ или (другими словами) ранг минора матрицы смежности графа G, образованного строками, соответствующими вершинам из U, и столбцами, соответствующими вершинам из $V\setminus U$.

Определение 1.3. *Нечетной окрестностью множества вершин $X \subseteq V$ в графе $G(V, E)$* называется множество $\Delta(X) = \sum_{x\in X} n^{+}_{G}(x)$ всех вершин, в которые из X идет нечетное число дуг. Через $D_{\cup}(G)$ и $D_{\cap}(G)$ обозначим семейства подмножеств вида $X \cup \Delta(X)$ и $X \cap \Delta(X)$ соответственно для всех $X \subseteq V$ (с учетом кратностей).

Для простых графов инвариантность функции связности для локальных дополнений доказана в [3]. Инвариантность семейства $D_{\cup}(G)$ установлена автором (см. [7]), а инвариантность $D_{\cap}(G)$ — А. Буше. Ниже (теорема 3.7) мы покажем, что из указанных трех инвариантов первые два остаются инвариантами в ориентированном случае.

§ 2. Локальные дополнения ориентированных графов

Пусть $\Omega = \{1, \dots, n\}$, и пусть $G = (\Omega, E)$ — орграф без петель и кратных дуг с множеством вершин Ω и множеством дуг E. Граф G отождествляем с его матрицей смежности (g_{ij}) над полем $\mathrm{GF}(2)$: $g_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $(i, j) \in E$, и в этом случае пишем $G = (g_{ij})$.

Определение 2.1. *Локальным дополнением графа $G = (g_{ij})$ в вершине v* называется граф $G' = (g'_{ij})$, матрица смежности которого задается следующей формулой:

$$g'_{ij} = \begin{cases} g_{ij} + g_{iv}g_{vj} & \text{при } i \neq j, \\ 0 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Понятия локальной эквивалентности и расстояния, а также соответствующие обозначения вводятся так же, как в случае неориентированного графа.

Если G — неориентированный граф (т. е. его матрица смежности симметрична), то определение 2.1 совпадает с определением 1.1.

Определение 2.2. Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем GF(2). Назовем *2-системой над V* набор $\mathcal{V} = (V_1, \dots, V_n)$ подпространств V, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $\dim V_i \leqslant 2$,

(2) для любого множества $X \subset \Omega$ индексов выполняется неравенство $\dim \langle V_i \mid i \in X \rangle \geqslant |X|$.

По известной теореме Холла условие (2) эквивалентно следующему условию:

(2′) существует базис $(x_1, \dots, x_n)$ пространства V такой, что $x_i \in V_i$ при $i = 1, \dots, n$. (Любой такой базис будем называть *базой 2-системы $\mathcal{V}$*.)

Определение 2.3. *Локальной заменой базы $B = (b_1, \dots, b_n)$ в V_i* называется база $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$ 2-системы $\mathcal{V} = (V_1, \dots, V_n)$, если $b_j = b'_j$ при $j \neq i$ и $b_i \neq b'_i$.

Так же, как в определениях 1.1 и 2.1, используем обозначение $B' = B * i$. Если $\dim V_i = 1$, то полагаем $B * i = B$.

Определение 2.4. Пусть заданы орграф $G = (g_{ij})$ и некоторый базис $B = (b_1, \dots, b_n)$ n-мерного векторного пространства V над полем GF(2). Определим *2-систему $\mathcal{V}(G, B) = (V_1, \dots, V_n)$ над V* следующим образом:

$$V_i = \langle b_i, g_{i1} b_1 + \ldots + g_{in} b_n \rangle$$

при всех $i = 1, \dots, n$. При этом B будет базой $\mathcal{V}(G, B)$.

Следующая теорема показывает, что понятия локального дополнения для орграфов и локальной замены для 2-систем эквивалентны.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{V} = (V_1, \dots, V_n)$ — 2-система над V и $B = (b_1, \dots, b_n)$ — некоторая ее база.*

(а) *Существует единственный орграф $G = (g_{ij})$, для которого выполняется равенство $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G, B)$. (Обозначаем такой граф как $G(\mathcal{V}, B)$.)*

(б) *Для каждого $k \in \Omega$ база $B' = B * k$ однозначно определена.*

(в) *Если $B' = B * k$, то $G(\mathcal{V}, B') = G(\mathcal{V}, B) * k$.*

Доказательство. (а) Для каждого индекса i определим $(n-1)$-мерное подпространство $V'_i = \langle b_j \mid j \neq i \rangle$ и вектор $c_i \in V_i \cap V'_i$ следующим образом:

$c_i = 0$, если $\dim V_i = 1$,

c_i — единственный ненулевой вектор в $V_i \cap V_i'$, если $\dim V_i = 2$.

В последнем случае имеем $\dim V_i \cap V_i' = 1$. Поэтому вектор c_i действительно определяется однозначно.

Поскольку $V_i = \langle b_i, c_i \rangle$ и векторы $b_1, \ldots, b_n$ образуют базис, матрица (орграф) $G = (g_{ij})$ такая, что $G(b_1, \ldots, b_n)^T = (c_1, \ldots, c_n)^T$, однозначно определена и удовлетворяет условию $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G, B)$. Кроме того, ввиду выбора элементов c_i она имеет нулевую главную диагональ.

Если H — некоторый орграф, удовлетворяющий приведенным условиям и $H(b_1, \ldots, b_n)^T = (x_1, \ldots, x_n)^T$, то легко видеть, что при всяком i имеем $x_i \in V$ и $x_i = 0$, если и только если $\dim V_i = 1$. Таким образом, $x_i = c_i$ и $H = G$. Утверждение (а) доказано.

(б) Достаточно заметить, что вектор b_k' должен лежать в $V_k \backslash V_k' = \{b_k, b_k + c_k\}$.

(в) Пусть теперь $B' = B * k$. Тогда $b_i' = b_i$ при $i \neq k$ и $b_k' = b_k + c_k = b_k + g_{k1}b_1 + \ldots + g_{kn}b_n$. Разложим c_i по базису B':

$$\begin{aligned} c_i = g_{i1}b_1 + \ldots + g_{in}b_n &= g_{i1}b_1 + \ldots + g_{ik}(b_k + c_k) + \ldots + g_{in}b_n + g_{ik}c_k \\ &= (g_{i1} + g_{ik}g_{k1})b_1' + \ldots + (g_{in} + g_{ik}g_{kn})b_n'. \end{aligned}$$

Здесь использовано равенство $g_{kk} = 0$.

