СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ
Январь – март 1994. Том 1, № 1, 63–74

УДК 519.718

# О ГЛУБИНЕ УСЛОВНЫХ ТЕСТОВ ДЛЯ КОНТРОЛЯ НЕИСПРАВНОСТЕЙ ТИПА «ОТРИЦАНИЕ» В СХЕМАХ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ *)

*В. И. Шевченко*

Рассматриваются схемы из функциональных элементов, в которых возможны неисправности типа «отрицание» на входах и выходах элементов. Изучается задача о нахождении условных тестов минимальной глубины, с помощью которых удается выяснить, реализует ли имеющаяся схема (возможно, с неправильно работающими элементами) требуемую функцию. Показывается, что если в схемах используются элементы, реализующие только линейные функции, то такие схемы можно диагностировать посредством условных тестов глубины 1. В противном случае для диагностирования некоторых схем требуются условные тесты достаточно большой глубины.

Используются следующие обозначения:

$B$ — конечное множество функциональных элементов (базис),

$S$ — схема в базисе $B$,

$h(S)$ — минимальная глубина условного теста, решающего задачу контроля схемы $S$ относительно неисправностей типа «отрицание» на входах и выходах элементов схемы,

$h_B(t) = \max h(S)$, где максимум берется по всем схемам в базисе $B$, содержащим не более $t$ элементов.

В статье доказывается следующая

**Теорема.** (а) *Если элементы базиса $B$ реализуют только линейные булевы функции, то $h_B(t) = 1$ при любом $t \geqslant 1$.*

(б) *Если в базисе $B$ содержится хотя бы один элемент, реализующий нелинейную булеву функцию, то при любом $t \geqslant 1$ справедливы неравенства*

$$2^{\lfloor (t-1)/2 \rfloor} - 1 \leqslant h_B(t) \leqslant 2^{(r-1)t+1},$$

*где $r$ — наибольшее число входов у элементов из $B$.*

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-012-488).

## 1. Определения и вспомогательные утверждения

Понятие схемы из функциональных элементов (СФЭ) считаем известным (см., например, [1]). В данной работе мы рассматриваем СФЭ, имеющие ровно один выход. Предполагается, что функциональные элементы могут переходить в неисправные состояния, т. е. если в исправном состоянии некоторый элемент реализует булеву функцию $\varphi(\widetilde{x}_\tau)$, $\widetilde{x}_\tau = (x_1, \dots, x_\tau)$, то в неисправном состоянии он реализует булеву функцию $\varphi^{\sigma_0}(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_\tau^{\sigma_\tau})$, где $(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_\tau) \in \{0,1\}^{\tau+1} \setminus \{1\}^{\tau+1}$, $x^1 = x$, $x^0 = \overline{x}$.

Пусть $S$ — некоторая СФЭ. Число элементов в схеме $S$ обозначим через $L(S)$. Если все функциональные элементы схемы $S$ принадлежат некоторому конечному множеству $B$, то будем говорить, что $S$ — *схема в базисе* $B$.

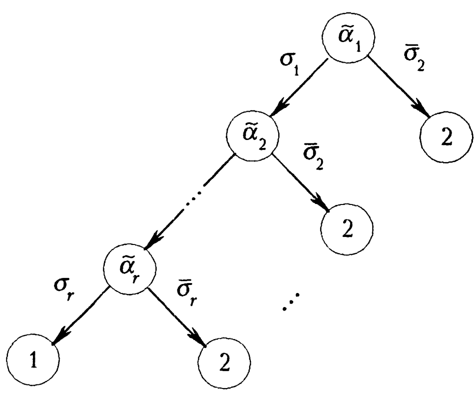
Обозначим через $H(S)$ множество СФЭ, состоящее из схемы $S$ и всех схем, которые можно получить из $S$ при переходе некоторых ее элементов в неисправные состояния. Множество различных булевых функций, реализуемых схемами из $H(S)$, обозначим через $F(S)$.

Множество $H(S)$ разобьем на два непересекающихся подмножества $H_1(S)$ и $H_2(S)$ так, что все схемы из $H_1(S)$ ($H_2(S)$) реализуют функции, совпадающие (не совпадающие) с функцией, реализуемой схемой $S$.

**Задача контроля схемы $S$.** *По любой схеме $S' \in H(S)$ определить, какому подмножеству, $H_1(S)$ или $H_2(S)$, принадлежит $S'$.*

Для решения этой задачи используются условные тесты [2–4].

Пусть схема $S$ имеет $n$ входов и реализует функцию $f(\widetilde{x}_n)$. Тогда каждый рассматриваемый в этой работе условный тест $Y$ для решения задачи контроля схемы $S$ может быть представлен в следующем виде:




$\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_r \in \{0,1\}^n$, $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \{0,1\}$, $f(\widetilde{\alpha}_i) = \sigma_i$ при $i = 1, \dots, r$ и для любой функции $f' \in F(S)$, $f' \not\equiv f$, существует число $t \in \{1, \dots, r\}$ такое, что $f'(\widetilde{\alpha}_t) = \overline{\sigma}_t$

Число $r$ называется *глубиной условного теста* $Y$ [2] и обозначается через $h(Y)$. Величина $h(S) = \min h(Y)$, где минимум берется по всем условным тестам, решающим задачу контроля схемы $S$, называется *минимальной глубиной условного теста для схемы* $S$.

