СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ
Апрель – июнь 1994. Том 1, № 2, 61–66

УДК 519.175

О ЧИСЛЕ ВНЕШНЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОБЩЕННЫХ ГРАФОВ ДЕ БРЕЙНА *)

В. Ню

В работе изучается число внешней устойчивости обобщенных графов де Брейна $B(m,d)$, где m — число вершин, а d — число дуг, исходящих из каждой вершины. Для обычных графов де Брейна, а также для графов с четным d и и $m \equiv 0 \pmod{(d+1)}$ найдено точное значение числа внешней устойчивости, совпадающее с очевидной нижней оценкой, равной величине $\lceil m/(d+1) \rceil$. Приведен пример графа $B(35,2)$, из которого следует, что в общем случае эта оценка не достигается.

Среди ориентированных графов с фиксированным числом вершин и фиксированной максимальной степенью исхода особый интерес представляет класс графов с минимальным диаметром [1]. Этот интерес связан с их применением при проектировании коммуникационных сетей [2], а также крупноблочных переключательных и распределительных компьютерных систем [1, 3]. Один из подклассов указанного класса графов образуют обобщенные графы де Брейна [4, 5], различные свойства которых — связность, гамильтоновость, количество петель и т. д. — были изучены в [4–8]. В настоящей работе исследуется вопрос о числе внешней устойчивости обобщенных графов де Брейна.

1. Основные определения

- *Обобщенный граф де Брейна* $B(m,d)$ — это ориентированный граф с множеством вершин $I(m) = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $m \geqslant 1$, и множеством дуг $\{(i, di + r \pmod{m}) \mid 0 \leqslant i \leqslant m-1, 0 \leqslant r \leqslant d-1\}$, где $d \geqslant 2$.

При любых m и d в графе $B(m,d)$ из каждой вершины выходят и в каждую вершину заходят ровно d дуг. Известно (см. [6]), что при любом $n = 0, 1, \ldots$ граф $B(d^n, d)$ является обыкновенным графом де Брейна. Такие графы будем обозначать через $B_n(d)$.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-1484).

- Если вершины i и j соединены дугой i,j, то будем говорить, что вершина i *предшествует* вершине j, а вершина j *следует за* вершиной i.
- Множество вершин S в графе $B(m,d)$ называется
  — *внешне устойчивым* [9], если каждая вершина из множества $I(m)\backslash S$ предшествует по крайней мере одной вершине из S;
  — *доминирующим*, если для любой вершины из множества $I(m)\backslash S$ найдется предшествующая ей вершина из S.
- Мощность наименьшего внешне устойчивого множества в графе $B(m,d)$ называется *числом внешней устойчивости* и обозначается через $\beta(m,d)$ (соответственно $\beta_n(d)$ — число внешней устойчивости графа $B_n(d)$).

2. Точные значения числа внешней устойчивости $\beta(m,d)$

Для любого внешне устойчивого множества вершин S справедливо неравенство $|S| \geqslant m/(d+1)$, так как каждой вершине графа $B(m,d)$ предшествует не более чем d вершин. Следовательно,

$$\beta(m,d) \geqslant \lceil m/(d+1) \rceil. \tag{1}$$

Ниже мы укажем две серии параметров m и d, для которых оценка (1) точна. Однако, как показано далее, для произвольных обобщенных графов де Брейна это уже не так.

Рассмотрим обычные графы де Брейна. Множеством вершин графа $B_n(d)$ является множество всех слов длины n в алфавите из d букв $\{0,1,\dots,d-1\}$, две вершины $\widetilde{\alpha} = \alpha_1 \dots \alpha_n$ и $\widetilde{\beta} = \beta_1 \dots \beta_n$ соединены дугой $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$, если $\alpha_1 \dots \alpha_n = \beta_1 \dots \beta_{n-1}$. Через $\widetilde{\alpha}^*$ будем обозначать слово, обратное слову α, т. е. $\widetilde{\alpha}^* = \alpha_n \dots \alpha_1$, если $\widetilde{\alpha} = \alpha_1 \dots \alpha_n$, а через X^* — множество слов, обратных словам множества X.