Таким образом, элементы матрицы $\mathrm{GF}(\mathcal{V}, B')$ с точностью до нулей на главной диагонали таковы, как требуется в определении 2.1. Утверждение (в) доказано.

Теорема 2.1 доказана.

Из теоремы 2.1 вытекает, в частности, что для любой 2-системы $\mathcal{V}$ множество орграфов $G(\mathcal{V}, B)$ состоит из нескольких классов локальной эквивалентности. Следующая теорема показывает, что ситуация в действительности еще лучше.

Теорема 2.2. *Все базы 2-системы локально эквивалентны. Любая база n-мерной 2-системы может быть преобразована в любую другую базу той же системы последовательностью не более чем $2n-1$ локальных замен. Ровно $2n-1$ замен требуются только для баз $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ и $B' = (v_2, v_3, \ldots, v_n, v_1)$ 2-системы*

$$\mathcal{V} = (\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \ldots, \langle lv_n, v_1 \rangle).$$

Доказательство. Для любых двух баз $B = (b_1, \ldots, b_n)$ и $B' = (b_1', \ldots, b_n')$ 2-системы $\mathcal{V} = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$ определим множество индексов $D(B, B') = \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant n, b_i \neq b_i'\}$. Пусть $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ — две различные базы 2-системы $\mathcal{V}$ и $D = D(X, Y)$. Покажем, что найдутся непустое подмножество $C \subseteq D$, $|C| = k$, и последовательность его элементов $c_1, \ldots, c_{2k-1}$ такие, что для баз X и $Y' = Y * c_1 \ldots c_{2k-1}$ выполняется равенство $D(X, Y') = D \backslash C$, из которого сразу следует первое утверждение теоремы. Без ограничения

общности предположим, что $D = \{1, \ldots, d\}$. Разложим векторы базы X по базису Y:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$A = \begin{bmatrix} A' & * \\ \mathbf{0} & I_{n-d} \end{bmatrix}$$

и $a_{ij} = \delta_{ij}$ при $i > d$. Здесь через I_{n-d} обозначена единичная матрица порядка $n - d$. Матрица A над полем GF(2) и ее $(d \times d)$-подматрица A' не вырождены.

На множестве вершин $\{1, \ldots, d\}$ рассмотрим орграф (возможно, с петлями), матрицей смежности которого является A'. Так как матрица A' не вырождена, этот граф содержит ориентированные замкнутые маршруты. Пусть

$$1 \to 2 \to \ldots \to k \to 1 \text{ — кратчайший замкнутый маршрут в } A'.$$

Тогда

$$x_1 = y_2 + y_2', \ldots, x_{k-1} = y_k + y_k', \quad x_k = y_1 + y_1',$$

где каждый вектор y_i' есть линейная комбинация векторов $y_{k+1}, \ldots, y_n$.

Теперь легко видеть, что последовательность локальных замен в $2, \ldots, k$ переводит

$$\text{базу } Y \text{ в базу } Y'' = (y_1, y_2 + x_2, \ldots, y_k + x_k, y_{k+1}, \ldots, y_n),$$

а затем последовательность $1, \ldots, k$ переводит

$$\text{базу } Y'' \text{ в базу } Y' = (x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_n).$$

Итак, первое утверждение теоремы доказано — мы можем перевести любую базу в любую другую за несколько шагов указанного вида, уменьшая с каждым шагом число различий между базами. Очевидно также, что если мы проделаем более одного шага, то общее число локальных замен будет меньше $2n - 1$. Единственная ситуация, в которой нам потребуется ровно $2n - 1$ локальных замен, возникает, если построенный выше вспомогательный орграф есть ориентированный n-цикл. Нетрудно также убедиться, что в этой ситуации мы никак не сможем обойтись меньшим числом локальных замен. Теорема 2.2 доказана.

Следствие 2.1. *Если матрица $G(\mathcal{V}, B)$ симметрична для некоторой базы B 2-системы $\mathcal{V}$, то она симметрична для любой базы $\mathcal{V}$.*

Неизвестно, имеется ли прямое доказательство следствия 2.1.

Пусть G и H — два орграфа на одном и том же множестве вершин. Из теоремы 2.2 следует, что они локально эквивалентны тогда и только тогда, когда найдутся 2-система $\mathcal{V}$ и две ее базы B и B' такие, что $G = G(\mathcal{V}, B)$ и $H = G(\mathcal{V}, B')$. Это соображение позволяет получить следующий алгебраический критерий локальной эквивалентности для орграфов.

Теорема 2.3. *Орграфы $G = (g_{ij})$ и $H = (h_{ij})$ на множестве вершин Ω локально эквивалентны тогда и только тогда, когда в поле $GF(2)$ разрешима следующая система из n^2 уравнений с $3n$ неизвестными a_i, b_i, e_i $(i \in \Omega)$:*

$$\begin{aligned} &a_i b_i + e_i \sum_{k=1}^{n} e_k g_{ik} h_{ki} = 1 \quad \text{при } i \in \Omega, \\ &a_i h_{ij} + b_j g_{ij} + \sum_{k=1}^{n} e_k g_{ik} h_{ki} = 0 \quad \text{при } i \neq j,\ i, j \in \Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Доказательство. Пусть V — стандартное n-мерное векторное пространство строк над GF(2), $B = (x_1, \ldots, v_n)$ — его стандартный базис (т. е. $v_i = (0\ldots010\ldots0)$; i-я координата — единица). Определим 2-систему $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G, B) = (V_1, \ldots, V_n)$. Имеем $V_i = \langle v_i, g_i \rangle$, где g_i — i-я строка матрицы G.

Пусть $B' = (x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая другая база системы $\mathcal{V}$ и X — матрица перехода от B к B'. Поскольку каждый вектор x_i принадлежит V_i, его можно записать в виде $e_i g_i + a_i v_i$ для некоторых $e_i, a_i \in \mathrm{GF}(2)$. Положим $I_E = \mathrm{diag}(e_1, \ldots, e_n)$, $I_A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Тогда $X = I_E G + I_A$.

