СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ
Апрель – июнь 1994. Том 1, № 2, 18–39

УДК 519.8

РЕГУЛЯРНЫЕ РАЗБИЕНИЯ И ОТСЕЧЕНИЯ В ЦЕЛОЧИСЛЕННОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ*)

А. А. Колоколов

В области целочисленного программирования (ЦП) автором работы (см., например, [1–22]) предложен и развивается подход, основанный на использовании регулярных разбиений релаксационных множеств задач ЦП. С его помощью описаны и исследованы новые классы отсечений, найдены верхние и нижние оценки числа итераций (отсечений) для дробных алгоритмов отсечения (в том числе для некоторых алгоритмов Гомори), верхние оценки числа итераций для ряда алгоритмов лексикографического перебора, ветвей и границ, предложены алгоритмы решения и анализа задач ЦП, использующие структуру разбиения множеств на L-классы, проведены экспериментальные исследования. В данной работе дается обзор результатов, полученных в указанном направлении. Рассматриваются в основном полностью целочисленные задачи. Кроме того, приводится ряд новых результатов, относящихся к задачам булева программирования (БП). Этой проблематике посвящены обзор [11] и один из разделов книги [23], в которых в основном рассматривается L-разбиение.

§ 1. Регулярные разбиения

Пусть Ω — непустое замкнутое множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, $Z^{n,k}$ — множество всех вещественных n-векторов, в которых первые k ($k \geqslant 1$) координат являются целыми. Если $k = n$, то $Z^{n,k}$ совпадает с множеством всех целочисленных векторов и обозначается через Z^n. Предположим, что Ω имеет лексикографически максимальный элемент x^*. Рассмотрим задачу ЦП следующего вида: в множестве $(\Omega \cap Z^{n,k})$ найти лексикографически максимальную точку z_*, т. е. найти

$$z_* = \operatorname{lex\,max}(\Omega \cap Z^{n,k}). \tag{1.1}$$

- Любой вектор из $(\Omega \cap Z^{n,k})$ называется *допустимым решением*, а z_* — *оптимальным.* Оптимальное решение задачи (1.1) единственно (если оно существует). Множество Ω называется *релаксационным.*

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-012-557).

В данной работе основное внимание уделяется полностью целочисленным задачам, т. е. задачам (1.1) при $k = n$: найти

$$z_* = \operatorname{lex\,max}(\Omega \cap Z^n). \tag{1.2}$$

Для обеспечения существования z_* при $\Omega \cap Z^{n,k} \neq \varnothing$ будем использовать ограниченные сверху множества Ω, т. е. множества, для которых имеется $d \in \mathbb{R}^n$ такое, что $x \leqslant d$ для всех $x \in \Omega$. Класс замкнутых ограниченных сверху множеств обозначим через K^B.

При исследовании задачи (1.1) и методов ее решения важную роль играет множество

$$\Omega_* = \{x \in \Omega \mid x \succ z \text{ при всех } z \in (\Omega \cap Z^{n,k})\},$$

которое называется *дробным накрытием* для (1.2). Здесь и в дальнейшем $\succ$, $\succcurlyeq$ — символы лексикографического сравнения. Ясно, что если $x^* \in Z^{n,k}$, то $\Omega_* = \varnothing$. Если же $\Omega \cap Z^{n,k} = \varnothing$, то $\Omega_* = \Omega$. Выделение дробного накрытия в релаксационном множестве связано с тем, что в интересующих нас методах ЦП осуществляется последовательное исключение точек из Ω_*, т. е. такие методы можно рассматривать как определенные способы «снятия» дробного накрытия.

Описываемый подход применим к лексикографическим и обычным постановкам задач ЦП. Его идея состоит в выделении класса регулярных разбиений F, которые определяются следующим образом:

(а) каждая точка $z \in Z^n$ образует отдельный класс разбиения, остальные классы состоят только из нецелочисленных точек и называются *дробными*;

(б) если X — ограниченное множество, то фактор-множество X/F конечное;

(в) для любых $X \subset \mathbb{R}^n$ и $z \in Z^n$ имеет место равенство $(X + z)/F = (X/F) + z$.

В качестве примера регулярного разбиения на плоскости может служить разбиение, элементами которого являются

— целочисленные точки;

— внутренние точки каждого единичного квадрата стороны которого параллельны осям координат, а вершины целочисленны;

— внутренние точки каждого вертикального или горизонтального отрезка единичной длины с целочисленными концами.

Условие (а) связано с тем, что во многих алгоритмах используются процедуры их исключения, при этом сохраняются допустимые решения задачи ЦП. Условие (б) вызвано необходимостью гарантировать конечность алгоритмов для ограниченных множеств, а условие (в) — сохранением структуры разбиения при сдвиге на целочисленный вектор (в частности, оно используется при изучении вопросов периодичности дробных накрытий и оптимальных решений [17, 18]).

Следует отметить, что в ряде случаев полезными могут оказаться разбиения, определенные лишь для некоторой части пространства $\mathbb{R}^n$.

В терминах регулярных разбиений измеряется «объем» дробного накрытия задачи ЦП, изучается строение релаксационных множеств, описываются классы отсечений, определяется их глубина, разрабатываются и сравниваются алгоритмы, анализируются последовательности приближений, строятся оценки числа итераций и отсечений, проводятся экспериментальные исследования алгоритмов и тестовых задач.

Аналогичный класс разбиений для частично целочисленных задач описан в [15].

- Элементы из X/F будем называть *F-классами*, а множество Ω_*/F — *F-накрытием* задачи.

  Допустим, что $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $x \succ y$.

- Будем говорить, что векторы x и y *отделимы*, если имеется $z \in Z^n$ такое, что $x \succcurlyeq z \succcurlyeq y$ (точку z назовем *отделяющей*). В противном случае векторы x и y называются *неотделимыми*.

  Пусть X, Y — непустые множества из $\mathbb{R}^n$.

- Будем говорить, что X *лексикографически больше* Y ($X \succ Y$), если $x \succ y$ для любых $x \in X$, $y \in Y$.
- Будем говорить, что регулярное разбиение F *согласовано с лексикографическим порядком*, если отношение лексикографического сравнения множеств является линейным порядком в $\mathbb{R}^n/F$.
- Векторы $x, y \in \mathbb{R}^n$ ($x \neq y$) называются *L-эквивалентными*, если x и y неотделимы.

Легко проверяется, что тем самым пространство $\mathbb{R}^n$ разбивается на классы эквивалентности. Такое разбиение называется *L-разбиением*. Отметим следующие свойства L-разбиения:

1) L-разбиение является регулярным;

2) любой дробный класс $V \in \mathbb{R}^n/L$ представим в виде

$$V = \{x \mid x_1 = a_1, \dots, x_{r-1} = a_{r-1}, a_r < x_r < a_r + 1\},$$

где a_i, $i = 1, \dots, r$, — произвольные целые числа, $1 \leqslant r \leqslant n$;

3) L-разбиение согласовано с лексикографическим порядком, и, следовательно, для ограниченного X имеет место

$$X/L = \{V_1, \dots, V_p\}, \quad V_i \succ V_{i+1}, \quad i = 1, \dots, p-1.$$

Если взять по одному представителю из каждого $V \in X/L$, то получится дискретное множество, любые элементы которого отделимы. С помощью таких множеств были построены верхние оценки числа отсечений для первого алгоритма Гомори [24, 25].