Замечание 1. Пусть $F(S) = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$, где $f_1$ — функция, реализуемая схемой $S$, и $\Delta_j = \{\widetilde{\sigma} \mid \widetilde{\sigma} \in \{0,1\}^n,\ f_j(\widetilde{\sigma}) \neq f_1(\widetilde{\sigma})\}$ при $j = 2, \ldots, m$. Тогда в любом условном тесте, решающем задачу контроля схемы $S$, при каждом $j$ $(2 \leqslant j \leqslant m)$ существует вершина, которой приписан набор из $\Delta_j$.

Замечание 2. Для произвольной схемы $U$ с $n$ входами верно неравенство $h(U) \leqslant 2^n$. Если $F(U)$ содержит только самодвойственные булевы функции (см. [5]), то $h(U) \leqslant 2^{n-1}$.

Множество $G$ различных функций будем называть *$\Pi$-множеством для схемы* $S$, если $G \subseteq F(S) \setminus \{f\}$, где $f$ — функция, реализуемая $S$, и для любого набора $\widetilde{\sigma} \in \{0,1\}^n$ найдется не более одной функции $g \in G$ такой, что $g(\widetilde{\sigma}) \neq f(\widetilde{\sigma})$.

**Лемма 1.** *Пусть $G$ — произвольное $\Pi$-множество для схемы $S$. Тогда $h(S) \geqslant |G|$.*

Доказательство. Пусть множество функций $F(S)$ и множество наборов $\Delta_j$ $(2 \leqslant j \leqslant m)$ такие же, как в замечании 1. Пусть $G = \{f_{j_1}, \ldots, f_{j_k}\}$, где $2 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant m$. Тогда множества наборов $\Delta_{j_1}, \ldots, \Delta_{j_k}$ попарно не пересекаются. Учитывая замечание 1, получаем $h(S) \geqslant k$. Лемма 1 доказана.

Будем говорить, что *некоторый вход* (*элемент* $E_{s_0}$) СФЭ $S$ *соединен с выходом*, если в схеме существует последовательность элементов $E_{s_1}, \ldots, E_{s_p}$ таких, что

— один из входов элемента $E_{s_1}$ присоединен к этому входу (к выходу $E_{s_0}$) схемы $S$,

— один из входов элемента $E_{s_t}$ присоединен к выходу элемента $E_{s_{t-1}}$ при $t = 2, \ldots, p$,

— выход элемента $E_{s_p}$ является выходом схемы $S$.

Удалим из схемы $S$ последовательно все элементы, выходы которых не являются выходом схемы и не присоединены ни к каким входам других элементов. В полученной таким образом схеме все элементы соединены с выходом. Удалим из этой схемы все изолированные входы, т. е. входы, ни к одному из которых не присоединен ни один вход ни одного элемента (если все входы оказались изолированными, то один вход оставляем). Полученную схему обозначим через $\Gamma$.

Заметим, что в схеме $\Gamma$ все элементы соединены с выходом и имеется только один (изолированный) вход либо все входы соединены с выходом.

Схему Γ будем называть *неприводимой подсхемой схемы* $S$, а СФЭ, совпадающую со своей неприводимой подсхемой, — *неприводимой схемой из функциональных элементов* (*неприводимой* СФЭ).

**Лемма 2.** *Пусть $S$ — некоторая схема из функциональных элементов и $\Gamma$ — неприводимая подсхема схемы $S$. Тогда $h(S) = h(\Gamma)$.*

Доказательство. Входы и функциональные элементы схемы $S$, не входящие в подсхему Γ, не соединены с выходом $S$. Следовательно, состояние выхода схемы $S$ полностью определяется состояниями входов и состояниями выходов функциональных элементов, которые входят в подсхему Γ. Поэтому для любой функции $f' \in F(S)$ ($g' \in F(\Gamma)$) найдется функция $g' \in F(\Gamma)$ ($f' \in F(S)$) такая, что $f' = g'$.

Пусть схема $S$ имеет $n$ входов, первые $m$ входов схемы $S$ являются входами подсхемы Γ, $Y$ — условный тест для $S$ и $Z$ — условный тест для Γ. Пусть $\Sigma \subseteq \{0,1\}^n$ и $\Delta \subseteq \{0,1\}^m$ — множества различных двоичных наборов, приписанных вершинам $Y$ и $Z$ соответственно. Если в $Y$ каждый набор $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \in \Sigma$ заменить набором $(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$, то получится условный тест для схемы Γ, глубина которого равна $h(Y)$. Если в $Z$ каждый набор $(\delta_1,\ldots,\delta_m) \in \Delta$ заменить набором $(\delta_1,\ldots,\delta_m,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-m})$, где $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-m} \in \{0,1\}$ произвольные, то получится условный тест для схемы $S$, глубина которого равна $h(Z)$. Лемма 2 доказана.