Предположим, что $H = G(\mathcal{V}, B')$. Это условие можно переформулировать следующим образом:

($*$) *для любого i каждая из вектор-строк v_i, h_i, $v_i + h_i$ представляет собой координаты некоторого элемента из V_i в базисе (x_i).*

Рассмотрим матрицу перехода от B' к B:

$$Y = X^{-1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Как и ранее, каждую строку y_i можно представить в виде $e'_i h_i + b_i v_i$ для некоторых $e'_i, b_i \in \mathrm{GF}(2)$. Пусть

$$I_{B'} = \mathrm{diag}(e'_1, \ldots, e'_n), \qquad I_B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n).$$

Тогда $Y = I_{E'}H + I_B$. Если $e_i = 0$ при некотором i, то $x_i = v_i$, и мы можем положить $e'_i = 0$, и наоборот. Поэтому можно считать, что при всех i выполняется равенство $e'_i = e_i$. Итак, мы имеем $3n$ элементов e_i, a_i и b_i поля GF(2), для которых выполняется матричное равенство

(**) $(I_E G + I_A)(I_E H + I_B) = 1$.

Условие (*) можно переписать эквивалентным образом так:

(*′) *для любого i каждая из вектор-строк v_i, h_i, $v_i + h_i$ совпадает с одной из строк v_iY, g_iY, $(v_i + g_i)Y$.*

Для i таких, что $e_i = 1$, условие (*′) следует из (**); в этом случае

$v_iY = h_i$ или $v_iY = v_i + h_i$ (в зависимости от значения b_i),

$v_i = g_iY$ или $v_i = (v_i + g_i)Y$ (в зависимости от значения a_i).

Для i таких, что $e_i = 0$, имеем $a_i = b_i = 1$ и $v_iY = v_i$. Поэтому для выполнения условия (*′) необходимо и достаточно, чтобы все (кроме, возможно, i-й) координаты строк g_iY и h_i совпадали.

Итак, если $e_i = 0$, то при каждом j $(j \neq i)$ выполняется равенство

$$\sum_{k \in \Omega} g_{ik}(e_k h_{kj} + b_k v_{kj}) = h_{ij}.$$

Поскольку $a_i = 1$ и $v_{kj} = 0$ при $k \neq j$, это равенство можно переписать в виде

$$a_i h_{ij} + b_j g_{ij} + \sum_k e_k g_{ik} h_{kj} = 0.$$

Для пар i, j $(i \neq j)$, для которых $e_i = 1$, такое же равенство доказывается простым вычислением (i, j)-го элемента матрицы в (**).

Вычисление (i, i)-го элемента в (**) приводит к равенству

$$a_i b_i + e_i \sum_k e_k g_{ik} h_{ki} = 1.$$

Тем самым достаточность условий теоремы доказана.

Те же рассуждения, проведенные в обратном порядке, показывают, что если a_i, b_i, e_i образуют решение системы, то векторы $x_i = e_i g_i + a_i v_i$ образуют базу 2-системы $\mathcal{V}$ и $G(\mathcal{V}, (x_i)) = H$. Теорема 2.3 доказана.

При изучении локальных дополнений простых графов оказалось полезным введенное в [7] понятие помеченного графа. Его применения мы продемонстрируем в § 3. Здесь мы дадим обобщение этого понятия на случай орграфов и покажем его связь с 2-системами и теоремой 2.3.

Определение 2.5. *Помеченным графом* называется пара (G, μ), состоящая из графа $G(V, E) = (g_{ij})$ и помечающей функции $\mu \colon V \to \{0, 1, 2\}$. Мы пишем (G, i), если $\mu(v) = i$ при всех $v \in V$. Введем также обозначение $V_i(\mu) = \{v \in V \mid \mu(v) = i\}$. При локальном дополнении

помеченного графа (G, μ) в вершине v его рёбра изменяются как у непомеченного графа. Метки вершин изменяются так:

$$0 \to 1,\ 1 \to 0,\ 2 \to 2 \text{ у вершины } v;$$

$$0 \to 0, 1 \to 2, 2 \to 1 \text{ у вершины } w, \text{ если } g_{vw} = g_{wv} = 1;$$

у остальных вершин метки не изменяются.

Для мотивации этого определения рассмотрим произвольную 2-систему $\mathcal{V} = (V_1, \dots, V_n)$ и две ее базы $B = (b_1, \dots, b_n)$ и $b' = (b'_1, \dots, b'_n)$. Определим функцию $\mu_{B,B'}$ отклонения B' от B:

$$\mu_{B,B'}(i) = \begin{cases} 0, \text{ если } b'_i = b_i, \\ 1, \text{ если } b'_i \notin V'_i \text{ и } b'_i \neq b_i, \\ 2, \text{ если } b'_i \in B'_i, \end{cases}$$

где $V'_i = \langle b_j \mid j \neq i \rangle$. Нетрудно проверить, что при локальной замене базы B в V_i новая функция $\mu_{B*i,B'}$ получается из старой в соответствии с определением 2.5, если в качестве графа G взять граф $G(\mathcal{V}, B)$.

Таким образом, пусть имеются два локально эквивалентных помеченных орграфа $(G, 0)$ (все метки равны нулю) и (H, μ). Тогда любая последовательность локальных дополнений графа (H, μ), при которой все метки заменяются нулевыми метками, переводит его в $(G, 0)$. Как найти такую последовательность по графу (H, μ), подсказывает доказательство теоремы 2.2.

Замена всех меток нулевыми метками может быть осуществлена за несколько шагов следующего вида.

— Если есть вершина с меткой 1, то проводим локальное дополнение в этой вершине (в любой, если их несколько); метка этой вершины заменяется нулевой меткой.

— Если вершины с меткой 1 нет, то найдется индуцированный орцикл $x_1, \dots, x_k$, все вершины которого имеют метку 2 (в случае простого графа это будет ребро). Проводим последовательность локальных дополнений в $x_1, \dots, x_k$, $x_1, \dots, x_{k-1}$, что обратит в нуль метки всех вершин цикла.