Отметим также, что разбиение множества на L-классы существенно зависит от упорядочения координат в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим примеры других регулярных разбиений. Класс кубических разбиений тесно связан с «округлениями» нецелочисленных точек. Пусть $B^n = \{x \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1,\dots,n\}$, $\delta = (\delta_1,\dots,\delta_n)$ — булев вектор и $x = (x_1,\dots,x_n)$ — произвольный элемент из $\mathbb{R}^n$.

- *Округлением* вектора x в соответствии с δ назовем вектор $z = (z_1,\dots,z_n) = \delta(x)$ такой, что

$$z_i = \begin{cases} \lfloor x_i \rfloor, & \text{если } \delta_i = 0, \\ \lceil x_i \rceil, & \text{если } \delta_i = 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Из определения следует, что возможны 2^n различных округлений. В вопросах отделимости важную роль играют специальные пары округлений. Векторы δ и δ^* называются *взаимными*, если $\delta + \delta^* = e_n$, где $e_n = (1,\dots,1)$. Если x и y отделимы, то одна из отделяющих их точек содержится в множестве $\Delta = \{\delta(x), \delta(y), \delta^*(x), \delta^*(y)\}$ [9].

Пусть δ — произвольный булев вектор.

- Разбиение называется *кубическим*, если каждая точка $z \in Z^n$ образует отдельный класс разбиения, а нецелочисленные точки x и y являются δ-эквивалентными, т. е. $\delta(x) = \delta(y)$.

С помощью взаимных векторов удобно ввести более мелкое каноническое разбиение K, которое оказывается полезным при исследовании алгоритмов. Пусть δ и δ^* — взаимные векторы.

- Точки x и y называются *K-эквивалентными*, если $\delta(x) = \delta(y)$, $\delta^*(x) = \delta^*(y)$.

Указанные разбиения можно задавать с помощью систем линейных уравнений и неравенств. Сначала введем разбиение F_0 пространства $\mathbb{R}^n$ на два класса: Z^n и $\mathbb{R}^n_f = \mathbb{R}^n \backslash Z^n$. Очевидно, что F_0 является регулярным. Каждому уравнению $(g, x) = g_0$, $g \neq 0$, поставим в соответствие разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ на три части:

$$G^- = \{x \mid (g,x) < g_0\}, \quad G = \{x \mid (g,x) = g_0\}, \quad G^+ = \{x \mid (g,x) > g_0\}.$$

Неравенство $(g, x) \leqslant g_0$ разбивает $\mathbb{R}^n$ на множества G^+ и $G \cup G^-$, а неравенство $(g, x) \geqslant g_0$ — на G^- и $G \cup G^+$.

- Будем говорить, что *разбиение F порождается совокупностью разбиений* $\{F_j\}$, $j \in J$ (J — конечное или счетное), если любой класс множества $\mathbb{R}^n/F$ можно представить в виде пересечения некоторых элементов из $\mathbb{R}^n/F_j$, $j \in J$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

1. Каноническое разбиение порождается разбиениями, которые задаются уравнениями $x_i = a_i$ при всех $a_i \in Z$, $i = 1,\dots,n$. Пример такого разбиения для плоскости был рассмотрен выше.

2. Любое кубическое разбиение, задаваемое вектором δ, порождается разбиением F_0 и множеством разбиений, порождаемых системой неравенств

$$\begin{aligned} &x_i \geqslant a_i, \quad \text{если } \delta_i = 0 \text{ при всех } a_i \in Z,\\ &x_i \leqslant a_i, \quad \text{если } \delta_i = 1 \text{ для каждого } a_i \in Z, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

3. L-разбиение строится методом последовательных подразбиений. Сначала пространство $\mathbb{R}^n$ разбивается в соответствии с уравнениями

$$x_1 = a_1 \text{ при всех } a_1 \in Z, \tag{1.3}$$

затем с помощью уравнений

$$x_2 = a_2 \text{ при всех } a_2 \in Z$$

разбиваются гиперплоскости, отвечающие уравнениям (1.3), а слои между гиперплоскостями остаются без изменения. Далее, с помощью уравнений

$$x_3 = a_3 \text{ при всех } a_3 \in Z$$

разбиваются множества, порождаемые системой $x_i = a_i$ при всех $a_i \in Z$ ($i = 1, 2$), остальные части пространства остаются без изменения. Процесс повторяется до тех пор, пока не получатся целочисленные точки.

Ясно, что дробный L-класс может содержать бесконечное число элементов канонического и кубического разбиений. Вместе с тем имеет место

Теорема 1.1 [9]. *Допустим, что $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и вектор δ определяет некоторое кубическое разбиение. Тогда любой дробный класс множества X/δ состоит не более чем из n L-классов.*

Данная оценка является точной. Из нее вытекает, что $|X/L| \leqslant n|X/\delta|$.

Рассмотрим согласованность разбиений с лексикографическим порядком (см. [15]). Ясно, что каноническое и кубические разбиения, вообще говоря, не обладают указанным свойством.

Теорема 1.2 [15]. *Пусть разбиение F пространства $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (а) из определения регулярного разбиения и согласовано с лексикографическим порядком. Тогда F либо совпадает с L-разбиением, либо является его измельчением.*

Важное место в исследовании алгоритмов ЦП занимает анализ порождаемых последовательностей приближений на основе лексикографии и разбиений пространства.

- Последовательность S векторов из $\mathbb{R}^n$ называется *F-регулярной*, если любой класс из $\mathbb{R}^n/F$ содержит не более одного члена из S.

С помощью округлений получены верхние оценки числа элементов L-регулярной последовательности, которые были использованы при построении верхних оценок числа итераций (отсечений) для первого алгоритма Гомори [24, 25].

§ 2. L-комплексы

Для построения алгоритмов и нахождения оценок числа итераций (отсечений) необходимо более детально исследовать структуру разбиений множеств (в частности, релаксационных многогранников задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП)) на L-классы, т. е. их L-структуру. Кроме того, эти вопросы имеют и самостоятельный интерес. Они рассматривались, например, в [3, 6, 9, 12, 15, 18].

Пусть X — произвольное непустое подмножество из $\mathbb{R}^n$ и $X_0 = X \cap Z^n$.

- Подмножество Q дробных классов из X/L называется *L-комплексом*, если для любых V, $V' \in Q$ ($V \not\succ V'$) не существует точки $z \in X_0$ такой, что $V \succ z \succ V'$. L-комплекс, который не является собственным подмножеством некоторого другого L-комплекса, называется *полным*.

Через $C(X)$ обозначим совокупность всех L-комплексов, порождаемых множеством X. Для характеризации степени «дробности» множеств введем функцию

$$\Psi(X) = \max\{|Q| \mid Q \in C(X)\}.$$

Ясно, что Ω_*/L является L-комплексом и $|\Omega_*/L| \leqslant \Psi(\Omega)$. Поэтому для множеств с малыми значениями $\Psi(\Omega)$ задача (1.2) решается достаточно легко. Отметим ряд свойств этой функции.