**Лемма 3.** *Пусть булевы функции $\alpha(\widetilde{x}_k)$ и $\beta(\widetilde{x}_m)$ таковы, что $\beta(\widetilde{x}_m)$ может быть получена из $\alpha(\widetilde{x}_k)$ подстановкой переменных $x_1,\ldots,x_m$, а базисы $B_1 = \{E_1\}$ и $B_2 = \{E_2\}$ таковы, что элемент $E_1$ реализует функцию $\alpha(\widetilde{x}_k)$, а элемент $E_2$ — функцию $\beta(\widetilde{x}_m)$. Тогда $h_{B_1}(t) \geqslant h_{B_2}(t)$ при любом $t \geqslant 1$.*

Доказательство. Пусть, например, функцию $\beta(\widetilde{x}_m)$ можно получить из функции $\alpha(\widetilde{x}_k)$, если при $i = 1,\ldots,m$ вместо переменных $x_{r_0+\ldots+r_{i-1}+1},\ldots,x_{r_0+\ldots+r_{i-1}+r_i}$ ($r_0 = 0$) подставить переменную $x_i$. Тогда, склеив (отождествив) входы $r_0+\ldots+r_{i-1}+1,\ldots,r_0+\ldots+r_{i-1}+r_i$ элемента $E_i$, получим элемент, реализующий функцию $\beta(\widetilde{x}_m)$. С помощью этого элемента по произвольной схеме $S$ в базисе $B_2$ легко построить схему $U$ в базисе $B_1$ такую, что $L(U) = L(S)$, схема $U$ реализует ту же функцию, что $S$, и имеет место включение $F(S) \subseteq F(U)$. Следовательно, $h(S) \leqslant h(U)$. Лемма 3 доказана.

**Лемма 4.** *Пусть $B_1 = \{E_1\}$ и $B_2 = \{E_2\}$ — базисы такие, что элемент $E_1$ реализует некоторую нелинейную булеву функцию, а элемент $E_2$ — одну из функций множества $\Psi = \{x_1x_2, x_1\overline{x}_2, \overline{x}_1\overline{x}_2, x_1 \vee x_2, x_1 \vee \overline{x}_2, \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2\} \cup \{x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + ax_1 + bx_2 + cx_3 + d\colon a, b, c, d \in \{0,1\}\}$. Тогда $h_{B_1}(t) \geqslant h_{B_2}(t)$ при любом $t \geqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(\widetilde{x}_\tau)$ — булева функция, реализуемая элементом $E_i$. Так как $\varphi(\widetilde{x}_\tau)$ нелинейная, в полиноме Жегалкина, задающем функцию $\varphi$ [5], есть нелинейные слагаемые. Пусть самое короткое из них имеет вид $x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_k}$, где $k \geqslant 2$. Тогда у функции $\varphi(\widetilde{x}_\tau)$ переменную $x_{j_1}$ заменим переменной $x_1$, переменные $x_{j_2},\ldots,x_{j_k}$ — переменной $x_2$, а все остальные переменные — переменной $x_3$. В результате получим функцию

$$x_1x_2 + \lambda_1x_1x_2x_3 + \lambda_2x_1x_3 + \lambda_3x_2x_3 + \lambda_4x_1 + \lambda_5x_2 + \lambda_6x_3 + \lambda_7,$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_7 \in \{0,1\}$. Легко проверить, что эта функция или функция, полученная из нее отождествлением переменных, принадлежит множеству $\Psi$. Лемма 4 доказана.

## 2. Доказательство теоремы

(а) Пусть элементы базиса $B$ реализуют только линейные булевы функции. Заметим, что для произвольных линейной функции $g(\widetilde{x}_m)$ и набора $(\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_m) \in \{0,1\}^{m+1}$ функция $g_0^\sigma(x_1^{\sigma_1},\ldots,x_m^{\sigma_m})$ совпадает с $g$ или с $\overline{g}$. Используя этот факт и определение функционирования СФЭ (см. [1]), легко показать, что $F(S) = \{f,\overline{f}\}$ для любой схемы $S$ в базисе $B$, реализующей $f$. Следовательно, $h(S) = 1$. Утверждение (а) доказано.

Прежде чем доказывать утверждение (б) теоремы, установим несколько лемм.

**Лемма 5.** *Пусть $B$ — некоторый базис и $r$ — наибольшее число входов у элементов из $B$. Тогда в любой неприводимой схеме в базисе $B$, содержащей не более $t$ элементов, число входов не превосходит величину $(r-1)t+1$.*

Доказательство. Пусть $\Gamma$ — неприводимая схема в базисе $B$ такая, что $L(\Gamma) \leqslant t$. Суммарное число входов всех функциональных элементов схемы $\Gamma$ не превосходит $rL(\Gamma)$. Так как в $\Gamma$ все элементы соединены с выходом, по крайней мере $L(\Gamma)-1$ входов функциональных элементов схемы $\Gamma$ присоединены к выходам элементов. Следовательно, число входов в схеме $\Gamma$ не превосходит $(r-1)L(\Gamma)+1 \leqslant (r-1)t+1$. Лемма 5 доказана.

