СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ
Апрель – июнь 1994. Том 1, № 2, 8–17

УДК 519.8

АЛГОРИТМ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА И ЕГО ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ*)

Э. Х. Гимади, Н. И. Глебов, А. И. Сердюков

Описывается полиномиальный алгоритм приближенного решения задачи коммивояжера, основу которого составляет рандомизированный вариант алгоритма для задачи о назначениях. Вероятностный анализ алгоритма проводится в случае таких вероятностных распределений на множестве входов (матриц расстояний между городами), относительно которых столбцы случайной матрицы представляют собой последовательность симметрично зависимых случайных величин. При некоторых дополнительных предположениях, касающихся величины коэффициента разброса элементов матрицы расстояний, устанавливается асимптотическая точность алгоритма и обосновываются соответствующие оценки относительной погрешности и вероятности несрабатывания алгоритма.

Ввиду NP-трудности задачи коммивояжера (ЗК) понятны многочисленные попытки построения малотрудоемких алгоритмов ее приближенного решения и получения оценок качества этих алгоритмов (см., например, [1–6]). В число основных характеристик качества алгоритма наряду с трудоемкостью входят относительная погрешность и вероятность несрабатывания. Оценки для двух последних характеристик получают в предположении, что на множестве всех индивидуальных ЗК (т. е. входов) задано вероятностное распределение из определенного класса. В силу этого сами характеристики и их оценки существенным образом зависят от класса распределений.

Особый интерес представляют такие малотрудоемкие приближенные алгоритмы и классы вероятностных распределений, относительно которых алгоритмы являются асимптотически точными, т. е. вероятность несрабатывания и относительная погрешность каждого такого алгоритма стремятся к нулю с ростом размерности задачи [1]. В этом направлении был получен ряд результатов, касающихся алгоритма «Иди в ближайший непройденный город», в предположении, что элементы

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-012-417).

матрицы расстояний выбираются из некоторого множества в соответствии с одним и тем же распределением вероятностей и независимо друг от друга [2–4].

Ниже предлагается полиномиальный алгоритм для приближенного решения ЗК, основанный на использовании оптимального решения соответствующей задачи о назначениях (ЗН), и проводится его вероятностный анализ. Устанавливается асимптотическая точность алгоритма для более широкого, по сравнению с рассматривавшимися ранее, класса вероятностных распределений.

Классическая задача коммивояжера состоит в нахождении обхода n городов, имеющего минимальную длину. При этом предполагаются заданными расстояния между городами c_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$. Обходом коммивояжера считается замкнутый маршрут, проходящий через каждый город ровно один раз. Формально задача может быть поставлена на ориентированном взвешенном n-вершинном графе, в котором вершины соответствуют городам, а вес дуги (i, j) — расстоянию c_{ij} от i-го города до j-го.

Задача коммивояжера может быть записана следующим образом: минимизировать $\sum_{i=1}^{n} c_{\pi_i \pi_{i+1}}$ на множестве всех перестановок $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$, представляющих собой последовательность вершин графа в порядке их прохождения коммивояжером $(\pi_{n+1} = \pi_1)$.

Соответствующая задача о назначениях формулируется так: требуется найти $\min_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^{n} c_{i\sigma(i)}$, где S_n — симметрическая группа подстановок n-й степени.

Далее посредством ЗН(C) и ЗК(C) мы будем обозначать соответственно индивидуальные задачи о назначениях и коммивояжера с матрицей расстояний $C = (c_{ij})$. Условимся также не делать различия между перестановкой $\alpha = (\alpha(1), \dots, \alpha(n))$ и подстановкой $\alpha\colon i \to \alpha(i)$.

- Матрицу C будем называть *лексикографически упорядоченной*, если ее столбцы образуют лексикографически неубывающую последовательность, т. е.

$$\forall j \in \{1, \dots, n-1\} \ \exists k \in \{1, \dots, n+1\}\colon c_{ij} = c_{ij+1}$$

  при $i < k$ и $c_{kj} < c_{kj+1}$ в случае $k \leqslant n$.