1. Если X ограничено, то $\Psi(X) < +\infty$.

2. Для некоторых классов множеств значения $\Psi(X)$ ограничены сверху константой или подходящей функцией от n. Так, если X содержится в параллелепипеде $P = \{x \mid a_j \leqslant x_j \leqslant a'_j,\ j = 1, \dots, n\}$ ($a_j, a'_j \in Z$), то $|\Psi(X)| \leqslant |P_0| - 1$.

3. При переупорядочении координат значения $\Psi(X)$ могут существенно изменяться.

Имеются классы выпуклых множеств, у которых значения $\Psi(X)$ ограничены сверху размерностью пространства $\mathbb{R}^n$. Положим

$$M(A, b) = \{x \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\},$$

где A — матрица размеров $(m \times n)$, а b — m-вектор.

Теорема 2.1 [9]. *Если $A \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то*

$$\Psi(M(A,b)) \leqslant n. \tag{2.1}$$

Оценка (2.1) является точной, например, на симплексе, определяемом неравенствами $2(e_n, x) \leqslant 1$, $x \geqslant 0$. Аналогичная оценка справедлива и для системы $Ax \geqslant b$, $x \geqslant 0$, с неотрицательными коэффициентами. Условие неотрицательности коэффициентов матрицы A можно несколько ослабить [9]. В [3] показано, что похожей L-структурой обладает релаксационное множество в задаче размещения объектов на линии.

Приведем пример многогранника, имеющего «мощные» комплексы дробных L-классов [9]. (Такие многогранники естественным образом возникают в задачах ЦП, не имеющих целочисленных решений.) Пусть $n \geqslant 2$, q нечетно и $1 \leqslant q \leqslant 2n$. Тогда многогранник M задается следующим образом:

$$M = \left\{x \,\middle|\, x \in B^n,\ 2\sum_{j=1}^{n} x_j = q\right\}.$$

Такой многогранник был использован Р. Джерослоу в контрпримере для метода ветвей и границ. Нами показано, что

$$|M/L| \geqslant 2\binom{n-1}{\lfloor q/2 \rfloor}. \tag{2.2}$$

Для некоторых классов множеств при лексикографическом порядке имеет место чередование целочисленных точек и дробных L-классов. При изучении таких классов используется следующее понятие.

- Множество X имеет *альтернирующую L-структуру*, если выполняются следующие условия:
  1) $\Psi(X) \leqslant 1$;
  2) максимальный и минимальный элементы в лексикографическом порядке множества X/L являются целочисленными (если они существуют);
  3) для любых $z, z' \in X_0$ $(z \succ z')$ существует $V \in X/L$ такой, что $z \succ V \succ z'$.

Для выпуклых множеств достаточно рассматривать условия 1, 2.

Нетрудно установить, что при заданных целочисленных α, β и d_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ параллелепипед P, симплекс $S = \{x \mid \sum_{j=1}^{n} x_j \leqslant \beta,\ x_j \geqslant d_j,\ j = 1, \ldots, n\}$, слой $C = \{x \mid \alpha \leqslant \sum_{j=1}^{n} x_j \leqslant \beta\}$ и множество $C \cap P$ имеют альтернирующую L-структуру. В общем случае при пересечении множеств свойство альтернируемости не сохраняется.

Альтернирующая L-структура используется при разработке алгоритмов и нахождении оценок мощности L-накрытий и числа итераций

алгоритмов. Оказалось, что альтернирующую L-структуру имеют релаксационные множества в задачах об упаковке и покрытии множеств, в задачах стандартизации и т. д. [9, 11–13, 15]. Будем говорить, что *точка z касается дробного L-класса V сверху* (*снизу*), если $z_i = x_i$, $i = 1, \dots, r-1$, $z_r = \lceil x_r \rceil$ ($z_r = \lfloor x_r \rfloor$) для представителя $x \in V$, где r — номер первой дробной координаты в векторах из класса V.

Теорема 2.2 [12]. *Выпуклое множество X имеет альтернирующую L-структуру тогда и только тогда, когда для любого дробного класса из X/L существуют касающиеся его сверху и снизу точки множества $X \cap Z^n$.*

На основе этой теоремы исследована L-структура множества, задаваемого системой

$$\begin{aligned} &A^1x^1 + A^2x^2 \leqslant b, \\ &x^1 \geqslant 0, \quad x^2 \geqslant 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где A^1 — матрица размеров $(m \times n_1)$, A^2 — матрица размеров $(m \times n_2)$, x^1 — n_1-вектор, x^2 — n_2-вектор, b — m-вектор, $n_1, n_2 \geqslant 0$.

Теорема 2.3 [12]. *Если матрица A^1 абсолютно унимодулярна, матрица A^2 булева, а вектор b целочисленный, то выпуклое многогранное множество, определяемое системой* (2.3), *имеет альтернирующую L-структуру.*

Выше предполагалось, что в векторе x сначала идут координаты вектора x^1, а затем вектора x^2. Если матрица A^1 булева, а A^2 абсолютно унимодулярна, то свойство альтернируемости может нарушиться.

Рассмотрим вопрос о связи множества дробных вершин релаксационного многогранника задачи ЦЛП с L-комплексами. Для общей задачи ЦЛП порождение мощных L-комплексов не обязательно связано с наличием большого числа дробных вершин этого многогранника. В случае БП ситуация оказалась иной [21, 22].

Пусть M — выпуклый многогранник в B^n.

- Класс $V \in M/L$ называется *существенным*, если найдется лексикографически максимальный или минимальный элемент $x \in V$.

Теорема 2.4 [22]. *В любом полном L-комплексе мощности p из $C(M)$ содержится не менее $\lfloor p/2 \rfloor$ существенных классов.*

Из теоремы следует, что мощные L-комплексы могут порождаться только при большом числе дробных вершин многогранника M. В следующем параграфе эта теорема используется для нахождения оценок мощности L-накрытий и числа итераций. Имеются примеры множеств, у которых все L-классы являются существенными (см., например, [22]).

Пусть $M(A, b)$ — выпуклое многогранное множество, где A абсолютно унимодулярна и $b \in Z^m$. Хорошо известно, что при этих условиях $M(A, b)$ является целочисленным, т. е. все его вершины имеют лишь целочисленные координаты. Поэтому естественно возникает вопрос, как целочисленность выпуклых многогранных множеств связана с альтернируемостью L-структуры. В общем случае легко строятся примеры целочисленных многогранных множеств, которые не обладают такой структурой. Однако для задач БП из теоремы 2.4 вытекает следующая

Теорема 2.5. *Любое целочисленное многогранное множество из B^n имеет альтернирующую L-структуру.*

§ 3. Верхние оценки мощности L-накрытий

Общим методом нахождения верхних оценок для Ω_*/L через исходные параметры задач ЦП является погружение Ω_* в различные множества с последующей оценкой числа целочисленных точек в них. Предположим, что дробное накрытие задачи (1.2) содержится в ограниченном множестве X. Тогда, исходя непосредственно из определений, нетрудно проверить, что

— $|\Omega_*/L| \leqslant \Psi(X)(|X_0| + 1)$;

— если X имеет альтернирующую L-структуру и $X_0 \neq \varnothing$, то $|\Omega_*/L| \leqslant |X_0| - 1$;

— если $A \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $X = M(A, b)$, то $|\Omega_*/L| \leqslant n|X_0|$.