Пусть

$$\Phi_1 = \{xy, x \vee y\}, \quad \Phi_2 = \{x\overline{y}, x \vee \overline{y}\}, \quad \Phi_3 = \{\overline{x}\,\overline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}\},$$
$$\Phi_4 = \{xy + yz + xz, xy + yz + xz + y + z\},$$
$$\Phi_5 = \{xy + yz + xz + x, xy + yz + xz + x + 1\},$$
$$\Phi_6 = \{xy + yz + xz + 1, xy + yz + xz + y + z + 1\},$$
$$\Phi_7 = \{xy + yz + xz + x + y + z, xy + yz + xz + x + y + z + 1\}.$$

**Лемма 6.** *Пусть* $\varphi_i \in \Phi_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, *и* $S^1_n(\varphi_1)$, $S^2_n(\varphi_2)$, $S^3_n(\varphi_3)$ — *схемы из функциональных элементов, изображенные на рис.* 1, 2, 3 *соответственно. Тогда*

$$2^n - 1 \leqslant h(S^1_n(\varphi_1)) \leqslant 2^n, \qquad h(S^2_n(\varphi_2)) = h(S^3_n\varphi_3)) = 2^n.$$

Доказательство. Рассмотрим схему $S^1_n(\varphi_1)$. Пусть $\varphi_1(x,y) = xy$. Тогда $S^1_n(\varphi_1)$ реализует $f_1 = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$. Нетрудно показать, что для любого набора

$$\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{0,1\}^n \setminus \{1\}^n$$

в $H(S^1_n(\varphi_1))$ найдется схема, которая в вершинах $v_1$, $v_2$ вычисляет функции $\alpha_{\widetilde{\sigma}} = x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$, $\beta = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = f_1$ соответственно, а в вершине $v_3$ — функцию $\overline{\varphi}_1(\overline{\alpha}_{\widetilde{\sigma}}, \overline{\beta}) = x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} \vee x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = g^1_{\widetilde{\sigma}}$, отличающуюся от функции $f_1$ только на наборе $\widetilde{\sigma}$. Таким образом, множество функций $\{g^1_{\widetilde{\sigma}} : \widetilde{\sigma} \in \{0,1\}^n \setminus \{1\}^n\}$ есть П-множество для $S^1_n(\varphi_1)$. В силу леммы 1 имеем $h(S^1_n(\varphi_1)) \geqslant 2^n - 1$. Неравенство $h(S^1_n(\varphi_1)) \leqslant 2^n$ очевидно. Аналогично (в силу принципа двойственности [5]) убеждаемся, что утверждение леммы справедливо для $S^1_n(\varphi_1)$ при

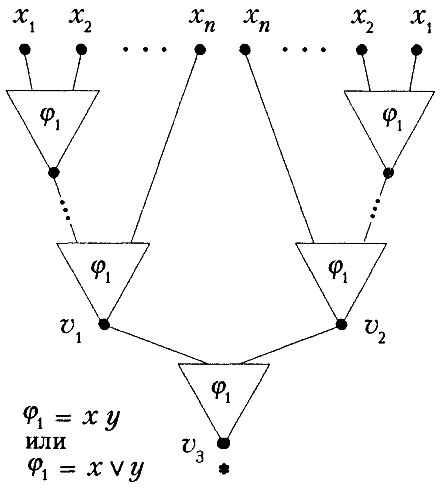



*Рис. 1.* Схема $S^1_n(\varphi_1)$

$$\varphi_1(x,y) = x \vee y.$$

Рассмотрим схему $S^2_n(\varphi_2)$. Если $\varphi_2(x,y) = x\overline{y}$, то схема $S^2_n(\varphi_2)$ реализует функцию $f_2 = 0$, а множество функций

$$\{x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} : (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{0,1\}^n\}$$

есть П-множество для $S^2_n(\varphi_2)$. Если $\varphi(x,y) = x \vee \overline{y}$, то $S^2_n(\varphi_2)$ реализует $f_2 = 1$, а множество функций

$$\{x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n} : (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{0,1\}^n\}$$

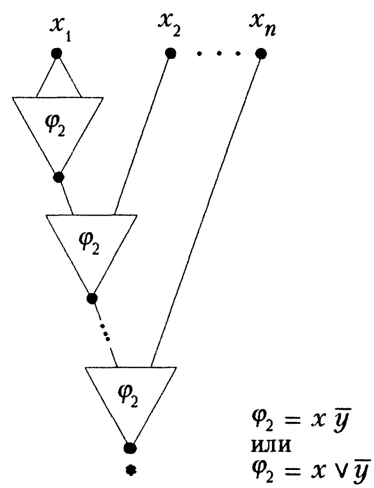



*Рис. 2.* Схема $S^2_n(\varphi_2)$

является П-множеством для $S_n^2(\varphi_2)$. В силу леммы 1 $h(S_n^2(\varphi_2)) \geqslant 2^n$. Очевидно, что верно следующее неравенство:

$$h(S_n^2(\varphi_2)) \leqslant 2^n.$$

Рассмотрим схему $S_n^3(\varphi_3)$. Если $\varphi_3(x, y) = \overline{x}\ \overline{y}$, то схема $S_n^3(\varphi_3)$ реализует функцию $f_3 = 0$, а множество функций

$$\{x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} : (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{0,1\}^n\}$$

является П-множеством для $S_n^3(\varphi_3)$. Если

$$\varphi_3(x, y) = \overline{x} \vee \overline{y},$$

то схема $S_n^3(\varphi_3)$ реализует функцию $f_3 = 1$, а множество функций

$$\{x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n} : (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{0,1\}^n\}$$

есть П-множество для схемы $S_n^3(\varphi_3)$. В силу леммы 1 имеет место неравенство

$$h(S_n^3(\varphi_3)) \geqslant 2^n.$$

Очевидно, что выполняется неравенство $h(S_n^3(\varphi_3)) \leqslant 2^n$.