После каждого шага количество нулевых меток возрастает. Когда H — простой граф, на каждом шаге либо проводится одно локальное дополнение и исчезает одна ненулевая метка, либо за три локальных дополнения исчезают две ненулевые метки. Поэтому расстояние между двумя локально эквивалентными простыми графами на n вершинах не может превосходить $3n/2$. В следующем параграфе будет дано уточнение этой оценки. Мы укажем также связь между помеченными графами и теоремой 2.3.

Пусть графы G и H локально эквивалентны и (a_i, b_i, e_i) — какое-либо решение системы (1). Тогда мы можем определить помечающие

функции μ и ν такие, что $(G,0) \sim (H,\mu)$ и $(G,\nu) \sim (H,0)$. Действительно, если B и B' — базы некоторой 2-системы $\mathcal{V}$ такие, что $G = G(\mathcal{V}, B)$ и $H = G(\mathcal{V}, B')$, то $\mu = \mu(B', B)$ и $\nu = \mu(B, B')$ суть требуемые функции. Зная решение системы, их можно найти по формуле

$$\mu_{B,B'}(i) = \begin{cases} 0, \text{ если } e_i = 1,\, a_i = 0, \\ 1, \text{ если } e_i = 1,\, a_i = 1, \\ 2, \text{ если } e_i = 0,\, a_i = 1, \end{cases} \tag{2}$$

и аналогичной формуле, в которой вместо a_i стоит b_i, для $\mu(B', B)$.

§ 3. Локальные дополнения простых графов

Покажем, как введенные в § 2 понятия используются в теории локальных дополнений простых графов. Все графы в этом параграфе считаются неориентированными, если явно не оговорено противное.

А. Буше сформулировал в [3] несколько вопросов и предположений о локальных дополнениях графов. Эти вопросы оказались полезными для развития теории. В процессе работы над ними была найдены мощные методы изучения локальных дополнений. Приведем список этих гипотез.

Гипотеза 1. *Локально эквивалентные деревья изоморфны.*

Гипотеза 2. *Графы, локально эквивалентные циклу длины не менее пяти, гамильтоновы.*

Гипотеза 3. *Расстояние между двумя связными локально эквивалентными графами на n вершинах не превосходит $n + 1$.*

Гипотеза 4. *Локально эквивалентные двудольные графы можно перевести друг в друга цепочкой локальных дополнений в ребрах.*

Гипотеза 5. *Граф является графом пересечений хорд тогда и только тогда, когда ни один локально эквивалентный ему граф не имеет индуцированных подграфов, изоморфных графам, изображенным на рис.* 1.

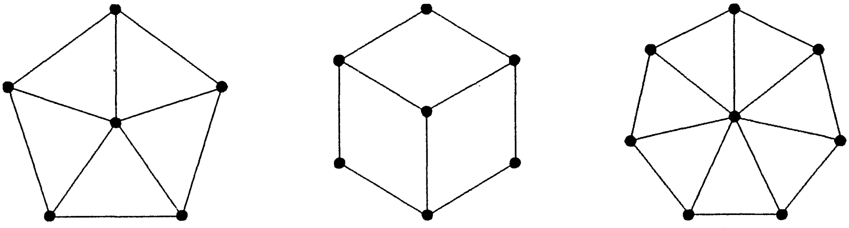


Рис. 1. Запрещенные миноры для графов хорд

Гипотеза 6. *Графы с одинаковой функцией связности локально эквивалентны.*

Гипотеза 7. *Если граф локально эквивалентен своему дополнению, то он самодополнительный.*

Гипотеза 8. *Число существенно различных способов перевода связного графа в локально эквивалентный цепочкой локальных дополнений равно 2^n или $2^n + 2$ для некоторого $n \geqslant 0$.*

Гипотеза 9. *Если связный граф изоморфен всем графам, локально эквивалентным ему, то он имеет не более двух вершин.*

К настоящему времени все эти вопросы решены. Утверждения гипотез 1 и 2 доказаны в [7] (первое утверждение независимо доказано в [5]). Гипотеза 3 опровергнута, а гипотеза 4 подтверждена в [8]. Гипотеза 5 подтверждена А. Буше в [2], а гипотеза 8 — им же в [6].

Ниже мы приведем контрпримеры к гипотезам 6 и 7, установим справедливость гипотезы 9 и докажем уточнения к гипотезам 7 и 8.

Сначала рассмотрим аналоги теоремы 2.3 и определения 2.5 в случае неориентированных графов. Понятие помеченного графа в случае неориентированных графов впервые введено в работе [7]. Оно возникло в связи с одним инвариантом графов — частным случаем инварианта $D_{\cup}(G)$.

Определение 3.1. Вершины u и v графа G называются *подобными*, если $\{u, v\} \in D_{\cup}(G)$.

Легко показать, что подобие является отношением эквивалентности, и класс эквивалентности, содержащий более одной вершины, может быть лишь одним из следующих типов:

тип 0 — вершина (*центр класса*) и смежные с ней висячие вершины,

тип 1 — полный граф,

тип 2 — независимое множество.

Все вершины класса C типа 1 или 2 соединены с одним и тем же множеством вершин вне C. При локальном дополнении в (не висячей) вершине v типы классов изменяются следующим образом (ср. определение 2.5):

$$\text{класс, содержащий } v\colon\ 0 \to 1,\ 1 \to 0,\ 2 \to 2;$$
$$\text{класс, смежный с } v\colon\ 0 \to 0,\ 1 \to 2,\ 2 \to 1;$$
$$\text{у остальных классов типы не меняются.}$$

В следующей теореме, доказанной в [7], перечислены основные свойства локальных дополнений помеченных графов. Отметим, что обычно этих свойств оказывается достаточно.

Теорема 3.1. *Пусть графы G, H и помечающая функция μ таковы, что $(G, 0) \sim (H, \mu)$. Тогда*

(а) *любая вершина из* $V_2(\mu)$ *смежна в* H *с некоторой вершиной из* $V_1(\nu) \cup V_2(\mu)$;

(б) *если* $V_1(\mu) = V_2(\mu) = \varnothing$, *то* $H = G$,

(в) *если* $V_0(\mu) = V_1(\mu) = \varnothing$, *то количество вершин графа четно*;

(г) *если* $V_0(\mu) = V_2(\mu) = \varnothing$, *то все степени вершин графа* G *четны*;

(д) *если* $\mu(v) = 0$, *то* $G - \{v\} \sim H - \{v\}$, *если* $\mu(v) = 1$, *то* $G - \{v\} \sim H * v - \{v\}$, *если* $\mu(v) = 2$, *то* $G - \{v\} \sim H * wv - \{v\}$ *для любой вершины* w, *смежной в* H *с* v.