Мы применяли погружения дробных накрытий задач ЦП в выпуклые многогранники (параллелепипеды, симплексы, слои и другие), для которых относительно легко строятся оценки числа целочисленных точек [7, 9, 11, 13, 15, 18]. Например, в случае, когда $X = P$, справедливо неравенство

$$|\Omega_*/L| \leqslant -1 + \prod_{j=1}^{n}(a'_j - a_j + 1).$$

Следовательно, для Ω_* из B^n выполняется неравенство $|\Omega_*/L| \leqslant 2^n - 1$. Можно построить примеры множеств X и Ω, для которых указанные оценки достигаются.

Многогранник задачи Джерослоу не содержит целочисленных точек и поэтому совпадает с дробным накрытием. Отсюда вытекает, что в этом многограннике для L-накрытия имеет место нижняя оценка (2.2).

Перейдем к установлению верхних оценок мощности L-накрытия задачи ЦЛП вида: найти максимум функции

$$f_0(x) = (c, x) \tag{3.1}$$

при условиях

$$Ax \leqslant b, \qquad x \geqslant 0, \tag{3.2}$$

$$x_j \in Z, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Здесь A — матрица размеров $(m \times n)$, c — n-вектор $(c \neq 0)$, b — m-вектор, причем все исходные данные задачи предполагаются целочисленными.

Лексикографическая задача, соответствующая (3.1)–(3.3), отличается тем, что в ней среди оптимальных решений ищется лексикографически максимальное решение. Обозначим его через z'' (если оно существует). Пусть $M \neq \varnothing$ — множество, определяемое системой (3.2), $x' = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ и $M' = \{x' \in R^{n+1} \mid x_0 - (c, x) = 0,\ x \in M\}$. Тогда соответствующая ей задача (1.2) имеет вид: найти

$$z_* = \operatorname{lex\,max}(M' \cap Z^{n+1}).$$

Введем множество

$$M'' = \begin{cases} M, & \text{если } M_0 = \varnothing, \\ M_1 \cup M_2, & \text{если } M_0 \neq \varnothing, \end{cases}$$

где $M_1 = \{x \in M \mid (c, x) \geqslant (c, z'')\}$, $M_2 = \{x \in M \mid (c, x) = (c, z''),\ x \succ z''\}$. Предположим, что M'' ограничено, x'' — оптимальное решение задачи линейного программирования (ЛП) (3.1)–(3.2), $\mu = (c, x'')$ и $\nu = \inf\{(c, x) \mid x \in M''\}$. Любая точка x' из M'_* удовлетворяет условиям

$$\nu \leqslant x_0 \leqslant \mu, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in M''.$$

Нетрудно установить связь между мощностями M'_*/L и M''/L:

$$|M'_*/L| \leqslant 1 + (\lfloor \mu \rfloor - \lceil \nu \rceil + 1)(|M''/L| + 1). \tag{3.4}$$

Для этого выделим в M'_*/L классы, для которых $x_0 \neq \lfloor x_0 \rfloor$; их не более $(\lfloor \mu \rfloor - \lceil \nu \rceil + 2)$. Остальные L-классы соответствуют целым значениям x_0 между ν и $[\mu]$, которых не более $(\lfloor \mu \rfloor - \lceil \nu \rceil + 1)$. Для каждого целого $x_0 = s$ определим $M''(s) = \{x \in M'' \mid (c, x) = s\}$. Так как $M''(s) \subseteq M''$, имеем $|M''(s)/L| \leqslant |M''/L|$. Поэтому дробных L-классов с целым значением x_0 в M'_*/L не более $(\lfloor \mu \rfloor - \lceil \nu \rceil + 1)\,|M''/L|$. Вместе с L-классами, для которых $x_0 \neq \lfloor x_0 \rfloor$, получаем требуемую оценку.

Если $M_0 \neq \varnothing$, то правую часть неравенства (3.4) можно уменьшить на единицу. Легко строятся примеры задач, для которых эта оценка достигается.

Для построения верхних оценок мощности L-накрытий задач ЦЛП через исходные параметры задачи применим погружение M'' в многогранники. Сначала рассмотрим случай погружения в параллелепипед.

Теорема 3.1 [15]. *Пусть в полностью целочисленной задаче ЦЛП (3.1)–(3.3) все исходные данные целочисленные и множество M'' лежит в параллелепипеде P. Тогда*

$$|M'_*/L| \leqslant 1 + (\lfloor\mu\rfloor - \lceil\nu\rceil + 1)\prod_{j=1}^{n}(a'_j - a_j + 1).$$

Имеются задачи БП, мощность L-накрытия которых превышает 2^n [9].

Отметим, что в случае, когда можно указать нижние и верхние границы значений для всех переменных x_j, величина $\lfloor\mu\rfloor - \lceil\nu\rceil$ легко оценивается сверху через исходные параметры задачи. Например, если $0 \leqslant c_j \leqslant c'$ $(j = 1,\dots,n,\ c' \geqslant 1)$ и $M'' \subset P$, то указанная величина не превышает $c'\sum_{j=1}^{n}(a'_j - a_j)$.

Для общей задачи ЦЛП с этой целью можно использовать известные верхние оценки для расстояния между оптимальными решениями задачи ЦЛП и соответствующей задачи ЛП [26]. Для специальных классов задач удается находить более точные оценки.

Приведем пример погружения в симплекс для полностью целочисленной задачи (3.1)–(3.3) с неотрицательными целочисленными исходными данными. Пусть все столбцы матрицы A и вектор b ненулевые. Релаксационный многогранник этой задачи, а следовательно, и множество M'' содержатся в симплексе

$$S' = \Big\{x \,\Big|\, \sum_{j=1}^{n} x_j \leqslant b',\quad x_j \geqslant 0,\ j = 1,\dots,n\Big\},\qquad b' = \sum_{i=1}^{m} b_i.$$

Так как S' имеет альтернирующую L-структуру,

$$|M''/L| \leqslant |S'_0| - 1.$$

Теорема 3.2 [15]. *Для L-накрытия многомерной задачи о рюкзаке (с целочисленными исходными данными) справедлива оценка*

$$|M'_*/L| \leqslant (\lfloor\mu\rfloor - \nu + 1)(1+n)^{b'}. \tag{3.5}$$

Для оптимального решения x'' соответствующей задачи ЛП имеем $\lfloor x''\rfloor \in M$. Поэтому

$$\lfloor\mu\rfloor - \nu + 1 \leqslant c'n. \tag{3.6}$$

Оценки (3.5), (3.6) показывают, что при ограниченных c и b мощность L-накрытия может увеличиваться лишь полиномиально вместе с ростом числа переменных задачи.

Для одномерной задачи о рюкзаке со специальным порядком переменных получена верхняя оценка, которая не зависит от правой части [18]. Ее вывод основывается на свойстве периодичности дробных

накрытий и оптимальных решений. В [17] изучалась указанная периодичность для задачи ЦП на конусе.