Легко видеть, что для любой матрицы C существует единственная лексикографически упорядоченная матрица C^0, получаемая из C перестановкой столбцов. Матрицы C и C^0 при подходящем выборе $\alpha \in S_n$ связаны соотношением $C^0 = CE_\alpha$, где $E_\alpha = (e_{ij}^\alpha)$ — матрица подстановки α такая, что

$$e_{ij}^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{при } i = \alpha(j), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В дальнейшем при записи произведения $\alpha\beta$ подстановок α и β мы полагаем, что $E_\alpha E_\beta = E_{\alpha\beta}$, т. е. $\alpha\beta(i) = \alpha(\beta(i))$.

Опишем теперь алгоритм $\mathcal{A}$ приближенного решения ЗК в случае произвольной матрицы C. Алгоритм состоит из двух этапов — отыскания точного решения ЗН(C) и построения приближенного решения ЗК(C).

Этап 1. Рандомизированный алгоритм $\mathcal{A}_{\text{ЗН}}$ решения задачи о назначениях.

Вход: матрица C.

1.1. Построение по C лексикографически упорядоченной матрицы C^0 и перестановки $\lambda(C)$: $C^0 = CE_{\lambda(C)}$.

1.2. Нахождение (каким-либо известным детерминированным алгоритмом) подстановки $\beta(C^0)$ — решения ЗН(C^0).

1.3. Выбор из подгруппы подстановок $S(C^0) = \{\alpha \in S_n \mid C^0 = C^0 E_\alpha\}$ некоторой подстановки σ в соответствии с равномерным распределением вероятностей на $S(C^0)$.

1.4. $\beta := \lambda(C)\sigma\beta(C^0)$.

Выход: подстановка β — решение ЗН(C).

Этап 2. Разложение подстановки в произведение независимых циклов и построение приближенного решения ЗК.

Вход: подстановка β — полученное на выходе этапа 1 решение ЗН(C).

2.1. Выделение всех циклов $B_1, \ldots, B_m$ подстановки β и выбор номеров $i_k \in B_k$, $k = 1, \ldots, m$.

2.2. Построение циклической подстановки $\widetilde{\beta}$:

$$\widetilde{\beta}(i) = \begin{cases} \beta(i_{k+1}), & \text{если } i = i_k \ (i_{m+1} = i_1), \\ \beta(i), & \text{если } i \notin \{i_1, \ldots, i_m\}. \end{cases}$$

2.3. Определение перестановки π: $\pi_1 = 1, \pi_k = \widetilde{\beta}(\pi_{k-1}), k = 2, \ldots, n$.

Выход: перестановка π — приближенное решение ЗК(C).

Для выполнения вероятностного анализа алгоритма $\mathcal{A}$ будем предполагать заданным некоторое распределение вероятностей $\mathbf{P}$ на множестве всех матриц размеров $n \times n$, относительно которого столбцы ξ_k случайной матрицы $C = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ образуют последовательность n-мерных случайных величин с симметрической функцией совместного распределения (симметрично зависимые случайные величины см. [7, т. 2, с. 283]), т. е.

$$\mathbf{P}\{\xi_{\alpha(1)} \in \Lambda_1, \ldots, \xi_{\alpha(n)} \in \Lambda_n\} = \mathbf{P}\{\xi_1 \in \Lambda_1, \ldots, \xi_n \in \Lambda_n\}$$

для любых борелевских множеств $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ из $\mathbf{R}^n$ и любой подстановки α из S_n. Класс таких распределений обозначим через $\mathcal{P}$.

Получаемая в такой ситуации на выходе алгоритма $\mathcal{A}_{3\text{Н}}$ подстановка β будет являться случайной величиной с некоторым распределением $\mathbf{P}_\beta$ на множестве S_n. В дальнейшем существенно используется следующая лемма.