Лемма 6 доказана.

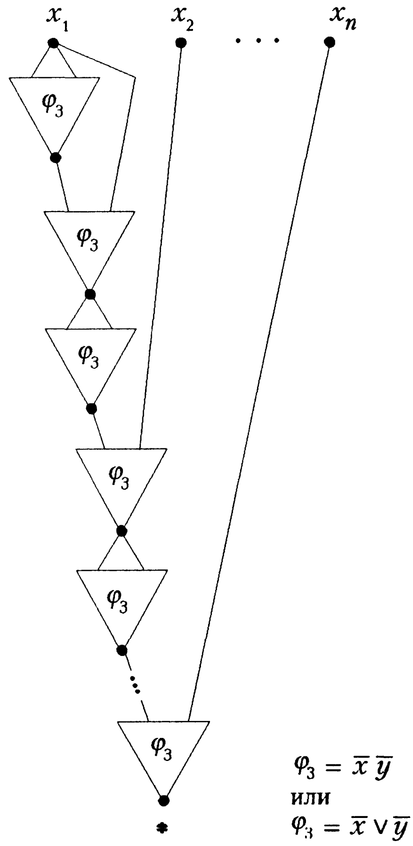



*Рис. 3.* Схема $S_n^3(\varphi_2)$

Для $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{0,1\}^n$ введем обозначение $\overline{\widetilde{\sigma}} = (\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n)$.

**Лемма 7.** *Пусть $\varphi_4 \in \Phi_4$ и $S_n^4(\varphi_4)$ — схема из функциональных элементов, изображенная на рис. 4. Тогда $2^n - 1 \leqslant h(S_n^4(\varphi_4)) \leqslant 2^n$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_4(x, y, z) = xy + yz + xz = xy \vee yz \vee xz$. Тогда схема $S_n^4(\varphi_4)$ реализует функцию $f = y(x_1 \vee \ldots \vee x_n) \vee x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$. Нетрудно показать, что для любого набора $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{0,1\}^n \setminus \{1\}^n$ в $H(S_n^4(\varphi_4))$ найдется схема, которая в вершине $v_1$ вычисляет функцию $\alpha_{\widetilde{\sigma}} = y(x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}) \vee x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$, в вершине $v_2$ — функцию $\beta = f$, а в вершине $v_3$ — функцию $g_{\widetilde{\sigma}} = \overline{y}(\alpha_{\widetilde{\sigma}} \vee \beta) \vee \alpha_{\widetilde{\sigma}}\beta = \overline{y}(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \vee x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}) \vee y(x_1 \vee \ldots \vee x_n)(x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n})$, отличающуюся от функции $f$ только на наборах $(0, \widetilde{\sigma})$ и $(1, \overline{\widetilde{\sigma}})$. Таким образом, множество функций $\{g_{\widetilde{\sigma}} : \widetilde{\sigma} \in \{0,1\}^n \setminus \{1\}^n\}$ является П-множеством для $S_n^4(\varphi_4)$. Ввиду леммы 1 имеем $h(S_n^4(\varphi_4)) \geqslant 2^n - 1$. Так как функции $\varphi$ и $\overline{x}$

самодвойственные (см. [5]), $F(S_n^4(\varphi_4))$ содержит только самодвойственные булевы функции. Учитывая замечание 2, получаем неравенство $h(S_n^4(\varphi_4)) \leqslant 2^n$.