Рассмотрим задачу об упаковке множества, в которой $c = e_n$. Для этой задачи $b' = m$ и $\lfloor \mu \rfloor - \nu + 1 \leqslant m - 1$. Поэтому

$$|M'_*/L| \leqslant (m-1)(1+n)^m.$$

Другого вида верхние оценки [21, 22] получаются для задач БП на основе теоремы 2.4. Если многогранник M из B^n является релаксационным для задачи (1.2), то через $v(M_*)$ обозначим число существенных классов в M_*/L.

Теорема 3.3 [22]. *Для мощности L-накрытия рассматриваемой задачи* БП *справедлива оценка*

$$|M_*/L| \leqslant 2v(M_*).$$

Таким образом, мощные L-накрытия могут возникать лишь при большом числе нецелочисленных вершин в M_*. Имеются примеры задач в БП, для которых полученные оценки достигаются и мощность L-накрытия растет экспоненциально с увеличением n.

§ 4. Применение регулярных разбиений к алгоритмам отсечения

В многих алгоритмах ЦП используются линейные неравенства (правильные отсечения), строго отделяющие данную нецелочисленную точку от выпуклой оболочки допустимых решений задачи ЦП. Рассмотрим задачу (1.2). Пусть x^* — ее оптимальное решение, причем $x^* \notin Z^n$.

- Линейное неравенство

$$(\gamma, x) \leqslant \gamma_0 \tag{4.1}$$

называется *правильным отсечением*, если

$$(\gamma, x^*) > \gamma_0, \tag{4.2}$$

$$(\gamma, z) \leqslant \gamma_0 \quad \text{для любого } z \in \Omega \cap Z^n. \tag{4.3}$$

Значительное число работ посвящено методам построения таких отсечений для обычных и лексикографических задач ЦП [2, 9, 11, 14, 20, 23, 26–36]. Широко известны отсечения Гомори [9, 26, 28, 32, 36].

В методе отсечения также используются неравенства, удовлетворяющие лишь условию (4.3). Эти неравенства называются *правильными*.

Процесс решения, основанный на правильных отсечениях, может оказаться бесконечным (например, алгоритм Данцига [17]), поскольку

среди правильных отсечений могут встретиться весьма «слабые», исключающие лишь малую часть дробного накрытия. Наш подход состоит в выделении отсечений, которые гарантируют исключение x^* вместе с содержащим его элементом регулярного разбиения. Для L-разбиения и класса K^B это всегда можно сделать (см. теорему 4.1) [9, 11, 15].

Если L-накрытие задачи состоит из конечного числа элементов и в алгоритме периодически используются L-регулярные отсечения, то за конечное число шагов удается снять всё дробное накрытие задачи. В случае произвольного регулярного разбиения для исключения F-класса может оказаться недостаточно одного отсечения и мы вынуждены перейти к рассмотрению систем линейных неравенств.

Рассмотрим задачу (1.2) и регулярное разбиение F. Пусть $x^* \notin Z^n$ и $V_{x^*}^F(\Omega_*)$ — элемент из Ω_*/F, содержащий x^*.

- Правильное отсечение (4.1) называется *F-регулярным*, если выполняется неравенство $(\gamma, x) > \gamma_0$ для всех $x \in V_{x^*}^F(\Omega_*)$, которое является более сильным, чем (4.2).

Для любого $x \notin Z^n$ определим $\Phi(x) = \min\{i \mid x_i \neq \lfloor x_i \rfloor,\ i = 1, \dots, n\}$.

Теорема 4.1 [15]. *Пусть в задаче (1.2) $x^* \notin Z^n$ и существует $d \in Z^n$ такое, что $x \leqslant d$ для всех $x \in \Omega$. Тогда для любого $\alpha \geqslant 1 + \max\{(d_i - x_i^*) \mid i = 1, \dots, n\}$ линейное неравенство*

$$\sum_{i=1}^{\Phi(x^*)-1} \alpha^{\Phi(x^*)-i}(x_i - x_i^*) + x_{\Phi(x^*)} \leqslant [x_{\Phi(x^*)}^*] \tag{4.4}$$

задает L-регулярное отсечение.

Для ограниченного множества аналогичные отсечения можно получить, используя его диаметр [9, 11]. Нами установлено [2, 7, 9, 11], что свойство L-регулярности имеется у ряда отсечений, предложенных Р. Гомори и другими авторами [23, 26, 28–31]. При этом важную роль играют правила выбора строки, порождающей отсечение, и формулы построения отсечений. В случае задач БП L-регулярными являются, например, отсечения B-алгоритма [28] и некоторые его «усиления» [2, 8, 9]. Отметим, что отсечение Данцига в общем случае не является L-регулярным.

Для систем неравенств F-регулярность вводится аналогично [15]. На основе теоремы 2.1 нетрудно показать, что существует система s неравенств $s \leqslant n$ вида (4.2), которая исключает все дробное накрытие задачи (1.2). Вызывает интерес вопрос о минимальном числе правильных неравенств, отрезающих элемент $V_{x^*}^F(\Omega_*)$, для заданного класса множеств и разбиения F. Из сказанного выше следует, что для класса K^B и любого регулярного разбиения такое число не превышает величины n,

а в случае L-разбиения и канонического разбиения равно единице. Для кубических разбиений оно может быть больше единицы [19].

В исследованиях по методу отсечения значительное внимание уделяется вопросам эффективности отсечений и их сравнению [1, 2, 10, 11, 23, 26, 28–31]. «Объем» отрезаемой части дробного накрытия мы также измеряем с помощью разбиений. Пусть F — некоторое регулярное разбиение.

- *Глубиной* системы правильных линейных неравенств относительно разбиения F назовем число элементов из Ω_*/F, полностью исключаемых этой системой.

Очевидно, что глубина F-регулярного отсечения не меньше единицы.

Глубина многих известных отсечений относительно L-разбиения (в том числе, предложенных Р. Гомори) в различных задачах может колебаться от 0 до $+\infty$. Применение отсечений нулевой глубины, как правило, дает плохую сходимость [4]. Нами выделены и изучены классы L-регулярных отсечений, глубина которых ограничена сверху числом целочисленных переменных задачи [2, 8, 9, 11, 20]. Оказалось, что таковыми являются отсечение (4.4), отсечение B-алгоритма и др. (см., например, [30]).

Опишем классы L-регулярных отсечений, глубины которых не более n. Рассмотрим задачу (1.2). Пусть

$$P' = \{x \mid a_j \leqslant x_j \leqslant a'_j,\ j = 1, \dots, n\}$$

где $a'_j \in Z$, $a_j \in Z \cup \{-\infty\}$, $j = 1, \dots, n$, и пусть $\Omega \subset P'$.

- Линейное неравенство (4.1) называется *P-отсечением*, если

$$\begin{aligned} &(\gamma, x) > \gamma_0 \quad \text{для всех} \quad x \in V^L_{x^*}(\Omega_*); \\ &(\gamma, z) \leqslant \gamma_0 \quad \text{для всех} \quad z \in P' \cap Z^n, \quad z \prec x^*. \end{aligned} \tag{4.5}$$

По сравнению с определением L-регулярного отсечения здесь усилено условие сохранения целочисленных точек.

