СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ
Апрель – июнь 1994. Том 1, № 2, 67–99

УДК 519.854

НЕСТРОГОЕ СУММИРОВАНИЕ ВЕКТОРОВ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ*)

С. В. Севастьянов

Рассматриваются конечные семейства векторов на плоскости, сумма которых равна нулю, а норма каждого вектора не превосходит единицы. Конструктивно доказывается возможность нестрогого суммирования всякого такого семейства в выпуклом неограниченном множестве. Применение алгоритма нестрогого суммирования к трем задачам теории расписаний для трех машин позволяет за полиномиальное время вычислять их приближенные расписания с оценками точности, не зависящими от числа работ.

С 1974 г. (см. [1–3]) и до настоящего времени в многооперационной теории расписаний активно развивалось направление, которое можно рассматривать как применение метода *компактного суммирования векторов* (КСВ) к построению приближенных и точных алгоритмов решения задач типа flow shop, job shop и open shop [4–9]. Суть задачи КСВ состоит в следующем. Пусть в нормированном m-мерном пространстве задано конечное семейство векторов, сумма которых равна нулю, а норма каждого вектора не превосходит единицы (такие семейства мы называем s-семействами, где $\|\cdot\|_s$ — заданная в пространстве норма). Требуется найти перестановку их номеров, в соответствии с которой все частичные суммы векторов помещаются в шар минимального радиуса. Применение КСВ к задачам типа job shop, flow shop позволило установить для них важное свойство *локализации оптимумов*, согласно которому можно эффективно локализовать оптимум любой частной задачи внутри интервала, длина которого не зависит от числа работ. Отправным пунктом к получению таких результатов послужил результат Е. Штейница [10], согласно которому всякое s-семейство векторов можно просуммировать в шаре, радиус которого не зависит от числа векторов, а зависит лишь от нормы и размерности пространства. В последующих работах [11–16] рядом авторов ставилась задача нахождения минимального такого радиуса — так называемой *функции Штей-*

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-012-4489) и Международного Научного Фонда (ISF).

ница. Были получены верхние оценки этой функции в случае евклидовой нормы. Однако в целом задача не получила надлежащего решения. Возможно, причиной этого являлось то, что она имела лишь самостоятельное значение как интересная математическая задача и не имела приложений к другим областям математики, в том числе и к функциональному анализу, где она возникла. Актуальность метода компактного суммирования векторов возросла после обнаружения его связи с задачами теории расписаний, когда очевидным образом проявилась зависимость: чем меньше радиус суммирования, тем у́же интервал локализации оптимумов. Используя эту зависимость, можно строить эффективные приближенные алгоритмы вычисления расписаний с оценками точности, не зависящими от числа работ, при условии, что имеется столь же эффективный приближенный алгоритм решения задачи КСВ с оценкой радиуса, не зависящей от числа векторов. Дальнейшие исследования в этом направлении (см. [17–20]) позволили улучшить верхние оценки для функции Штейница и построить эффективные приближенные алгоритмы решения задачи КСВ.

Более точный анализ задач теории расписаний показал, что более естественной является их связь не с компактным суммированием векторов в шаре минимального радиуса, а с задачами суммирования векторов в других областях m-мерного пространства, специфичных для каждой конкретной задачи теории расписаний. Кроме того, выявилась возможность ослабить требования к алгоритмам суммирования, в связи с чем нами вводится понятие «нестрогое суммирование векторов в области» G. При нестрогом суммировании в G траектории суммирования векторов разрешается выходить за область G, но не более чем на один шаг подряд. (Противопоставляя нестрогому суммированию, обычное суммирование иногда будем называть *строгим.*)