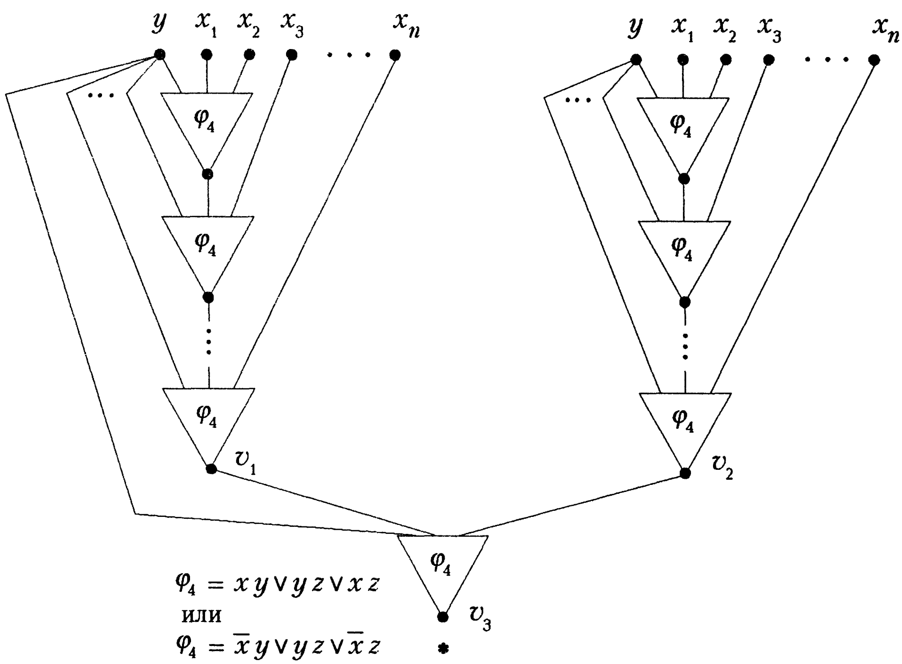



*Рис. 4.* Схема $S_n^4(\varphi_4)$

Пусть $\varphi_4(x,y,z) = xy + yz + xz + y + z = \overline{x}y \vee yz \vee \overline{x}z$. Тогда схема $S_n^4(\varphi_4)$ реализует функцию $f = \overline{y}(x_1 \vee \ldots \vee x_n) \vee x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$. Для любого набора $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{0,1\}^n \setminus \{1\}^n$ в $H(S_n^4(\varphi_4))$ найдется схема, которая в вершине $v_1$ вычисляет функцию $\alpha_{\widetilde{\sigma}} = \overline{y}(x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}) \vee x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$, в вершине $v_2$ — функцию $\beta = f$, а в вершине $v_3$ — функцию $g_{\widetilde{\sigma}} = y(\alpha_{\widetilde{\sigma}} \vee \beta) \vee \alpha_{\widetilde{\sigma}}\beta = y(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \vee x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}) \vee y(x_1 \vee \ldots \vee x_n)(x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n})$, отличающуюся от функции $f$ только на наборах $(1, \widetilde{\sigma})$ и $(0, \overline{\widetilde{\sigma}})$.

Таким образом, множество функций $\{g_{\widetilde{\sigma}} \colon \widetilde{\sigma} \in \{0,1\}^n \setminus \{1\}^n\}$ является П-множеством для $S_n^4(\varphi_4)$. В силу леммы 1 $h(S_n^4(\varphi_4)) \geqslant 2^n - 1$. Так как функции $\varphi$ и $\overline{x}$ самодвойственные, $F(S_n^4(\varphi_4))$ содержит только самодвойственные булевы функции. Отсюда и из замечания 2 получаем неравенство $h(S_n^4(\varphi_4)) \leqslant 2^n$. Лемма 7 доказана.

**Лемма 8.** *Пусть $\varphi_5 \in \Phi_5$ и $S_n^5(\varphi_5)$ — схема из функциональных элементов, изображенная на рис. 5. Тогда $h(S_n^5(\varphi_5)) = 2^n$.*

Доказательство. Пусть

$$\varphi_5(x,y,z) = xy + yz + xz + x \qquad (\varphi_5(x,y,z) = xy + yz + xz + x + 1).$$

Тогда схема $S_n^5(\varphi_5)$ реализует функцию $f = 0$ (соответственно $f = 1$). Легко проверить, что для любого набора $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ из $\{0,1\}^n$ в $H(S_n^5(\varphi_5))$ найдется схема, которая реализует функцию

$$\varphi(0,1,x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}) = x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$$

$$(\varphi(1,0,x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}) = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}),$$

отличающуюся от $f$ только на наборе $\widetilde{\sigma}$. Таким образом, множество функций

$$\{x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} : (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \{0,1\}^n\}$$

$$(\{x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n} : (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \{0,1\}^n\})$$

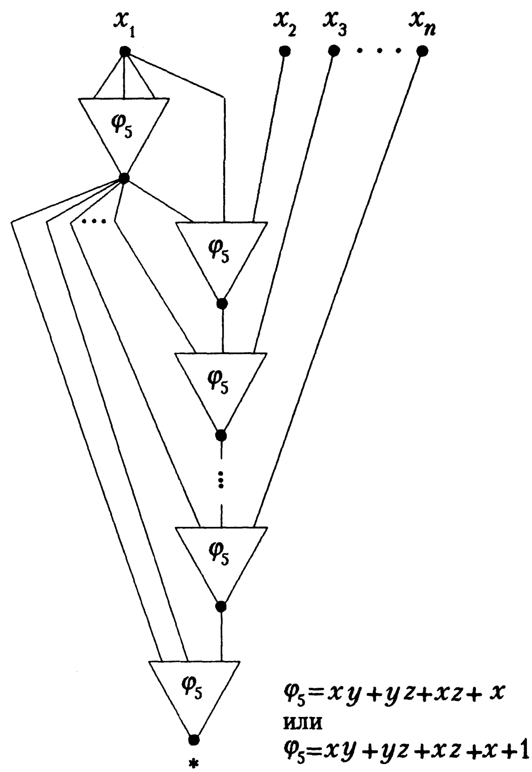



*Рис. 5.* Схема $S_n^5(\varphi_5)$

является П-множеством для схемы $S_n^5(\varphi_5)$. В силу леммы 1 справедливо неравенство $h(S_n^5(\varphi_5)) \geqslant 2^n$. Неравенство $h(S_n^5(\varphi_5)) \leqslant 2^n$ очевидно. Лемма 8 доказана.