Теорема 4.2 [9]. *Глубина любого P-отсечения в задаче* (1.2) *не превышает числа n.*

- *Вполне регулярным отсечением* называется линейное неравенство (4.1), удовлетворяющее условию (4.5) из определения P-отсечения и требованию $(\gamma, x) > \gamma_0$ для всех $x \in V^L_{x^*}(P')$, где $V^L_{x^*}(P')$ — элемент из P'/L, содержащий x^*.

Таким образом, любое вполне регулярное отсечение является P-отсечением, и, следовательно, его глубина не превышает величины n. По сравнению с P-отсечениями класс вполне регулярных отсечений более

удобен для исследования, так как в его определении фактически не участвует множество Ω. Это позволило дать полное описание класса вполне регулярных отсечений для задач БП [2] и для целочисленной решетки [20]. Достоинством таких отсечений является их применимость в случаях, когда Ω не является выпуклым. Кроме того, весьма полезной оказывается простота способов их построения. Вычислительный эксперимент показал, что в ряде случаев вполне регулярные отсечения по глубине близки к L-регулярным отсечениям первого алгоритма Гомори [4].

Получены экспериментальные данные о глубине отсечений для L-разбиения [4]. Установлено, что при решении известных тестовых задач процесс снятия дробного накрытия может происходить медленно, в том числе по одному L-классу на каждой итерации. Будем говорить, что правильное отсечение $(\gamma', x) \leqslant \gamma_0''$ *не сильнее* $(\gamma, x) \leqslant \gamma_0$, если из $(\gamma, x') \leqslant \gamma_0$ следует $(\gamma', x') \leqslant \gamma_0'$ для любого $x' \in \Omega_*$. Это отношение является частичным порядком в классе правильных отсечений. Аналогичное определение используется для сравнения систем неравенств.

F-регулярное отсечение не всегда сильнее правильного, не обладающего свойством регулярности. Это означает, что в алгоритмах может оказаться полезным использование правильных отсечений, имеющих «большую» глубину. Таковыми могут быть неравенства, порождающие грани максимальной размерности выпуклой оболочки допустимых решений задачи ЦП [33, 37].

При анализе классов отсечений естественно возникает вопрос о существовании и возможности построения «самой сильной» системы неравенств. В классе F-регулярных отсечений таким свойством обладает система, «снимающая» всё дробное накрытие. Однако для ее построения нужна информация, получение которой не проще, чем решение задачи ЦП. Для вполне регулярных отсечений указан простой способ получения системы неравенств, которая не слабее, чем любая другая из систем, рассматриваемых в [2, 20].

Перейдем к анализу двойственного дробного процесса отсечения при решении задачи (1.2), представляющего собой обобщение известных алгоритмов Данцига, Гомори и других авторов. Информацию по данному вопросу можно найти, например, в [7, 9–11, 15]. Указанный процесс описывается следующим образом.

ПРОЦЕСС D

Шаг 0. Полагаем $\Omega^{(1)} = \Omega$, $t = 1$.

t-я итерация $(t \geqslant 1)$.

Шаг 1. Находим $x^{(t)} = \operatorname{lex\,max} \Omega^{(t)}$. Если $x^{(t)} \in Z^n$ или $\Omega^{(t)} = \varnothing$, то процесс завершается. В первом случае получено оптимальное решение задачи (1.2), во втором — решения нет.

Шаг 2. Заменяем $\Omega^{(t)}$ множеством $\Omega'^{(t)}$ путем исключения из текущей системы ограничений некоторых ранее добавленных неравенств (отсечений). При этом должно выполняться условие

$$x^{(t)} = \operatorname{lex\,max} \Omega'^{(t)}. \tag{4.6}$$

Шаг 3. Строим правильное отсечение $(\gamma^{(t)}, x) \leqslant \gamma_0^{(t)}$. Присоединяем его к ограничениям текущей задачи ЦП и полагаем $\Omega^{(t+1)} = \Omega'^{(t)} \cap \{x \mid (\gamma^{(t)}, x) \leqslant \gamma_0^{(t)}\}$. Переходим к следующей итерации на шаг 1, увеличив t на единицу.

Отметим, что последняя итерация процесса завершается на шаге 1. Все остальные итерации включают шаги 1–3 и в дальнейшем называются *полными*. Будем говорить, что процесс D *решает задачу* (1.2), если за конечное число итераций он либо находит z_*, либо устанавливает отсутствие допустимых решений.

Из правильности используемых отсечений следует, что $\Omega_0 \subseteq \Omega^{(t)}$ для всех t. Исключение точки $x^{(t)}$ отсечением и условие (4.6) гарантируют, что $x^{(t)} \succ x^{(t+1)}$ $(t = 1, 2, \ldots)$

- Процесс D, в котором применяются только F-регулярные отсечения, называется *F-регулярным.* Если же в процессе D используются F-регулярные отсечения и конечное число правильных (не F-регулярных) отсечений, то D называется *слабо F-регулярным.*

Процесс D решает задачу (1.2) с конечным L-накрытием тогда и только тогда, когда он является слабо L-регулярным [7]. В случае произвольного разбиения слабо F-регулярный процесс может оказаться бесконечным (для конечного F-накрытия). Это связано с тем, что в алгоритмах отсечения надо весьма осторожно исключать дополнительные ограничения. Например, конечным является слабо F-регулярный процесс D', который отличается от D тем, что в нем сохраняются все порождаемые ограничения.

Перейдем к рассмотрению оценок числа итераций. Пусть $J_D(\Omega)$ — число полных итераций процесса D, выполняемых при решении задачи (1.2), $H_D(\Omega, F)$ — верхняя оценка глубины используемых в нем дополнительных неравенств, измеренных с помощью F-разбиения.

Теорема 4.3 [7]. *Для задачи* (1.2) *и L-регулярного процесса D справедливо неравенство*

$$J_D(\Omega) \leqslant |\Omega_*/L|. \tag{4.7}$$

В случае произвольного разбиения такая оценка имеет место для процесса D'. При построении нижних оценок числа итераций вопрос о сохранении дополнительных ограничений и F-регулярность оказываются несущественными.

Теорема 4.4 [15]. *Для любого регулярного разбиения F и задачи (1.2) справедливо неравенство*

$$J_D(\Omega) \geqslant (1/H_D(\Omega, F))\,|\Omega_*/F|. \tag{4.8}$$

Объединение оценок (4.7) и (4.8) для L-регулярного процесса приводит к важному соотношению

$$(1/H_D(\Omega, L))\,|\Omega_*/L| \leqslant J_D(\Omega) \leqslant |\Omega_*/L|. \tag{4.9}$$

Для процесса D с P-отсечениями можно положить $H_D(\Omega, L) = n$. Это означает, что мощность множества Ω_*/L существенно определяет сложность решения задачи (1.2). Например, если $|\Omega_*/L|$ экспоненциально растет вместе с n, то и число итераций будет иметь аналогичную зависимость от n. Соотношение (4.9) показывает также, что усиление отсечений в указанном классе не может привести к существенному ускорению процесса. В случае отсечений единичной глубины получаем $J_D(\Omega) = |\Omega_*/L|$, т. е. D измеряет мощность L-накрытия.