В настоящей работе рассматриваются три задачи теории расписаний типа job shop: задача Джонсона, задача о сборочной линии и задача перекрещивающихся маршрутов (для трех машин). Устанавливается их связь с тремя задачами нестрогого суммирования s-семейств векторов (НСВ1, НСВ2, НСВ3) в семействах полупространств пространства $\mathbb{R}^m$. Доказывается теорема о существовании и эффективном нахождении нестрогого суммирования всякого s-семейства векторов в $\mathbb{R}^2$ внутри выпуклого неограниченного множества C, все хорды которого, проходящие через начало координат (в дальнейшем называемые O-хордами), имеют длину в норме $\|\cdot\|_s$ не меньше единицы (предполагается, что множество C содержит начало координат). Показывается, что ослабление (на сколь угодно малую величину) этого ограничения на длины O-хорд ведет к тому, что проверка существования нестрого суммирования в C становится NP-трудной проблемой в сильном смысле. Алгоритм нестрогого суммирования в C используется при нахождении решений задач НСВi ($i = 1, 2, 3$) с наилучшими оценками функционалов в двумерном случае. Это позволяет строить полиномиальные алгоритмы приближенного решения и находить интервалы локализации оптимумов для указанных задач теории расписаний в случае трех машин. Для задачи Джонсона и задачи о сборочной линии установлена точность найденных интервалов.

§ 1. Нестрогое суммирование в неограниченной области на плоскости

Рассмотрим m-мерное декартово пространство $\mathbb{R}^m$, элементы которого (упорядоченные наборы m вещественных чисел) будем называть *точками*. Компоненты упорядоченного набора, соответствующие точке P, называются ее *координатами*, в частности, началу координат (точке O) соответствует набор $(0,0,\dots,0)$, который далее обозначается просто 0. Введение линейной структуры естественным образом превращает $\mathbb{R}^m$ в линейное (векторное) пространство. Мы будем отождествлять точку пространства $\mathbb{R}^m$ и вектор, ведущий из начала координат в эту точку. Будем также предполагать, что в пространстве $\mathbb{R}^m$ определена некоторая норма $\|\cdot\|_s$ (для краткости в дальнейшем называемая s-нормой). Через $B_{s,m}$ обозначим замкнутый шар с центром в начале координат радиуса 1, т. е. $B_{s,m} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|_s \leqslant 1\}$. Для конечного семейства векторов $X = \{x_1,\dots,x_n\} \subset \mathbb{R}^m$ положим $\Sigma(X) = \sum_{i=1}^n x_i$.

Определение 1. Конечное семейство векторов $X = \{x_1,\dots,x_n\} \subset \mathbb{R}^m$ называется *s-семейством*, если $X \subset B_{s,m}$ и $\Sigma(X) = 0$.

Определение 2. Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$, $X = \{x_1,\dots,x_n\} \subset \mathbb{R}^m$, $\Sigma(X) = 0$. Будем говорить, что перестановка $\pi = (\pi_1,\dots,\pi_n)$ задает *нестрогое суммирование векторов из X в области G*, если при любом $k = 1,\dots,n$ из $x_\pi^{k-1} \notin G$ следует $x_\pi^k \in G$, где $x_\pi^k \doteq \sum_{j=1}^k x_{\pi_j}$.

Будем говорить, что перестановка π задает *нестрогое суммирование векторов из X в семействе областей $\{G_i \mid i = 1,\dots,\nu\}$* (обозначим это так: $(X,\pi) \in S\{G_1,\dots,G_\nu\}$), если π задает нестрогое суммирование в каждой из областей G_i, $i = 1,\dots,\nu$.

Замечание 1. Очевидно, что перестановка π, задающая нестрогое суммирование векторов из X в пересечении областей $G = \bigcap_{i=1}^k G_i$, задает и нестрогое суммирование этих векторов в семействе областей $\{G_i \mid i = 1,\dots,k\}$.

Определение 3. Пусть C — выпуклое множество и l — прямая в $\mathbb{R}^m$. Тогда $h = l \cap C$ называется *хордой* множества C. Хорду, проходящую через начало координат, назовем *O-хордой* множества C.