Лемма. *Если в графе $B_n(d)$ множество вершин X является доминирующим, то множество X^* является внешне устойчивым.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\beta} \notin X^*$ и $\widetilde{\beta} = \beta_1 \dots \beta_n$. Из определения X^* следует, что $\widetilde{\beta}^* \notin X$. Поскольку X — доминирующее множество в $B_n(d)$, вершина $\widetilde{\beta}^*$ следует за некоторой вершиной $\widetilde{\alpha} \in X$, т. е. если $\widetilde{\alpha} = \alpha_1 \dots \alpha_n$, то $\alpha_2 \dots \alpha_n = \beta_n \dots \beta_2$. Но тогда $\beta_2 \dots \beta_n = \alpha_n \dots \alpha_2$. Следовательно, вершина $\widetilde{\beta}$ предшествует вершине $\alpha^* \in X^*$. Лемма доказана.

Теорема 1. *При любых n и d имеет место равенство*

$$\beta_n(d) = \lceil d^n/(d+1) \rceil.$$

Доказательство. Из (1) следует, что $\beta_n(d) \geqslant \lceil d^n/(d+1) \rceil$. Докажем обратное неравенство. Для этого вначале покажем, что в графе $B_n(d)$ имеются вершины i_0 и j_0 такие, что $j_0 = di_0+\delta_1$ и $i_0 = dj_0+\delta_2-d^n$ для некоторых $0 \leqslant \delta_1, \delta_2 \leqslant d-1$. Действительно, из равенств $i_0 = dj_0 + \delta_2 - d^n = d^2 i_0 + \delta_1 d + \delta_2 - d^n$ следует, что

$$i_0 = (d^n - \delta_1 d - \delta_2)/(d^2 - 1). \tag{2}$$

Но поскольку $0 \leqslant d\delta_1 + \delta_2 \leqslant d^2 - 1$, уравнение (2) всегда разрешимо относительно δ_1, δ_2 и i_0 в натуральных числах.

Теперь убедимся, что в графе $B_n(d)$ множество вершин $S = \{i_0, i_0+1, \dots, j_0 - 1\}$ доминирующее.

Пусть $j_0 \leqslant j \leqslant d^n - 1$ и $j = di+\delta$. Поскольку $di_0+\delta_1 = j_0 \leqslant di+\delta \leqslant d^n - 1 < dj_0 + \delta_2$, имеем $i_0 \leqslant i < j_0$. Значит, $i \in S$ и j следует за i. Если $0 \leqslant j < i_0$, то $j = di+\delta-d^n$, где $i = \lfloor (j+d^n)/d \rfloor$, а $\delta = j - d\lfloor (j+d^n)/d \rfloor$. Тогда

$$di_0 + \delta_1 < d^n \leqslant di + \delta < i_0 + d^n = dj_0 + \delta_2.$$

Отсюда $i_0 \leqslant i \leqslant j_0$, т. е. снова $i \in S$ и j следует за i. Таким образом, множество S является доминирующим в графе $B_n(d)$. Но тогда согласно лемме множество S^* внешне устойчивое в $B_n(d)$. Наконец, $|S^*| = |S| = j_0 - i = di_0 + \delta_1 - i_0 = i_0(d-1) + \delta_1$. Подставляя значение i_0 из (2), получаем

$$|S^*| = ((d^n - \delta_1 d - \delta_2)/(d+1)) + \delta_1 = (d^n - \delta_2 + \delta_1)/(d+1).$$