Алгебраический критерий локальной эквивалентности простых графов, эквивалентный системе (1), впервые был установлен А. Буше в [6]. Там же подробно изучены свойства решений системы. Сформулируем в виде теоремы полученные в [6] результаты.

Теорема 3.2. *Пусть* $G = (g_{ij})$, $H = (h_{ij})$ — *два связных локально эквивалентных графа,* S — *система уравнений* (1), *записанная для пары графов* (G, G), *и* S' — *такая же система для пары графов* (G, H). *Справедливы следующие утверждения.*

(а) *Число решений системы* S' *такое же, как у системы* S. *Более того, существует линейное преобразование пространства строк* (e_i, a_i, b_i), *переводящее решения системы* S *в решения системы* S'.

(б) *Для любого решения* (e_i, a_i, b_i) *системы* S *либо* $a_i = b_i$ *при всех* i (*регулярное решение*), *либо* $a_i \neq b_i$ *при всех* i (*сингулярное решение*).

(в) *Регулярные решения образуют аффинное подпространство в пространстве* R *решений линейной части системы* S. *Если* $\dim R > 4$, *то коразмерность этого подпространства не более двух.*

(г) *Если сингулярные решения существуют, то их ровно два, и они получаются друг из друга варьированием значений всех переменных* a_i, b_i.

Из утверждений (а) и (в) теоремы 3.2 можно извлечь полиномиальный алгоритм распознавания локальной эквивалентности двух графов. Действительно, за полиномиальное время можно найти базис множества решений линейной части системы (1). Из утверждения (в) следует, что либо этот базис мал (и можно проверить все элементы пространства решений), либо решения всей системы содержат подпространство коразмерности 2 в пространстве решений линейной части (и достаточно проверить все линейные комбинации не более чем из двух элементов базиса).

3.1. Гипотезы 1–5. Понятия класса и его типа сыграли ключевую роль при подтверждении гипотезы 1 в работе [7]. В действительности

в [7] установлено утверждение более сильное, чем сформулировано в гипотезе 1. Именно, в [7] доказана

Теорема 3.3. *Пусть $T(V, E)$ — дерево и $G \sim T$. Тогда найдется перестановка вершин $f\colon V \to V$ такая, что $f(T)$ есть остовный подграф в G и каждая висячая вершина v дерева T подобна вершине $f(v)$.*

В работе [7] подтверждена также гипотеза 2, при этом доказательство проведено на основе утверждений теоремы 3.1.

Рассмотрим вопрос о расстоянии между локально эквивалентными связными графами. Как было показано в конце § 2, это расстояние не превосходит $3n/2$. Эта оценка завышена. Однако и гипотеза 3, высказанная А. Буше, оказалась неверной. В теореме 1 [8] показано, что расстояние между двумя связными n-вершинными локально эквивалентными графами не превосходит величины $\max\{n+1, 10n/9\}$. В [8] приведены также примеры графов, на которых эта оценка достигается. Основным инструментом доказательства послужили помеченные графы.

Сформулируем теперь теорему, доказанную в [8], из которой легко следует справедливость гипотезы 4.

Теорема 3.4. *Если графы G и H локально эквивалентны, то существует последовательность*

$$e_1, \dots, e_k, z_1, \dots, z_l, e_{k+1}, \dots, e_s$$

ребер $e_1, \dots, e_s$ и вершин $z_1, \dots, z_l$ такая, что

$$H = G * e_1 \dots e_k, z_1 \dots z_l e_{k+1} \dots e_s,$$

причем вершины $z_1, \dots, z_l$ попарно не смежны в графе $G * e_1 \dots e_k$.

Гипотеза 5 подтверждена А. Буше в работе [2].

3.2. Применение алгебраического критерия локальной эквивалентности. Гипотеза 8 в ее первоначальной формулировке была подтверждена А. Буше в [6]. Утверждение непосредственно следует из утверждений (в) и (г) теоремы 3.2. Однако, привлекая теорию групп, можно получить более точный результат.

Теорема 3.5. *Число решений системы* (1) *для неориентированных связных графов G и H равно* 0, 3, 6 *или* 2^k *для некоторого* $k \geqslant 0$.

Доказательство. По теореме 3.2 достаточно рассмотреть случай $H = G$. Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем GF(2) и $B = (b_1, \dots, b_n)$ — некоторый его базис. Построим 2-систему $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G, B)$.

Каждому решению системы (1) для пары (G, G) соответствует база $C = (c_1, \dots, c_n)$ 2-системы $\mathcal{V}$ такая, что $G(\mathcal{V}, G) = G$. Линейное преобразование $\varphi\colon V \to V$, переводящее каждый вектор b_i в вектор c_i, оказывается при этом автоморфизмом 2-системы $\mathcal{V}$, т. е. φ переводит каждое подпространство V_i в себя. Наоборот, образ базы B под действием любого автоморфизма 2-системы $\mathcal{V}$ является такой базой.

Итак, каждому решению (e_i, a_i, b_i) системы (1) взаимно однозначно соответствует некоторый элемент x группы $A = \mathrm{Aut}\,\mathcal{V}$. При этом решению (e_i, b_i, a_i) соответствует элемент x^{-1}. Значит, регулярные решения соответствуют элементам порядка 2, а два сингулярных решения (если они есть) соответствуют паре взаимно обратных элементов.

Таким образом, в группе A имеется не более двух неединичных элементов, которые имеют порядок, отличный от 2. Значит, группа A является либо элементарной абелевой группой порядка 2^k, либо одной из следующих групп: Z_3 (порядка 3), S_3 (порядка 6), D_8 (порядка 8). Теорема 3.5 доказана.

При более точных рассуждениях можно отбросить вариант $A = D_8$, однако это не существенно для доказательства теоремы.

Все указанные в теореме 3.5 возможности реализуются. Так, для 5-колеса (первый граф на рис. 1) число решений равно 3; для графа $K_{n,n} - nK_{1,1}$ при нечетном $n \geqslant 3$ (полный двудольный граф без паросочетания) число решений равно шести.