O-хорду множества C, параллельную вектору x, обозначим через $h_C(x)$; через $Q(a)$, $a \neq 0$, обозначим луч, начинающийся в точке O и проходящий через точку a. Тогда множество $x + Q(a)$ соответствует лучу, идущему из точки x в направлении вектора a.

Очевидно, что любая хорда $h = l \cap C$ выпуклого множества C является либо отрезком, либо лучом, либо совпадает со всей прямой l. (В двух последних случаях длина хорды полагается равной бесконечности.) Ясно также, что в любом выпуклом неограниченном множестве содержится по крайней мере один луч.

Определение 4 (см. [21]). *Рецессивным конусом* выпуклого неограниченного множества $C \subset \mathbb{R}^m$ называется объединение всех лучей $Q(a)$ таких, что $x + Q(a) \subset C$ для любой точки $x \in C$. Такой конус будем обозначать через 0^+C.

Нетрудно показать, что рецессивный конус является выпуклым конусом. (Напомним, что *конусом* в выпуклом анализе называется множество, замкнутое относительно умножения на неотрицательные числа.) Кроме того, если C — замкнутое множество, то конус 0^+C также замкнут.

Все дальнейшие рассмотрения относятся в основном к двумерному случаю, т. е. случаю пространства $\mathbb{R}^2$. Произвольный ненулевой вектор $a \in \mathbb{R}^2$ определяет левую и правую замкнутые полуплоскости $L(a)$ и $R(a)$, т. е. полуплоскости, лежащие слева и справа от прямой $\{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ при движении в направлении луча $Q(a)$. Введем обозначения:

$$L^0(a) = \mathbb{R}^2 \backslash R(a), \qquad R^0(a) = \mathbb{R}^2 \backslash L(a);$$
$$L'(a) = L^0(a) \cup Q(a), \qquad R'(a)q = R^0(a) \cup Q(a).$$

Отметим, что выполнены следующие простые свойства ($a \neq 0$, $b \neq 0$):

$$L(a) = R(-a), \quad L^0(a) = R^0(-a);$$
$$X(-a) = -X(a),\ X^0(-a) = -X^0(a),\ X'(-a) = -X'(a), \quad (X \in \{L, R\});$$
$$a \in L(b) \Longleftrightarrow b \in R(a),\ a \in L^0(b) \Longleftrightarrow b \in R^0(a),\ a \in L'(b) \Longleftrightarrow b \in R'(a).$$

Легко проверить справедливость следующих трех утверждений.

Утверждение 1. *Если выпуклый конус $A \subset \mathbb{R}^2$ отличен от $\mathbb{R}^2$, то A целиком содержится в некоторой полуплоскости $L(a)$.*

Утверждение 2. *Выпуклый замкнутый конус $A \subset \mathbb{R}^2$ представи́м в виде $A = A(a, b) \doteq (L^0(a) \cap R^0(b)) \cup Q(a) \cup Q(b)$ при некоторых a, $a \neq 0$, и $b \in L(a)$, $b \neq 0$, если и только если A отличен от прямой и не совпадает с $\mathbb{R}^2$.*

На основании утверждения 2, рецессивный конус 0^+C (кроме двух оговоренных выше случаев) также будем представлять в виде $0^+C = A(a, b)$.

Ясно, что $A(a, b) \subseteq L(a) \cap R(b)$, причем множества в левой и правой частях не совпадают лишь в случае $a = \lambda b$, $\lambda > 0$.