Алгоритмы отсечения, основанные на использовании систем правильных неравенств, обладают аналогичными свойствами [15].

Приведенные оценки числа итераций выражены через мощность L-накрытий и глубины отсечений. Другие оценки, учитывающие особенности задач ЦП, строятся на основе результатов из § 3. Например, из теорем 3.1 и 4.1 вытекает, что для задачи ЦЛП (3.1)–(3.3) потребуется не более

$$1 + (\lfloor\mu\rfloor - \lceil\nu\rceil + 1)\prod_{j=1}^{n}(a'_j - a_j + 1) \tag{4.10}$$

L-регулярных отсечений первого алгоритма Гомори. Верхние оценки числа отсечений для указанного алгоритма были опубликованы в [24, 25] и других работах автора. Основным результатом работы [38] является метод получения верхних оценок длины лексикографически монотонных последовательностей и его применение к полностью целочисленному алгоритму Гомори. Этот метод позволил получить верхнюю оценку числа отсечений (в терминах числа итераций одного предложенного нами лексикографического процесса). Приложение этого метода к первому алгоритму Гомори дало «параллелепипедную» оценку типа (4.10). С помощью анализа L-регулярных последовательностей в [24] был построен более широкий класс верхних оценок, включавший и (4.10). Позднее оценка типа (4.10) была установлена в [39] путем анализа лексикографически монотонной последовательности, порождаемой алгоритмом. Эти же методы дают верхние оценки для частично целочисленного алгоритма Гомори. Вопрос о «явных» верхних оценках числа отсечений для полностью целочисленных алгоритмов отсечения (прямых и двойственных) в общем случае, по-видимому, остается нерешенным.

Введенные нами регулярные разбиения расширили возможности в получении оценок, позволили находить нетривиальные нижние оценки числа отсечений.

Из теорем 3.2 и 4.1 следует, что для решения многомерной задачи о рюкзаке первым алгоритмом Гомори потребуется не более $c'n(1+n)^{b'}$ L-регулярных отсечений. Используя теорему 3.3 и оценку (4.9), нетрудно показать, что при решении задачи БП посредством алгоритмов с вполне регулярными отсечениями $J_D(M)$ удовлетворяет неравенствам $(1/n)v(M_*) \leqslant J_D(M) \leqslant 2v(M_*)$. Это означает, что значительное количество отсечений может потребоваться лишь при наличии большого числа вершин в M_*, принадлежащих различным дробным L-классам.

Отметим еще ряд результатов по методу отсечения. В [1, 10] для дробных алгоритмов с вполне регулярными отсечениями выделены наискорейшие по числу итераций алгоритмы. В [11] предложен алгоритм отсечения, основанный на использовании L-разбиения. Анализ контрпримеров для прямых алгоритмов отсечения в [9] показал, что при решении некоторых задач возникают как угодно длинные последовательности нерегулярных отсечений.

В последнее время на основе регулярных разбиений удалось получить ряд содержательных результатов для метода ветвей и границ (схемы Лэнд и Дойг) [15, 16]. В частности, показано, что порождаемые этим методом последовательности приближений являются K-регулярными, и найдены верхние оценки числа итераций.

§ 5. Алгоритмы для перебора L-классов и результаты вычислительного эксперимента

В связи с указанными выше оценками числа итераций возникает потребность в разработке алгоритмов для нахождения мощности L-накрытий в задачах ЦП. Нами предложены два основных подхода: замедление процесса отсечения путем применения отсечений единичной глубины и специальный метод перебора L-классов. Первый из них опробован для задач БП. В случае целочисленной решетки его возможности ограничены из-за быстрого роста коэффициентов отсечений при увеличении числа переменных. Второй подход применим для достаточно общих задач и реализован для задач ЦЛП. В основе метода лежит переход от одного элемента L-накрытия к следующему за ним в порядке лексикографического убывания. В случае ЦЛП анализ L-накрытия этим методом сводится к решению последовательности задач ЛП. Описание одного из алгоритмов и результаты эксперимента приведены в [4].

Недостатком таких алгоритмов является то, что оптимальное решение находится лишь в конце процесса, других допустимых решений не строится. В связи с этим нами предложены алгоритмы перебора L-классов, позволяющие получать последовательности допустимых решений задачи, последнее из которых является оптимальным [5, 15].

Нами разработаны гибридные варианты алгоритмов, в которых перебор L-классов комбинируется с L-регулярными отсечениями Гомори, а также приближенные алгоритмы с априорной оценкой точности получаемых решений. Подобные алгоритмы удобны для использования в декомпозиционных методах решения частично целочисленных задач, например для производственно-транспортных задач [40] и задач стандартизации [41].

Остановимся кратко на результатах экспериментальных исследований [4, 5]. В разработанном нами комплексе программ реализовано несколько двойственных дробных и полностью целочисленных алгоритмов отсечения, алгоритмов перебора L-классов и гибридных алгоритмов. Расчеты проводились в основном на компьютере типа IBM PC/AT. с использованием известных тестовых задач Хальди [42], задачи Петерсена [43], Кивистика [44], задач со случайными данными, специально построенных нами примеров и прикладных задач.

Расчеты показали, что гибридные алгоритмы перебора L-классов достаточно перспективны. У них оказались неплохие показатели как по времени счета, так и по надежности получения результата.

Использование L-регулярных отсечений в алгоритмах перебора L-классов во многих случаях приводило к существенному ускорению процесса решения, причем число отсечений было относительно небольшим (обычно оно не превышало 10). Дальнейшее увеличение числа отсечений не давало заметного положительного эффекта.

Для двойственных дробных алгоритмов отсечения важную роль в повышении надежности процесса решения играли L-регулярные отсечения. Алгоритмы с нерегулярными отсечениями вели себя существенно более непредсказуемо. L-регулярные отсечения Гомори в целом оказались «сильнее», чем вполне регулярные отсечения.

Во многих случаях значительное уменьшение мощности L-накрытий, сокращение числа отсечений и времен счета достигались за счет подходящего упорядочения переменных задачи.

В эксперименте наблюдалась достаточно тесная связь мощности L-накрытий с эффективностью решения задач алгоритмами отсечения и перебора L-классов. В связи с этим при разработке тестовых задач ЦП наряду с обычными характеристиками (см., например [45]) представляется полезным использовать информацию об их L-накрытиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Заблоцкая О. А.** О сравнении вполне регулярных алгоритмов отсечения // Управляемые системы. Новосибирск, 1984. Вып. 25. С. 68–74.
2. **Заблоцкая О. А., Колоколов А. А.** Вполне регулярные отсечения в булевом программировании // Управляемые системы. Новосибирск, 1983. Вып. 23. С. 55–63.

3. **Забудский Г. Г.** О целочисленной постановке одной задачи размещения объектов на линии // Управляемые системы. Новосибирск, 1990. Вып. 30. С. 35—45.

4. **Заикина Г. М., Колоколов А. А.** Экспериментальные исследования в целочисленном программировании с применением L-разбиения // Дискретная оптимизация и анализ сложных систем. Новосибирск, 1989. С. 26–56.