В качестве демонстрации применения теоремы 2.3 найдем условия, при выполнении которых граф является локально эквивалентным своему дополнению. Одновременно будет опровергнута гипотеза 7.

Назовем граф *сильно регулярным по модулю s с параметрами* (v, k, λ, μ), если по модулю s число его вершин сравнимо с v, степень каждой вершины — с k, число общих соседей у любой пары смежных вершин — с λ и число общих соседей у любой пары несмежных вершин — с μ.

Теорема 3.6. *Граф G локально эквивалентен своему дополнению $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда он сильно регулярен по модулю 2 с параметрами* $(1, 0, 0, 1)$. *При этом* $(G, 1) \sim (\overline{G}, 0)$.

Доказательство. Пусть $G = (g_{ij})$, $H = \overline{G} = (h_{ij})$ и $G \sim H$. Тогда при всех i $(i \neq j)$ имеем $g_{ij} + h_{ij} = 1$, $g_{ij}h_{ij} = 0$. Предположим, что e_i, a_i, b_i — решение системы (1). Из уравнения

$$a_i b_i + e_i \sum_{k=1}^{n} e_k g_{ik} h_{ki} = 1$$

получаем, что $a_i b_i = 1$, т. е. $a_i = b_i = 1$ при всех i.

Пусть $X = \{i \mid e_i = 1\}$ и $G_1 = G|_X$ — подграф, индуцированный на множестве X. Определив помечающие функции μ и ν по формуле (2),

мы видим, что $\mu(i) = \nu(i) = 1$ при $i \in X$ и $\mu(i) = \nu(i) = 0$ при $i \notin X$. Поэтому $(G_1, 1) \sim (\overline{G}_1, 0)$ и $(G_1, 0) \sim (\overline{G}_1, 1)$.

Рассмотрим ограничения, которым должен удовлетворять граф G_1, при которых система (1) имеет решения. Пусть $i \neq j \in X$. Уравнение

$$a_i h_{ij} + b_j g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_k g_{ik} h_{kj} = 0$$

переписывается в виде

$$\sum_{k \in X} g_{ik} h_{kj} = 1$$

или, так как $j \in X$,

$$g_{ij} + \sum_{k \in X} g_{ik} + \sum_{k \in X} g_{ik} g_{kj} = 1. \tag{3}$$

Записав такое же уравнение для пары (i, j), получим, что справедливо равенство

$$g_{ij} + \sum_{k \in X} g_{jk} + \sum_{k \in X} g_{ik} g_{kj} = 1$$

и $\sum\limits_{k \in X} g_{ik} = \sum\limits_{k \in X} g_{jk}$ — четности степеней всех вершин графа G_1 — совпадают. Пусть эта четность равна s_1 и $N = |X| (\operatorname{mod} 2)$. Просуммировав уравнения (3), записанные для фиксированного $i \in X$ и всех $j \in X - \{i\}$, получим

$$\sum_{j \in X - \{i\}} g_{ij} + (N+1) \sum_{k \in X} g_{ik} + \sum_{k \in X} g_{ik} \sum_{j \in X - \{i\}} g_{kj} = N + 1,$$

$$s + (N+1)s + s(s+1) = N + 1,$$

$$Ns + N = 1, \qquad N(s+1) = 1, \qquad N = 1, \qquad s = 0.$$

Таким образом, $|X|$ нечетно, степень каждой вершины в G_1 четна. Теперь из уравнения (3) видно, что в G_1 смежные вершины имеют четное, а несмежные — нечетное число общих соседей, т. е. G_1 — сильно регулярный по модулю 2 граф с параметрами $(1, 0, 0, 1)$.

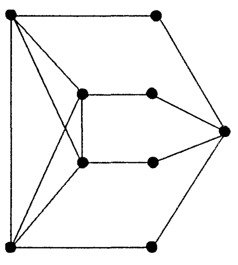
Осталось доказать, что $X = V$, т. е. $e_i = 1$ при всех i.

Пусть $e_i = 0$. Просуммировав уравнения (3), записанные для всех пар (i, j), $j \in X$, получим

$$\sum_{j \in X} g_{ij} + N \sum_{k \in X} g_{ik} + \sum_{k \in X} g_{ik} \sum_{j \in X} g_{kj} = N.$$

Но так как $N = 1$ и $\sum\limits_{j \in X} g_{kj} = s = 0$ при $k \in X$, сумма в левой части равна нулю; противоречие.

Мы доказали необходимость условия теоремы. Далее если граф G сильно регулярен по модулю 2 с указанными параметрами, то легко проверить, что $a_i = b_i = e_i = 1$ есть решение системы (1), записанной для графов G и $\overline{G}$. Теорема 3.6 доказана.



Пример графа, сильно регулярного по модулю 2 с параметрами $(1, 0, 0, 1)$, изображен на рис. 2. Этот пример опровергает гипотезу 7.

Рис. 2. Граф, локально эквивалентный своему дополнению

3.3. Инварианты локальных дополнений. В этом пункте мы построим контрпример к гипотезе 6. Сначала покажем, как инварианты, введенные в определении 1.3, связаны друг с другом и с функцией связности.

Теорема 3.7. 1. *Функция связности орграфа инвариантна при локальных дополнениях.*

2. *Функции связности двух орграфов G и H совпадают тогда и только тогда, когда совпадают семейства $D_\cup(G)$ и $D_\cup(H)$.*

3. *Если степени всех вершин простых графов G и H нечетны и семейства $D_\cup(G)$ и $D_\cup(H)$ совпадают, то и семейства $D_\cap(G)$ и $D_\cap(H)$ совпадают.*

Доказательство. 1. Пусть $X \subseteq V(G)$. Выясним, что происходит при локальных дополнениях с матрицей смежности множеств X и $V \backslash X$. Заметим, что при локальном дополнении в вершине $v \in X$ к некоторым строкам матрицы смежности прибавляется ее строка с номером v, а при локальном дополнении в вершине из $V \backslash X$ то же самое происходит с ее столбцами. В любом случае ранг матрицы смежности не меняется. Утверждение 1 доказано.