Утверждение 3. *Если a, b, σ — ненулевые векторы в $\mathbb{R}^2$, $b \in L(a)$ и $\sigma \in -A(a,b)$, то $L(\sigma) \backslash A(a,b) \subseteq L(\sigma) \backslash L'(a)$.*

Теорема 1. *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^2$ с нормой s задано выпуклое замкнутое неограниченное множество C, содержащее точку 0 и такое, что все его O-хорды имеют длину не менее единицы. Пусть также известен рецессивный конус $A = A(a,b) \neq \varnothing$ множества C. Тогда для всякого s-семейства векторов $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^2$ существует (и находится за $O(n \log n)$ операций) перестановка $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$, задающая нестрогое суммирование векторов X в области C.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится по следующей схеме. Сначала описывается алгоритм для нахождения перестановки π. Затем устанавливаются ряд свойств этого алгоритма (леммы 1–5), из которых непосредственно следует утверждение теоремы 1. Алгоритм нахождения перестановки π состоит из трех этапов, которые будем называть предварительным, начальным и основным.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. Занумеруем векторы X против часовой стрелки, начиная от вектора a. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — полученная нумерация.

НАЧАЛЬНЫЙ ЭТАП. Если $X \cap A \neq \varnothing$, то в качестве первых $j = |X \cap A|$ номеров перестановки π возьмем номера $1, 2, \dots, j$. Получим сумму $\sigma_j \doteq \sum_{i=1}^{j} x_{\pi_i} \in A$, причем ясно, что вся траектория суммирования векторов $x_{\pi_1}, \dots, x_{\pi_j}$ будет лежать в A.

ОСНОВНОЙ ЭТАП. Последующие номера перестановки π будут определяться таким образом, чтобы на k-м шаге ($k = j, \dots, n$) выполнялось следующее

Свойство (†). *Если $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ уже определены, то множество еще не использованных в π номеров из $\{1, 2, \dots, n\}$ образует связный отрезок $\{s_k, s_k + 1, \dots, p_k\}$, $p_k - s_k + 1 = n - k$.*

Пусть свойство (†) выполнено на шаге с номером $k < n$. Тогда для обеспечения этого свойства на последующих шагах этого алгоритма очередной $(k+1)$-й вектор траектории суммирования будем выбирать из двух претендентов: x_{s_k} и x_{p_k}, которые для краткости будем обозначать x_s («successor») и x_p («predecessor»); этимология этих обозначений становится понятной из рис. 1. Индекс k при написании суммы σ_k будем, как правило, опускать.

Принцип выбора очередного вектора прост. Пусть $\sigma \in C$. Если $\sigma + x_s \in C$, то полагаем $\pi_{k+1} = s_k$. Если $\sigma + x_s \notin C$, $\sigma + x_p \in C$, то полагаем $\pi_{k+1} = p_k$. Наконец, если $\sigma + x_s \notin C$ и $\sigma + x_p \notin C$ (из условия $\Sigma(X) = 0 \in C$ следует, что это не может произойти на шаге $k = n - 1$), то полагаем $\pi_{k+1} = s_k$, $\pi_{k+2} = p_k$ (или наоборот, что не играет роли). Если при этом $\sigma_{k+2} \notin C$, то «STOP». Алгоритм описан.

Ясно, что алгоритм отвечает требуемой оценке трудоемкости, так как сложность исходной нумерации векторов есть $O(n \log n)$, а последующее построение перестановки π выполняется за $O(n)$ операций.

Для обоснования того, что полученная с помощью такого алгоритма перестановка π обеспечивает нестрогое суммирование в C, достаточно доказать, что в алгоритме не возникает ситуации «STOP».

Это очевидно в случае $C = \mathbb{R}^2$. Если $C \neq \mathbb{R}^2$ (следовательно, $A = 0^+C \neq \mathbb{R}^2$), то в силу утверждения 1 имеем $A \subseteq L(a)$. Если $A = L(a)$, то ситуации «STOP» не возникает, поскольку получаемая в результате применения алгоритма перестановка $\pi = (1, 2, \ldots, n)$ задает строгое суммирование векторов X в $A \subseteq C$. Пусть имеет место строгое включение $A \subset L(a)$. Обозначим через $X_k \doteq \{x_{s_k}, x_{s_k+1}, \ldots, x_{p_k}\}$ множество векторов из X, не вошедших в сумму σ_k.