**Лемма 9.** *Пусть* $\varphi_6 \in \Phi_6$ *и* $S_n^6(\varphi_6)$ — *схема из функциональных элементов, изображенная на рис. 6. Тогда* $h(S_n^6(\varphi_6)) = 2^n$.

Доказательство. Пусть

$$\varphi_6(x,y,z) = xy + yz + xz + 1 = \overline{x}(\overline{y} \vee \overline{z}) \vee \overline{y}\,\overline{z}$$

$$(\varphi(x,y,z) = xy + yz + xz + y + z + 1 = x(\overline{y} \vee \overline{z}) \vee \overline{y}\,\overline{z}).$$

Тогда схема $S_n^6(\varphi_6)$ реализует функцию $f := \overline{y}$. Нетрудно показать, что для любого набора

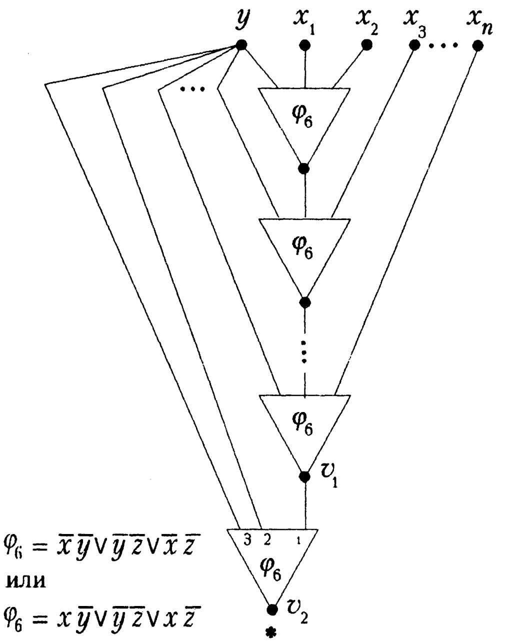



*Рис. 6.* Схема $S_n^6(\varphi_6)$

$$\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \{0,1\}^n$$

в $H(S_n^6(\varphi_6))$ можно найти схему, которая вычисляет в вершине $v_1$ функцию

$$\alpha_{\widetilde{\sigma}} = \overline{y}(x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}) \vee x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n},$$

а в вершине $v_2$ — функцию

$$\alpha_{\widetilde{\sigma}}(y \vee \overline{y}) \vee y\overline{y} = \alpha_{\widetilde{\sigma}},$$

отличающуюся от $f$ только на наборах $(1, \widetilde{\sigma})$ и $(0, \overline{\widetilde{\sigma}})$. Таким образом, множество функций

$$\{\alpha_{\widetilde{\sigma}} \colon \widetilde{\sigma} \in \{0,1\}^n\}$$

есть П-множество для $S_n^6(\varphi_6)$. В силу леммы 1 имеем неравенство $h(S_n^6(\varphi_6)) \geqslant 2^n$. Так как $\varphi$ и $\overline{x}$ самодвойственные, $F(S_n^6(\varphi_6))$ содержит только самодвойственные булевы функции. Учитывая замечание 2, получаем неравенство $h(S_n^6(\varphi_6)) \leqslant 2^n$. Лемма 9 доказана.

**Лемма 10.** *Пусть $\varphi_7 \in \Phi_7$ и $S_n^7(\varphi_7)$ — схема из функциональных элементов, изображенная на рис. 7. Тогда*

$$2^n - 1 \leqslant h(S_n^7(\varphi_7)) \leqslant 2^n.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_7(x,y,z) = xy + yz + xz + x + y + z$. Тогда схема $S_n^7(\varphi_7)$ реализует функцию $f = x_1 \vee \ldots \vee x_n$. Нетрудно показать, что для $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \{0,1\}^n \setminus \{1\}^n$ в $H(S_n^7(\varphi_7))$ найдется схема, вычисляющая в вершине $v_1$ функцию $\alpha_{\widetilde{\sigma}} = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$ и в вершине $v_2$ — функцию $\overline{\varphi}_7(\overline{f}, 0, \overline{\alpha}_{\widetilde{\sigma}}) = f\alpha_{\widetilde{\sigma}} = g_{\widetilde{\sigma}}$, отличающуюся от функции $f$ только на наборе $\widetilde{\sigma}$.

Таким образом, множество функций $\{g_{\widetilde{\sigma}} \colon \widetilde{\sigma} \in \{0,1\}^n \setminus \{1\}^n\}$ является П-множеством для $S_n^7(\varphi_7)$. В силу леммы 1 $h(S_n^7(\varphi_7)) \geqslant 2^n - 1$. Неравенство $h(S_n^7(\varphi_7)) \leqslant 2^n$ очевидно. Пусть $\varphi_7(x,y,z) = xy + yz + xz + x + y + z + 1$. Тогда схема $S_n^7(\varphi_7)$ реализует функцию $f = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$. Для $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \{0,1\}^n \setminus \{1\}^n$ в $H(S_n^7(\varphi_7))$ найдется схема, вычисляющая в вершине $v_1$ функцию $\alpha_{\widetilde{\sigma}} = x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$, а в вершине

$v_2$ — функцию $\overline{\varphi}_7(\overline{f}, 1, \overline{\alpha}_{\widetilde{\sigma}}) = f \vee \alpha_{\widetilde{\sigma}} = g_{\widetilde{\sigma}}$, отличающуюся от функции $f$ только на наборе $\widetilde{\sigma}$.