5. **Заикина Г. М., Колоколов А. А., Леванова Т. В.** Экспериментальное сравнение некоторых методов целочисленного программирования // Методы решения и анализа задач дискретной оптимизации. Омск, 1992. С. 25-41.

6. **Колоколов А. А.** О лексикографической структуре некоторых выпуклых многогранных множеств // 5 Всесоюз. конф. по проблемам теорет. кибернетики. Новосибирск, 18–20 июня 1980 г.: Тез. докл. Новосибирск, 1980. С. 77–79.

7. **Колоколов А.А.** Регулярные отсечения при решении задач целочисленной оптимизации // Управляемые системы. Новосибирск, 1981. Вып. 21. С. 18–25.

8. **Колоколов А. А.** Нижняя оценка числа итераций для одного класса алгоритмов отсечения // Управляемые системы. Новосибирск, 1983. Вып. 23. С. 64–69.

9. **Колоколов А. А.** Методы дискретной оптимизации. Омск: ОмГУ, 1984.

10. **Колоколов А. А.** О наискорейшем алгоритме в одном классе регулярных процессов отсечения // 3 Всесоюз. совещ. Ташкент, 1984 г.: Тез. докл. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984. Ч. 2. С. 70.

11. **Колоколов А. А.** Алгоритмы отсечения и некоторые разбиения множеств // Дискретная оптимизация и численные методы решения прикладных задач. Новосибирск, 1986. С. 50–67.

12. **Колоколов А. А.** Выпуклые множества с альтернирующим L-разбиением // Моделирование и оптимизация систем сложной структуры. Омск, 1987. С. 144–150.

13. **Колоколов А. А.** Исследование задач и методов целочисленного программирования на основе L-разбиения // Wiss. Koll. Ilmenau: TH, 1988. S. 53–55.

14. **Колоколов А. А.** Метод оценочных разбиений в целочисленном программировании // Теория и программная реализация методов дискретной оптимизации. Киев, 1989. С. 44–47.

15. **Колоколов А. А.** Регулярные разбиения в целочисленном программировании // Методы решения и анализа задач дискретной оптимизации. Омск, 1992. С. 67–93.

16. **Колоколов А. А.** Регулярные разбиения и метод ветвей и границ // Конф. по мат. программированию и приложениям. Екатеринбург, 22–26 февраля

1993 г.: Тез докл. Екатеринбург, № 4. С. 61. (Информ. бюл. ассоциации математического программирования).

17. **Колоколов А. А., Цепкова Е. В.** Верхняя оценка числа регулярных отсечений для одного семейства задач на конусе // Управляемые системы. Новосибирск, 1984. Вып. 25. С. 75–79.
18. **Колоколов А. А., Цепкова Е. В.** Исследование задачи о рюкзаке на основе L-разбиения // Кибернетика. 1991. № 2. С. 38–43.
19. **Сайко Л. А.** Исследование одного класса разбиений в целочисленном программировании // Управляемые системы. Новосибирск, 1989. Вып. 29. С. 72–82.
20. **Симанчев Р. Ю.** О вполне регулярных отсечениях для задач целочисленной оптимизации // Управляемые системы. Новосибирск, 1990. Вып. 30. С. 61–71.
21. **Kolokolov A. A.** Upper bound of L-covering power in the boolean programming problems // 3-d Internat. seminar on global optimization. Irkutsk, 1992. P. 108.
22. **Kolokolov A. A.** On the L-structure of integer linear programming problems // Abstracts of 16-th IFIP conf. on system modelling and optimization. Compiegne, France: IFIP, 1993. P. 183–184.
23. **Сергиенко И. В.** Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Киев: Наук. думка, 1988.
24. **Колоколов А. А.** О числе отсекающих плоскостей в первом алгоритме Гомори // Проблемы анализа дискретной информации. Новосибирск, 1975. Ч. 1. С. 84–96.
25. **Колоколов А. А.** Верхние оценки числа отсекающих плоскостей для циклического алгоритма Гомори // Методы моделирования и обработки информации. Новосибирск: Наука, 1976. С. 106–116.
26. **Схрейвер А.** Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991. Т. 2.
27. **Булатов В. П.** Методы погружения в задачах оптимизации. Новосибирск: Наука, 1977.
28. **Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю.** Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.
29. **Ху Т.** Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.
30. **Червак Ю. Ю.** Поиск лексиграфически максимальной дискретно определенной точки выпуклого множества // Математические методы решения экономических задач. М.: Наука, 1979. Вып. 8. С. 69–75.
31. **Шевченко В. Н.** Выпуклые многогранные конусы, системы сравнений и правильные отсечения в целочисленном программировании // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1979. С. 109–119.

32. **Gomory R. E.** Outline of an algorithm for integer solution to linear programs // Bull. Amer. Math. Soc. 1958. V. 64, N 5. P. 275–278.
33. **Grötschel M., Lovasz L., Schrijver A.** Geometric algorithms and combinatorial optimization. Algorithms and combinatorics, 2. Berlin etc: Springer-Verl., 1988.
34. **Jeroslow R.** Cutting-plane theory: algebraic methods // Discrete Math. 1978. V. 23, N 2. P. 121–150.
35. **Piehler J.** Einige Bemerkungen zum Schnittrang in der rein-ganzzahligen linearen Optimierung // Math. Operationsforschung und Statistik. 1975. Bd 6, N 4. S. 523–533.
36. **Walukiewicz S.** Integer programming. Warszawa: PWN-Polish Scientific Publ.; Dordrecht etc: Kluwer Acad. Publ., 1991.
37. **Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.** Многогранники, графы, оптимизация. М: Наука, 1981.
38. **Колоколов А. А.** О длине лексикографически монотонных последовательностей // Оптимизация территориальных и отраслевых систем, методы решения экономических задач. Новосибирск, 1973. Ч. III. С. 93–99.
39. **Nourie F. J., Venta E. R.** An upper bound on the number of cuts needed in Gomory's method of integer forms // Oper. Res. Lett. 1981/82. V. 1, N 4. P. 129–133.
40. **Бахтин А. Е., Колоколов А. А., Коробкова З. В.** Дискретные задачи производственно-транспортного типа. Новосибирск: Наука, 1978.
41. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
42. **Trauth C. A., Woolsey R. E. D.** Integer programming: a study in computational efficiency // Management Sci. 1969. V. 15, N 9. P. 481–493.
43. **Petersen C. C.** Computational experience with variants of the Balas algorithm applied to the selection of R&D projects // Management Sci. 1967. V. 13, N 9. P. 736–750.
44. **Кивистик Л.** Об ускорении полностью целочисленного алгоритма Гомори // Изв. АН Эстонской ССР. Сер. физика и математика. 1986. Т. 34, № 1. С. 11–19.
45. **Chang M. G., Shepardson F.** An integer programming test problem generator. Berlin etc: Springer-Verl., 1982. V. 199. P. 146–160. (Lecture Notes in Economics and Mathemathical Systems).

Адрес автора:

РОССИЯ,
644077, Омск,
ул. Андрианова, 28,
Институт информационных технологий
и прикладной математики СО РАН

Статья поступила

28 декабря 1993 г.