Лемма 1. *На каждом шаге алгоритма (при $\sigma \neq 0$) справедливы следующие соотношения:* $x_s \in L(\sigma)$, $x_p \in R(\sigma)$.

Доказательство. Просуммировав векторы из X в порядке нумерации, установленной на предварительном этапе, получим траекторию суммирования, ограничивающую выпуклый многоугольник D (рис. 1).

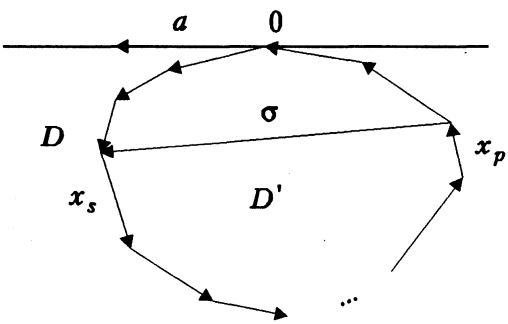

Рис. 1. Траектория суммирования векторов семейства X

В силу свойства (†) на любом шаге алгоритма вектор $\sigma = \sigma_k$ соответствует хорде этого многоугольника и вместе с векторами из X_k образует выпуклый многоугольник D', целиком лежащий слева от σ при $\sigma \neq 0$ (впрочем, это справедливо по отношению к любой стороне многоугольника в силу упорядочения векторов против часовой стрелки), т. е. $D' \subset L(\sigma)$. Поэтому $x_s \in L(\sigma)$, $x_p \in R(\sigma)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *На каждом шаге алгоритма (при $\sigma \neq 0$) выполнены импликации* $\sigma \in R(a) \Rightarrow x_s \in L(a)$, $\quad \sigma \in L(a) \Rightarrow x_p \in R(a)$.

Доказательство. Пусть $\sigma \in R(a)$. Если $x_s \in \mathbb{R}^2 \backslash L(a) = R^0(a)$, то по правилу нумерации векторов и в силу свойства (†) имеем $X_k \subset R^0(a)$. Но тогда $\sigma + \Sigma(X_k) \neq 0$, что противоречит свойству $\Sigma(X) = 0$. Вторая импликация доказывается аналогично. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если $A \subset L(a)$, то на любом шаге алгоритма имеем*

$$\sigma \notin -A \backslash \{0\}. \tag{1}$$

Доказательство. Из $A \neq L(a)$ следует $A \cap (-A\backslash\{0\}) = \varnothing$. Поэтому (1) выполняется на любом шаге начального этапа, когда $\sigma \in A$. Предположим, что условие (1) нарушено на k-м шаге основного этапа. Тогда $\sigma \in -A \subset R(a)$ и

$$x_s \notin A. \tag{2}$$

Так как по лемме 1 имеем $x_s \in L(\sigma)$, с учетом (2) и утверждения 3 выполняется $x_s \notin L'(a)$, т. е. $x_s \in R^0(a) \cup Q(-a)$. Но тогда, согласно правилу нумерации векторов и в силу свойства (†), получаем $X_k \subset R^0(a) \cup Q(-a)$. Следовательно, $\sigma + \Sigma(X_k) \neq \varnothing$, что противоречит равенству $\Sigma(X) = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму 3.

Пусть $C_1 = R^0(b)\backslash C$, $C_2 = L^0(a)\backslash C$. Поскольку

$$\begin{aligned} C_1 \subseteq R^0(b)\backslash A &= R^0(b)\backslash\{(L^0(a) \cap R^0(b)) \cup Q(a) \cup Q(b)\} \\ &= R^0(b)\backslash L'(a) \qquad [\text{ так как } -a \in L(b)] \\ &= R^0(b)\backslash\{L'(a) \cup Q(-a)\} = R^0(b)\backslash L(a), \end{aligned}$$

справедливо следующее включение:

$$C_1 \subseteq R^0(a) \cap R^0(b). \tag{3}$$

Аналогично устанавливается включение $C_2 \subseteq L^0(a) \cap L^0(b)$.