Лемма 1. *Распределение* $\mathbf{P}_\beta$ *является равномерным.*

Доказательство. Прежде всего, отметим, что в силу симметричной зависимости столбцов случайной матрицы $C = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ случайная величина $\widetilde{C} = CE_\sigma = (\widetilde{\xi}_1, \dots, \widetilde{\xi}_n)$ имеет распределение вероятностей $\widetilde{\mathbf{P}}$, равное распределению $\mathbf{P}$ случайной величины C, если случайная величина $\sigma \in S_n$ не зависит от C. Для установления этого факта достаточно убедиться, что равенство $\widetilde{\mathbf{P}}\{\widetilde{C} \in \Lambda\} = \mathbf{P}\{C \in \Lambda\}$ имеет место для множеств Λ вида $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n$, где Λ_k — борелевские множества из $\mathbf{R}^n$,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbf{P}}\{\widetilde{\xi}_1 \in \Lambda_1, \dots, \widetilde{\xi}_n \in \Lambda_n\} \\
&\qquad = \sum_{\alpha \in S_n} \mathbf{Pr}\{\sigma = \alpha\}\mathbf{P}\{\xi_{\alpha(1)} \in \Lambda_1, \dots, \xi_{\alpha(n)} \in \Lambda_n\} \\
&\qquad = \mathbf{P}\{\xi_1 \in \Lambda_1, \dots, \xi_n \in \Lambda_n\} \sum_{\alpha \in S_n} \mathbf{Pr}\{\sigma = \alpha\} \\
&\qquad = \mathbf{P}\{\xi_1 \in \Lambda_1, \dots, \xi_n \in \Lambda_n\}.
\end{aligned}$$

(Здесь и далее посредством $\mathbf{Pr}\{\cdots\}$ обозначается вероятность события $\{\cdots\}$ в тех случаях, когда отсутствие специального обозначения для распределения вероятностей на пространстве элементарных событий, к которому относится рассматриваемое событие, не может привести к недоразумению). Пусть

$\mathcal{K}^0$ — множество всех лексикографически упорядоченных матриц размеров $n \times n$;

y — случайная величина, являющаяся функцией от C со значениями в $\mathcal{K}^0$ такая, что $y(C) = C^0 (= CE_{\lambda(C)})$;

$\mathbf{P}_y$ — распределение вероятностей случайной величины y.

Рассмотрим пространство $\mathcal{K}^0 \times S_n$ с распределением вероятностей $\mathbf{P}_y \times \mathbf{P}_0$, где $\mathbf{P}_0$ — равномерное распределение на S_n. Для произвольной точки $(C^0, \alpha) \in \mathcal{K}^0 \times S_n$ положим $C' = C^0 E_\alpha$. Случайная величина C' имеет то же самое распределение, что и C. В самом деле, $C' = C^0 E_\alpha = CE_{\lambda(C)} E_\alpha = CE_{\lambda(C)\alpha}$. Поскольку α не зависит от C и имеет равномерное распределение, получаем

$$\mathbf{Pr}\{\lambda(C)\alpha = \pi,\ C \in \Lambda\} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{Pr}\{\lambda(C) = \sigma,\ \alpha = \sigma^{-1}\pi,\ C \in \Lambda\}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{Pr}\{\lambda(C) = \sigma,\ C \in \Lambda\} \mathbf{P}_0\{\alpha = \sigma^{-1}\pi\}$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{Pr}\{\lambda(C) = \sigma,\ C \in \Lambda\} = \frac{1}{n!}\, \mathbf{P}\{C \in \Lambda\},$$

т. е. случайная величина $\lambda(C)\alpha$ не зависит от C и имеет (что в данном случае несущественно) равномерное распределение. Теперь остается лишь сослаться на сделанное выше замечание.

В силу совпадения вероятностных распределений случайных величин C и C', утверждение леммы достаточно доказать для C'. Если $C' = C^0 E_\alpha$ является входом алгоритма $\mathcal{A}_{\text{ЗН}}$, то на его выходе будет получена с вероятностью $|S(C^0)|^{-1}$ некоторая подстановка β из множества $\lambda(C')S(C^0)\beta(C^0)$, совпадающего с $\alpha^{-1}S(C^0)\beta(C^0)$, так как $\lambda(C')$ и α^{-1} принадлежат одному и тому же левому классу смежности по подгруппе $S(C^0)$, т. е. $\alpha\lambda(C') \in S(C^0)$.

Рассмотрим произведение пространств $\langle \mathcal{K}^0 \times S_n,\ \mathbf{P}_y \times \mathbf{P}_0 \rangle$ и S_n с точками (C^0, α, β) и определим переходную вероятность (см. [8, с. 109]), положив

$$p(C^0, \alpha, \beta) = \begin{cases} |S(C^0)|^{-1}, & \text{если } \beta \in \alpha^{-1}S(C^0)\beta(C^0), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда вероятность получения на выходе алгоритма $\mathcal{A}_{\text{ЗН}}$ фиксированной подстановки π будет равна