Поскольку $|\delta_1 - \delta_2| \leqslant d-1$, имеем $|S^*| \leqslant \lceil d^n/(d+1) \rceil$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если d четно и $m \equiv 0 \pmod{(d+1)}$, то*

$$\beta(m,d) = m/(d+1).$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение множества вершин графа $B(m,d,)$ на $d+1$ классов вычетов по $\bmod\ (d+1)$:

$$\begin{gathered}
I_0 = \{i \in I(m) \mid i \equiv 0 \pmod{(d+1)}\},\\
I_1 = \{i \in I(m) \mid i \equiv 1 \pmod{(d+1)}\},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
I_0 = \{i \in I(m) \mid i \equiv d \pmod{(d+1)}\},
\end{gathered}$$

Очевидно, $|I_k| = m/(d+1), k = 0, \dots, d$. Покажем, что $I_{d/2}$ является внешне устойчивым множеством в $B(m,d)$.

Пусть $j \in I_k$, где $0 \leqslant k < d/2$. Тогда $(d/2)+k \leqslant d-1$, а $j = l(d+1)+k$ для некоторого целого l, $0 \leqslant l \leqslant m/(d+1)$. Следовательно, вершина j предшествует вершине $dj + (d/2) + k \pmod{m} = dl(d+1) + k(d+1) + d/2$

(mod m) $= d/2$ (mod $(d+1)$). Аналогично если $j \in I_k$ при $d/2 < k \leqslant d$, то $0 \leqslant k - ((d+2)/2) < d - 1$. Поэтому вершина j предшествует вершине $dj + (k - ((d+2)/2))$ (mod m) $= -(d+2)/2$ (mod $(d+1)$) $\equiv d/2$ (mod $(d+1)$). Таким образом, любая вершина $j \notin I_{d/2}$ предшествует некоторой вершине из этого класса, т. е. множество $I_{d/2}$ — внешне устойчивое в графе $B(m,d)$. Теорема 2 доказана.

В заключение приведем пример, когда нижняя оценка (1) не достигается. Так, для графа $B(35,2)$ из (1) следует $\beta(35,2) \geqslant 12$. Докажем

Утверждение. *Справедливо равенство* $\beta(35,2) = 13$.

Доказательство. Вначале приведем одно обобщение оценки (1). Пусть S — произвольное внешне устойчивое множество графа $B(m,d)$.

- Будем говорить, что дуга (i,j) *критическая* в S, если вершины i, j принадлежат S.

Заметим, что если $0 \in S$ или $(m-1) \in S$, то дуги $(0,0)$ и $(m-1, m-1)$ критические.

Пусть (i,j) — критическая дуга в S. Поскольку в графе $B(m,d)$ вершина j следует не более чем за d вершинами, а $i \in S$, вершине j предшествует не более чем $d-1$ вершин множества $I(m) \backslash S$. Поэтому, если в множестве S имеется k различных критических дуг, то $|S| + d|S| - k \geqslant m$. Следовательно,

$$\beta(m,d) \geqslant \lceil (m+k)/(d+1) \rceil. \qquad (3)$$

При $d = 2$ эта оценка принимает вид

$$\beta(m,2) \geqslant \lceil (m+k)/3 \rceil. \qquad (3')$$

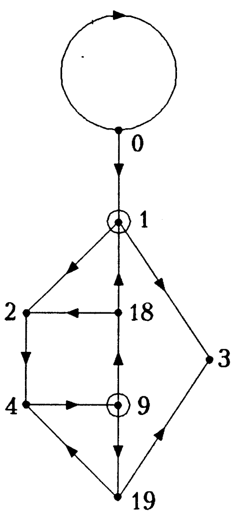

Рис. 1

Теперь покажем, что любое внешне устойчивое множество графа $B(35,2)$ содержит по крайней мере две критические дуги. Тем самым из $(3')$ мы получим оценку $\beta(35,2) \geqslant 13$.

Пусть S — произвольное внешне устойчивое множество в графе $B(35,2)$. Если $0 \in S$, то, как отмечалось выше, дуга $(0,0)$ критическая. Пусть $0 \notin S$. Тогда $1 \in S$, так как S внешне устойчивое, а вершина 0 предшествует только вершинам 0 и 1. Далее, поскольку вершина 1 предшествует вершинам 2 и 3 и следует за вершиной 18, при вхождении любой из них в множество S в нем образуется критическая дуга. Пусть вершины 2, 3, 18 не принадлежат S. Тогда одна из вершин 9 или 19 принадлежит S, так как вершина 9 предшествует вершинам 18 и 19.