2. Пусть $|X| = x$ и $\operatorname{conn}(X) = r$. Тогда ровно 2^{x-r} линейных комбинаций векторов g_i $(i \in X)$ имеют нулевые j-е координаты при всех $j \notin X$. Таким образом, зная функцию conn, мы для каждого $U \subseteq V$ можем определить количество таких множеств $X \subseteq V$, что $X \cup \Delta(X) \subseteq U$. Теперь с помощью обращения Мёбиуса однозначно находится семейство $D_\cup(G)$. Утверждение 2 доказано. В частности, мы показали, что семейство $D_\cup(G)$ инвариантно относительно локальных дополнений.

3. Достаточно заметить, что если в простом графе степени всех вершин нечетные, то выполняется равенство $\Delta(X) = \Delta(\overline{X})$. Тогда для любого $X \subseteq V$ имеем $X \cap \Delta(X) = \overline{X} \cup \Delta(\overline{X})$. Теорема 3.7 доказана.

Заметим, что семейство $D_\cap(G)$, вообще говоря, не инвариантно при локальных дополнениях произвольных орграфов.

Приведем пример двух не локально эквивалентных простых графов G и H с нечетными степенями вершин, для которых $D_\cup(G) = D_\cup(H)$. Тем самым мы покажем, что ни один из указанных инвариантов не может служить критерием локальной эквивалентности.

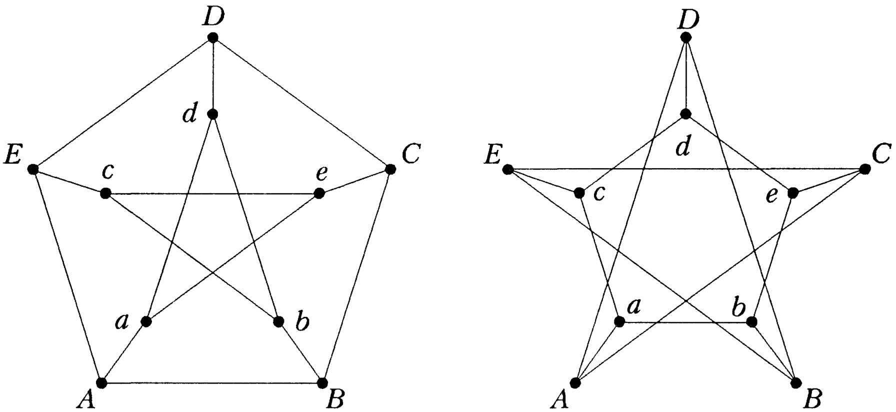


Рис. 3. Не локально эквивалентные графы с совпадающей функцией связности

На рис. 3 изображены два графа Петерсена на одном и том же множестве вершин, удовлетворяющих этим условиям. Убедимся, что они не локально эквивалентны. Пусть, напротив, найдется помечающая функция μ такая, что $(G, 0) \sim (H, \mu)$. Имеем $\{a, b, d\} \in D_\cup(G \backslash \{D\})$. Легко убедиться, что это множество не принадлежит ни $D_\cup(H \backslash \{D\})$, ни $D_\cup(H * dD \backslash \{D\})$. Тогда по теореме 3.1(д) должно выполняться равенство $\mu(D) = 1$. Поскольку граф Петерсена вершинно симметричен, имеем $\mu \equiv 1$, что противоречит теореме 3.1(г). Здесь мы не проводим проверку равенства $D_\cup(G) = D_\cup(H)$.

3.4. Графы, изоморфные своим локальным эквивалентам. Доказательство сформулированной ниже теоремы отличается по стилю от изложенного ранее в данной статье. При доказательстве не используются приведенные выше результаты и понятия, за исключением определения локального дополнения.

Теорема 3.8. *Если связный граф изоморфен всем графам, локально эквивалентным ему, то он имеет не более двух вершин.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — минимальный контрпример к теореме. Докажем последовательность утверждений, приводящую к противоречию.

Предложение 3.1. *В G нет подобных вершин.*

Действительно, в противном случае, стягивая классы подобных вершин, мы получим меньший граф, удовлетворяющий условию теоремы. Но легко проверить, что среди графов, имеющих один или два класса подобных вершин, контрпримеров к теореме нет.

Предложение 3.2. *Степени всех вершин графа G сравнимы с нулем или единицей по модулю 4.*

Пусть $d = |n_G(V)|$ — степень вершины v и $e = |E(n_G(v))|$. Так как в графе G столько же ребер, сколько и в $G * v$, заключаем, что число $e = d(d-1)/4$ целое.

Предложение 3.3. *Степени всех вершин графа G нечетны.*

Действительно, пусть X и Y — множества соответственно четных и нечетных вершин графа G. Локальное дополнение в нечетной вершине не меняет четности вершин; локальное дополнение в четной вершине меняет четность всех смежных с нею вершин. Поэтому каждая четная вершина смежна с одинаковым числом четных и нечетных вершин.

Ясно, что граф, индуцированный на Y, удовлетворяет условию теоремы. Поэтому если $X \neq \varnothing$, то Y есть объединение изолированных вершин и отдельных ребер.

Выберем пару смежных вершин $u \in X$ и $v \in Y$ так, что $n(u) \cap n(v) \subseteq X$ (это можно сделать, так как $|n(v) \cap Y| \leqslant 1$ для всякой вершины из Y). Пусть

$$a = |(n(u) \backslash n(v)) \cap Y|, \quad b = |(n(u) \backslash n(v)) \cap X|, \quad c = |n(u) \cap n(v)|,$$

$$d = |(n(v) \backslash n(u)) \cap X|, \quad e = |(n(v) \backslash n(u)) \cap Y|.$$

В силу предложения 3.2 имеем $c+d+e+1 \equiv 1 (\operatorname{mod} 4)$ (степень вершины v в G). Рассматривая окрестность четной вершины u, получаем $a+1 = b+c$. В графе $G * u$ вершина v четна, поэтому $b+e = a+d+1$ и $c+d = e$. Но $e \leqslant 1$, следовательно, $c+d+e+1 \leqslant 3$ и $c = d = e = 0$. Таким образом, $n(v) = \{u\}$ и вершины u, v подобны, что противоречит предложению 3.1.