Лемма 4. *Если на k-м шаге алгоритма $\sigma_k \in C$, то*

$$\sigma_k + x_s \notin C_1, \tag{4}$$
$$\sigma_k + x_p \notin C_2. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\sigma_{k+1} = \sigma_k + x_s$ и соотношение (4) нарушено, т. е. с учетом (3)

$$\sigma_{k+1} \in C_1 \subseteq R^0(a). \tag{6}$$

Ясно, что $(k+1)$-й шаг выполняется не на начальном этапе (когда $\sigma_k \in A \subset L(a)$ при любом k), а на основном. Следовательно, $x_s \notin A$. Учитывая (6) и пользуясь леммами 1, 2, получаем $x_{s_{k+1}} \in L(\sigma_{k+1}) \cap L(a) = A(a, -\sigma_{k+1})$. Отсюда в соответствии с правилом нумерации векторов вытекает, что

$$x_s \in A(a, x_{s_{k+1}}) \subseteq A(a, -\sigma_{k+1}) \subset L(a). \tag{7}$$

Из (6), (7) следует, что

$$\sigma_k = \sigma_{k+1} - x_s \in R^0(a).$$

Используя соотношение (7), при некоторых $\lambda \geqslant 0$, $\mu > 0$ получаем представление $x_s = \lambda a - \mu\sigma_{k+1} = \lambda a - \mu(\sigma_k + x_s)$, или $x_s = (\lambda/(1+\mu))a - (\mu/(1+\mu))\sigma_k$. Отсюда с учетом $\sigma_k \in C$, $a \in 0^+C$ получаем

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k + x_s \in \left[\sigma_k, \sigma_k + \frac{1+\mu}{\mu}x_s\right] = \left[\sigma_k, \frac{\lambda}{\mu}a\right] \subset C,$$

что противоречит предположению $\sigma_{k+1} \in C_1 = R^0(b) \setminus C$.

Свойство (5) доказывается аналогично. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\sigma \in C, \sigma + x_s \notin C, \sigma + x_p \notin C$. *Тогда* $\sigma + x_s + x_p \in C$.

Доказательство. Из лемм 3, 4 имеем $\sigma + x_s \notin C \cup C_1 \cup (-A)$. Поэтому $\sigma + x_s \in C_2$. Аналогично, $\sigma + x_p \in C_1$. Докажем, что

$$\sigma + x_s + x_p \notin C_1. \tag{8}$$

Допустим противное, т. е.

$$\sigma + x_s + x_p \in C_1. \tag{9}$$

Обозначим $\sigma' = \sigma + x_s$, $\sigma'' = \sigma' + x_p$ и докажем, что

$$[\sigma', \sigma''] \cap A \neq \varnothing. \tag{10}$$

Так как $\sigma' \in C_2 \subset L^0(a)$, согласно лемме 2 $x_p \in R(a)$ и согласно лемме 1 $x_p \in R(\sigma_{k+1})$. Таким образом, для x_p справедливо представление $x_p = \lambda a - \mu\sigma_{k+1}$, где $\lambda \geqslant 0$, $\mu > 0$, причем из (9) следует, что $\mu > 1$. Отсюда $\sigma' + (1/\mu)x_p = (\lambda/\mu)a \in A \cap [\sigma', \sigma'']$, что доказывает (10).