$$\mathbf{P}_\beta(\pi) = \mathbf{Pr}\{\beta = \pi\} = \int\limits_{\mathcal{K}^0 \times S_n} p(C^0, \alpha, \pi)\mathbf{P}_y \times \mathbf{P}_0(dC^0, d\alpha)$$
$$= \int\limits_{\mathcal{K}^0} \int\limits_{S_n} p(C^0, \alpha, \pi)\mathbf{P}_0(d\alpha)\mathbf{P}_y(dC^0) = \int\limits_{\mathcal{K}^0} \sum_{\alpha \in S_n} p(C^0, \alpha, \pi)\ \frac{1}{n!}\mathbf{P}_y(dC^0)$$
$$= \frac{1}{n!} \int\limits_{\mathcal{K}^0} |S(C^0)|^{-1}\, |\{\alpha \colon \pi \in \alpha^{-1}S(C^0)\beta(C^0)\}| \mathbf{P}_y(dC^0)$$
$$= \frac{1}{n!} \int\limits_{\mathcal{K}^0} |S(C^0)|^{-1} |\{\alpha \colon \alpha \in S(C^0)\beta(C^0)\pi^{-1}\}| \mathbf{P}_y(dC^0)$$
$$= \frac{1}{n!} \int\limits_{\mathcal{K}^0} \mathbf{P}_y(dC^0) = \frac{1}{n!}.$$

Лемма 1 доказана.

Трудоемкость описанного алгоритма ограничена величиной $O(n^3)$ и определяется временем отыскания точного решения задачи о назначениях (см. этап 1, пункт 1.2). Алгоритм точного решения ЗН изложен в [9]. Остальные пункты алгоритма $\mathcal{A}$ реализуются с меньшей сложностью. Введем обозначения:

$F^*_{\text{ЗН}}(C)$, $F^*_{\text{ЗК}}(C)$ — оптимальные значения целевых функций в ЗН(C) и ЗК(C) соответственно;

$F_{\mathcal{A}}(C)$ — значение целевой функции в ЗК(C), полученное алгоритмом $\mathcal{A}$;

c^* — максимальный элемент матрицы C;

$m(C)$ — число циклов в перестановке $\beta = \beta(C)$, полученной алгоритмом $\mathcal{A}$.

Лемма 2. *Для алгоритма $\mathcal{A}$ при решении* ЗК(C) *справедлива следующая оценка относительной погрешности* :

$$\varepsilon_{\mathcal{A}} \leqslant \frac{m(C) \cdot c^*}{F^*_{\text{ЗН}}(C)}.$$

Доказательство. Учитывая, что $F^*_{\text{ЗК}}(C) \geqslant F^*_{\text{ЗН}}(C)$ и

$$F_{\mathcal{A}}(C) = F^*_{\text{ЗН}}(C) + \sum_{k=1}^{m(C)} \left(c_{i_k\pi(i_k)} - c_{i_k\beta(i_k)}\right),$$

получаем

$$\varepsilon_{\mathcal{A}} = \frac{F_{\mathcal{A}}(C) - F^*_{\text{ЗК}}(C)}{F^*_{\text{ЗК}}(C)} \leqslant \frac{F_{\mathcal{A}}(C) - F^*_{\text{ЗН}}(C)}{F^*_{\text{ЗН}}(C)}$$
$$= \frac{\sum_{k=1}^{m(C)} \left(c_{i_k\pi(i_k)} - c_{i_k\beta(i_k)}\right)}{F^*_{\text{ЗН}}(C)} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{m(C)} c^*}{F^*_{\text{ЗН}}(C)} = \frac{m(C) \cdot c^*}{F^*_{\text{ЗН}}(C)}.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Число циклов в перестановке $\beta(C)$ не превышает $2\ln n$ с вероятностью, стремящейся к 1 с ростом n.*

Доказательство. Следуя методу из [7, т. 1, с. 264], число циклов $m(C)$ в случайной перестановке можно представить в виде суммы $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ взаимно независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, распределенных по закону Бернулли: $\mathbf{Pr}(X_k = 1) = 1/k$ и $\mathbf{Pr}(X_k = 0) = 1-1/k$

с математическим ожиданием $\mathbf{M}X_k = 1/k$ и дисперсией $\sigma_k^2 = (k-1)/k^2$. Следовательно,

$$\mathbf{M}Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n + 1, \qquad \mathbf{D}Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k^2} \leqslant \ln n - 1.$$

С помощью неравенства Чебышева получаем

$$\mathbf{Pr}\{Y_n > 2\ln n\} \leqslant \mathbf{Pr}\{|Y_n - \mathbf{M}Y_n| > \ln n - 1\} \leqslant \frac{1}{\ln n - 1} \to 0$$

при $n \to \infty$. Лемма 3 доказана.