Предложение 3.4. *В графе, индуцированном на окрестности любой вершины, все степени четные.*

Действительно, пусть u, v — пара смежных вершин. Определим множества вершин $B = n(u) \cap n(v)$, $A = n(u) \backslash (B \cup \{v\})$, $C = n(v) \backslash (B \cup$

$\{u\})$. Пусть $a = |A|$, $b = |B|$, $c = |C|$. Из предложения 3.3 следует, что числа $a + b$ и $b + c$ четные. Следовательно, a, b, c имеют одинаковую четность. Рассмотрим граф $G' = G * uvu$. Нетрудно проверить, что при такой операции двудольные графы, связывающие A с B, B с C и C с A, заменяются их дополнениями, а число остальных ребер не меняется. Поскольку $G \cong G'$, количество ребер в них одинаково. Значит, $ab + bc + ca$ — четное число, и a, b, c четны. Но b есть степень вершины v в $n(u)$.

Предложение 3.5. *Количество общих соседей для любых двух вершин, находящихся на расстоянии 2, нечетно.*

Действительно, пусть u, v несмежные и $x \in n(u) \cap n(v)$. Рассмотрим граф $G' = G * v$. Имеем $n_{G'}(u) = n(u)$, $n_{G'}(x) = n(x)\Delta(n(v)\setminus\{x\})$. Поэтому

$$n_{G'}(x) \cap n_{G'}(u) = (n(x) \cap n(u))\Delta(n(v) \cap n(u)\setminus\{x\}).$$

Из предложения 3.4 и соотношения $G \cong G'$ следует, что $|n(x) \cap n(u)|$ и $|n_{G'}(x) \cap n_{G'}(u)|$ четны. Но тогда число $|n(v) \cap n(u)| - 1$ четно, что и требовалось доказать.

Следующее утверждение основное для всего доказательства.

Предложение 3.6. *Если $x, y \in n^{(2)}(v)$ и x, y соединены путем в $G\setminus n(v)$, то $n(x) \cap n(v) = n(y) \cap n(v)$.*

Докажем это индукцией по длине кратчайшего пути в $G\setminus n(v)$, соединяющего x и y.

Пусть x и y смежны. Рассмотрим граф $G' = G * y$. Имеем

$$\begin{aligned} n_{G'}(v) \cap n_{G'}(x) &= (n(v) \cap n(x))\Delta(n(v) \cap n(y)\setminus\{x\}) \\ &= (n(v) \cap n(x))\Delta(n(v) \cap n(y)). \end{aligned}$$

Из предложения 3.5 следует, что число $|n_{G'}(v) \cap n_{G'}(x)|$ четно как размер симметрической разности двух нечетных множеств. Но тогда по предложению 3.5 оно должно быть равно нулю: $n_{G'}(v) \cap n_{G'}(x) = \varnothing$ и $n(x) \cap n(v) = n(y) \cap n(v)$.

Пусть $x = x_0, x_1, \dots, x_l = y$ — кратчайшая цепь, соединяющая x и y в $G\setminus n(v)$. Если $x_1 \in n(2)(v)$, то предположение индукции применяем к парам x, x_1 и x_1, y. В противном случае в графе $G * x_1$ вершины x и y соединены цепью $x_0, x_2, \dots, x_l$ меньшей длины, а их соседи в $n(v)$ те же, что и в графе G.

Теперь завершим доказательство теоремы. Ввиду предложения 3.6 для любой вершины v граф $G\setminus d(v)$ распадается на связные компоненты $C_1, \dots, C_l$, причем все вершины из $C_i \cap n^{(2)}(v)$ смежны с одним и тем же подмножеством в $n(v)$. В частности, $\operatorname{conn}(C_i) = 1$.

Рассмотрим семейство $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(V)$ множеств $X \subseteq V$, для которых $\mathrm{conn}\,(C_i) = 1$. Ясно, что все 1-элементные и $(n-1)$-элементные подмножества множества X принадлежат $\mathcal{C}$.

Так как $n > 2$, в $\mathcal{C}$ найдутся множества, имеющие более одного элемента. Пусть C — такое множество минимального размера. Все ребра, соединяющие C с его дополнением, образуют полный двудольный граф. Пусть $X \subseteq C$ и $y \subseteq V \backslash C$ — его доли. Возьмем $x \in X$. Множество $C \backslash d(x)$ есть объединение связных компонент $V \backslash d(x)$. Ввиду предложения 3.6 и выбора множества C все они 1-элементные. Если в X имеются несмежные вершины x_1, x_2, то $n(x_1) = n(x_2)$ и вершины x_1, x_2 подобны. Таким образом, на X индуцируется полный граф.

Аналогично, взяв вершину $y \in Y$ и рассмотрев $C \backslash n(y)$, получим, что множество $C \backslash X$ независимое. Если $C \backslash X \neq \varnothing$, то на окрестности любой вершины $C \backslash X$ индуцируется полный граф, что невозможно. Итак, $C = X$, и все вершины подобны. Мы пришли к противоречию с предложением 3.1. Теорема 3.8 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kotzig A.** Eulerian lines in finite 4-valent graphs and their transformations // Theory of graphs. New York: Acad. Press, 1968. P. 219–230.
2. **Bouchet A.** Cycle graph obstructions // J. Combinatorial Theory. Ser. B. 1994. V. 60, N 1. P. 107–144.
3. **Bouchet A.** k-Transformations, local complementations, and switchings. Cycles and Rays. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990. P. 41–50.
4. **Bouchet A.** Reducing prime graphs and recognizing circle graphs //Combinatorica. 1987. V. 7, N 3. P. 243–254.
5. **Bouchet A.** Transforming trees by successive local complementations // J. Graph Theory. 1988. V. 12, N 2. P. 195–207.
6. **Bouchet A.** An efficient algorithm to recognize locally equivalent graphs // Combinatorica. 1991. V. 11, N 4. P. 315–329.
7. **Fon-Der-Flaass D.** On local compementations of graphs. On definition of matrices' spectra // Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. V. 52. Combinatorics. Amsterdam: North-Holland, 1988. P. 257–266.
8. **Фон-Дер-Флаасс Д. Г.** Расстояние между локально эквивалентными графами // Методы дискретного анализа в изучении булевых функций и графов. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989. Вып. 48. С. 85–94.

Адрес автора:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики СО РАН

Статья поступила

17 ноября 1992 г.