Пусть $9 \in S$ (см. рис. 1). Если вершины 4, 19 принадлежат S, то дуги (4,9) и (9,19) критические. С другой стороны, одна из вершин 3, 4 или 19 обязательно должна принадлежать S, так как вершина 19 предшествует только вершинам 3 и 4. В таком случае множество S содержит по крайней мере одну критическую дугу.

Пусть теперь $19 \in S$, а вершины 3, 4 и 9 не принадлежат S (см. рис. 2). Тогда $5 \in S$, так как вершина 2 предшествует вершинам 4 и 5, а вершины 2, 4 не принадлежат S. Далее, если одна из вершин 10 или 20 принадлежит S, то дуги (5,10) или (20,5) критические. В противном случае вершина 21 принадлежит S, так как вершина 10 предшествует только вершинам 20 и 21. Наконец, если вершина 8 принадлежит S, то дуга (21,8) критическая. Поскольку из трех вершин 4, 8 и 9 одна обязана принадлежать множеству S, в S в таком случае имеется критическая дуга.

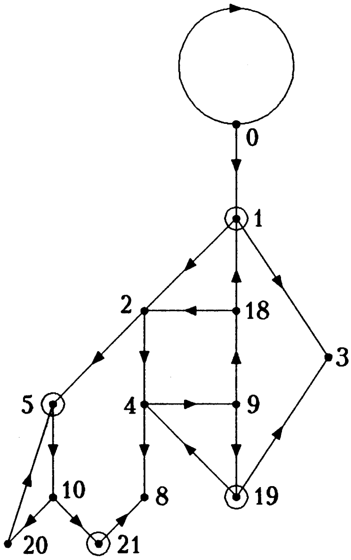

Рис. 2

Аналогичным образом, начиная с рассмотрения вершины $m-1 = 34$, доказывается наличие в множестве S второй критической дуги.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что в графе $B(35,2)$ множество вершин $\{1,4,6,7,10,13,17,19,22,25,28,30,33\}$ является внешне устойчивым. Утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Toueg S., Steiglitz K.** The design of small-diameter networks by local search // IEEE Trans. Comput. 1979. V. C–28, N 7. P. 537–542.
2. **Ayoub J., Frisch I.** Optimally invulnerable directed communication networks // IEEE Trans. Comm. 1970. V. COM–18. P. 484–489.
3. **Imase M., Itoh M.** A design method for directed graphs with minimum diameter // IEEE Trans. Comput. 1983. V. C-32, N 8. P. 782–784.
4. **Imase M., Itoh M.** Design to minimize diameters on building-block network // IEEE Trans. Comput. 1981. V. C-30, N 6. P. 439–442.
5. **Reddy S. M., Pradham D. K., Kuhl J. G.** Directed graphs with minimum diameter and maximal connectivity // Tech. Rep. School Eng. Rochester, Oakland Univ., 1980.

6. **Du D. Z., Hwang F. K.** Generalized de Bruijn digraphs // Networks. 1988. V. 18, N 1. P. 27–38.

7. **Du D. Z., Hsu D. F., Hwang F. K., Zhang X. M.** The Hamiltonian property of generalized de Bruijn digraphs. // J. Combin. Theory. Ser. B. 1991. V. 52, N 1. P. 1–8.

8. **Hu L. M.** Enumeration of Euler circuits and Hamiltonian cycles in generalized de Bruijn digraphs // J. China Univ. Sci. Tech. 1992. V. 22, N 3. P. 375–384.

9. **Берж К.** Теория графов и ее применения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Адрес автора:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики СО РАН

Статья поступила

1 февраля 1994 г.