Оценку скорости сходимости к нулю вероятности $\mathbf{Pr}\{Y_n > 2\ln n\}$ можно существенно улучшить, воспользовавшись теоремой Петрова [10, с. 81] о вероятностях больших уклонений.

Лемма 4. *Справедливо соотношение*

$$\mathbf{Pr}\{m(C) > 2\ln n\} \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^{0,38}.$$

Доказательство. Покажем, что при постоянных $T = 0,76$ и $g_k = 1,31\sigma_k^2$, $k = 1,\dots,n$, для случайных величин $Z_k = X_k - \mathbf{M}X_k$ справедливы условия теоремы Петрова:

$$\mathbf{M}\mathrm{e}^{tZ_k} \leqslant \exp\left(\frac{g_k t^2}{2}\right)$$

при всех $k = 1,\dots,n$ и $0 \leqslant t \leqslant T$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\ln \mathbf{M}\mathrm{e}^{tZ_k} &\leqslant \mathbf{M}\mathrm{e}^{tZ_k} - 1 = \frac{1}{k}\exp\left(t\left(1-\frac{1}{k}\right)\right) + \left(1-\frac{1}{k}\right)\exp\left(-\frac{t}{k}\right) - 1 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!}\left[\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^i + \left(1-\frac{1}{k}\right)\left(-\frac{1}{k}\right)^i\right] \\
&= \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i}{i!}\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)^{i-1} - \left(-\frac{1}{k}\right)^{i-1}\right] \leqslant \sigma_k^2 \sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i}{i!} \\
&= \frac{\sigma_k^2 t^2}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t^2/2} \leqslant \frac{\sigma_k^2 t^2}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^T - 1 - T}{T^2/2} \leqslant 1,31\frac{\sigma_k^2 t^2}{2} = \frac{g_k t^2}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, требуемые условия выполнены для любых $k = 1, \ldots, n$ и $0 \leqslant t \leqslant T$. Отсюда с учетом

$$G = \sum_{k=1}^{n} g_k = 1,31 \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = 1,31\mathbf{D}Y_n \leqslant 1,31(\ln n - 1),$$

$GT \leqslant \ln n - 1$ и неравенства $\mathbf{Pr}\{Y_n - \mathbf{M}Y_n > \varphi\} \leqslant \exp(-T\varphi/2)$, справедливого при $\varphi \geqslant GT$, имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{Pr}\{Y_n > 2\ln n\} \leqslant \mathbf{Pr}\{Y_n - \mathbf{M}Y_n > \ln n - 1\} \\ &\qquad \leqslant \exp\left(-\frac{0,76(\ln n - 1)}{2}\right) = \exp(-0,38(\ln n - 1)) = \left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^{0,38}, \end{aligned}$$

т. е. $\mathbf{Pr}\{m(C) > 2\ln n\} \leqslant (\mathrm{e}/n)^{0,38}$. Лемма 4 доказана.

- Следуя [1], говорим, что алгоритм $\mathcal{A}$ *удовлетворяет оценкам* $(\varepsilon_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$ на классе задач ЗК(C), если выполнено неравенство

  $$\mathbf{Pr}\{F_{\mathcal{A}}(C) > (1 + \varepsilon_{\mathcal{A}})F^*_{\text{ЗК}}(C)\} \leqslant \delta_{\mathcal{A}},$$

  где $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ — относительная погрешность, получаемая в результате работы алгоритма $\mathcal{A}$, и $\delta_{\mathcal{A}}$ — вероятность несрабатывания алгоритма $\mathcal{A}$.

- Алгоритм $\mathcal{A}$ называем *асимптотически точным* на классе ЗК(C), если существуют оценки $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ и $\delta_{\mathcal{A}}$, стремящиеся к нулю с ростом размерности задачи.