Таким образом, множество функций $\{g_{\widetilde{\sigma}} \colon \widetilde{\sigma} \in \{0,1\}^n \setminus \{1\}^n\}$ является П-множеством для $S_n^7(\varphi_7)$. В силу леммы 1 $h(S_n^7(\varphi_7)) \geqslant 2^n - 1$. Неравенство $h(S_n^7(\varphi_7)) \leqslant 2^n$ очевидно. Лемма 10 доказана.

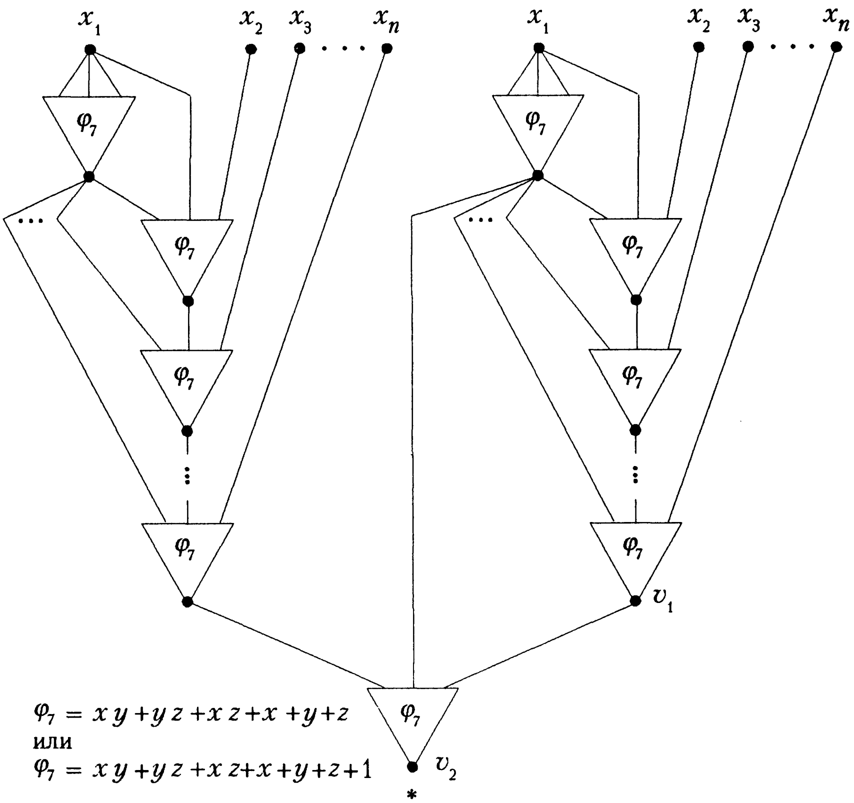



*Рис. 7.* Схема $S_n^7(\varphi_7)$

Замечание 3. Отметим, что $L(S_n^1(\varphi_1)) = 2n - 1$, $L(S_n^2(\varphi_2)) = n$, $L(S_n^3(\varphi_3)) = 2n$, $L(S_n^4(\varphi_4)) = 2n - 1$, $L(S_n^5(\varphi_5)) = n + 1$, $L(S_n^6(\varphi_6)) = n$, $L(S_n^7(\varphi_7)) = 2n + 1$.

(б) Докажем сначала правое неравенство для $h_B(t)$. Из леммы 5 и замечания 2 следует, что для любой неприводимой схемы Г в базисе $B$ такой, что $L(\Gamma) \leqslant t$, выполняется неравенство $h(\Gamma) \leqslant 2^{(r-1)t+1}$. В силу леммы 2 получаем $h_B(t) \leqslant 2^{(r-1)t+1}$.

Докажем теперь левое неравенство для $h_B(t)$. Из лемм 4, 6–10 и замечания 3 следует, что если базис $B$ содержит хотя бы один функциональный элемент, реализующий нелинейную булеву функцию, то

при любом $t \geqslant 1$ в базисе $B$ найдется схема $S$ такая, что $L(S) \leqslant t$ и $h(S) \geqslant 2^{\lfloor (t-1)/2 \rfloor} - 1$. Поэтому $h_B(t) \geqslant 2^{\lfloor (t-1)/2 \rfloor} - 1$. Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Лупанов О. Б.** Об одном классе схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 7. М.: Физматгиз, 1962. С. 61–144.
2. **Мошков М. Ю.** Условные тесты // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1983. Вып. 40. С. 131–170.
3. **Чегис И. А., Яблонский С. В.** Логические способы контроля работы электрических схем // Тр. МИ АН СССР. 1958. Т. 51. С. 270–360.
4. **Яблонский С. В.** Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
5. **Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.** Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.



Адрес автора:

РОССИЯ,
603005, Нижний Новгород,
ул. Ульянова, д. 10,
НИИ прикладной математики
и кибернетики
при Нижегородском университете



Статья поступила
11 января 1994 г.