Теорема 1. *Алгоритм $\mathcal{A}$ для решения* ЗК(C) *относительно рассматриваемого класса распределений $\mathcal{P}$ на множестве матриц имеет следующие оценки относительной погрешности и вероятности несрабатывания:*

$$\varepsilon_{\mathcal{A}} = \frac{2c^* \ln n}{F^*_{\text{ЗН}}(C)}, \qquad \delta_{\mathcal{A}} = \left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^{0,38}.$$

Доказательство. Покажем, что при таком выборе оценок для $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ и $\delta_{\mathcal{A}}$ справедливо соотношение

$$\mathbf{Pr}\left\{F_{\mathcal{A}}(C) > (1 + \varepsilon_{\mathcal{A}})F^*_{\text{ЗК}}(C)\right\} \leqslant \delta_{\mathcal{A}}.$$

Из леммы 2 следует, что

$$F_{\mathcal{A}}(C) \leqslant \left(1 + \frac{m(C)c^*}{F^*_{\text{ЗН}}(C)}\right) F^*_{\text{ЗК}}(C),$$

откуда с учетом леммы 4 имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{Pr}\{F_{\mathcal{A}}(C) > (1+\varepsilon_{\mathcal{A}})F^*_{\text{ЗК}}(C)\} \\ \leqslant \mathbf{Pr}\left\{\left(1+\frac{m(C)c^*}{F^*_{\text{ЗН}}(C)}\right)F^*_{\text{ЗК}}(C) > (1+\varepsilon_{\mathcal{A}})\,F^*_{\text{ЗК}}(C)\right\} \\ = \mathbf{Pr}\left\{\frac{m(C)c^*}{F^*_{\text{ЗН}}(C)} > \varepsilon_{\mathcal{A}}\right\} = \mathbf{Pr}\left\{m(C) > 2\ln n\right\} \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^{0{,}38} = \delta_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Алгоритм $\mathcal{A}$ для рассматриваемой ЗК(C) с дополнительным условием $a_n \leqslant c_{ij} \leqslant b_n$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, $i \neq j$, $a_n > 0$, асимптотически точен, если*

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\psi(n)} \cdot \frac{n}{\ln n},$$

где $\psi(n)$ — произвольная растущая функция, $\psi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $\delta_{\mathcal{A}} \to 0$ при $n \to \infty$, а с учетом $F^*_{\text{ЗН}}(C) \geqslant na_n$ и $c^* \leqslant b_n$ получаем

$$\varepsilon_{\mathcal{A}} \leqslant \frac{2c^* \ln n}{F^*_{\text{ЗН}}(C)} \leqslant \frac{2b_n \ln n}{na_n}.$$

Следовательно, в условиях рассматриваемой теоремы относительная погрешность $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ также стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, алгоритм $\mathcal{A}$ асимптотически точен.

Заметим, что описанный выше подход может быть применен и для приближенного решения ЗК на максимум длины обхода. В этом случае алгоритм приближенного решения этой задачи основан на использовании точного решения соответствующей задачи о назначениях при условии, что $\sum_{i=1}^{n} c_{i\sigma(i)}$ принимает максимально возможное значение.

Трудоемкость и оценки качества алгоритма приближенного решения ЗК на максимум длины обхода остаются такими же, как и для рассмотренной в статье задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Перепелица В. А.** Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. М., 1976. Вып. 31. С. 35–42.

2. **Перепелица В. А., Гимади Э. Х.** К задаче нахождения минимального гамильтонова контура на графе с взвешенными дугами // Дискретный анализ. Новосибирск, 1969. Вып. 15. С. 57–65.

3. **Гимади Э. Х., Перепелица В. А.** Асимптотический подход к решению задачи коммивояжера // Управляемые системы. Новосибирск, 1974. Вып. 12. С. 35–45.
4. **Гимади Э. Х.** О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов // Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сиб. отд-ние. 1988. Т. 10. С. 89–115.
5. **The traveling** salesman problem / A Guided Tour of Combinatorial Optimization. New York: Wiley, 1985.
6. **Пападимитриу Х., Стайглиц К.** Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.
7. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. Т. 1, 2.
8. **Невё Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
9. **Диниц Е. А., Кронрод М. А.** Один алгоритм решения задачи о назначении // Докл. АН СССР. 1969. Т. 189, № 1. С. 23–25.
10. **Петров В. В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.

Адрес авторов:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики СО РАН

Статья поступила

15 марта 1994 г.