Из формулы (10) и условий $\sigma' \notin C$, $\sigma'' \notin C$ следует, что хорда $h \doteq \{\nu\sigma' + (1-\nu)\sigma'' \mid \nu \in \mathbb{R}\} \cap C$ строго содержится в отрезке $[\sigma', \sigma'']$. А так как эта хорда замкнута, $\|h\| < \|x_p\| \leqslant 1$. Но, с другой стороны, всякая хорда множества C, имеющая непустое пересечение с рецессивным конусом этого множества, не короче параллельной ей O-хорды. Следовательно, $\|h\| \geqslant 1$. Полученное противоречие доказывает (8). Аналогично устанавливается соотношение

$$\sigma + x_s + x_p \notin C_2. \tag{11}$$

Из (8), (11) и леммы 3 получаем $\sigma + x_s + x_p \in \mathbb{R}^2 \setminus (C_1 \cup C_2 \cup (-A)) \subseteq C$. Лемма 5 доказана.

В силу леммы 5 в алгоритме не возникает ситуации «STOP». Таким образом, построенный алгоритм обеспечивает нестрогое суммирование векторов X в области C. Теорема 1 доказана.

Замечание 2. В алгоритме мы нигде не пользовались тем, что конус A соответствует совокупности всех направлений, по которым множество C удаляется в бесконечность. Для определения и обоснования алгоритма, обеспечивающего нестрогое суммирование в C, достаточно иметь хотя бы одно такое направление $a \in \mathbb{R}^m$.

Замечание 3. Для существования перестановки π, задающей нестрогое суммирование конкретного s-семейства векторов $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ в области C, вовсе не обязательно, чтобы длина каждой O-хорды множества C была не меньше единицы (в норме s). Достаточно, во-первых, добиться выполнения этого условия лишь для O-хорд $h_C(x_j)$, параллельных векторам $x_j \in X$, и, во-вторых, сравнивать $\|h_C(x_j)\|_s$ не с единицей, а с $\|x_j\|_s$. Таким образом, для существования нестрогого суммирования семейства X в C достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\|h_C(x_j)\| \,/\, \|x_j\| \geqslant 1 \text{ при любом } x_j \in X,\ x_j \neq 0,$$

которое не зависит от нормы.

Замечание 4. Ограничение снизу (равное единице) на s-норму любой O-хорды множества C в теореме 1 не может быть ослаблено.

Для обоснования этого замечания мы не ограничимся построением соответствующего контрпримера, а докажем более сильный результат, из которого следует, что ослабление (на сколь угодно малую величину) ограничения на длины O-хорд множества C ведет к тому, что проверка существования нестрогого суммирования в C заданного s-семейства векторов в этом случае становится NP-трудной проблемой в сильном смысле. Это обстоятельство проявляется уже в ситуации, когда все векторы из X коллинеарны вектору $x \in \mathbb{R}^m$ и $\|h_C(x)\| < 1$. При этом свойство множества C быть неограниченным в каких-то направлениях, отличных от x, оказывается несущественным, задача становится, по существу, одномерной, и вместо векторов можно говорить о числах.

Сформулируем задачу распознавания, которую назовем задачей *нестрогого суммирования чисел*, или НСЧ1.

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Z}^+$ — множество неотрицательных целых чисел. Рассмотрим произвольное множество A. Будем говорить, что заданы *размеры* элементов множества A, если определена функция $s\colon A \to \mathbb{Z}^+$, ставящая в соответствие каждому элементу $a \in A$ неотрицательное число $s(a)$.

Задача НСЧ1(λ)

Условие: *заданы число $D \in \mathbb{Z}^+$; семейство чисел $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{Z}$ такое, что $|x_j| \leqslant D$, $\Sigma(X) = 0$; число $d \in \mathbb{Z}^+$ такое, что $d \in [\lambda D, D)$.*

Вопрос: *существует ли перестановка* $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ *такая, что*

$$x_\pi^{k-1} \in [0, d] \vee x_\pi^k \in [0, d], \quad \text{при } k = 1, \dots, n,$$

где $x_\pi^k = \sum_{j=1}^k x_{\pi_j}$?

Для доказательства NP-полноты задачи НСЧ1 будет использована следующая

Задача k-РАЗБИЕНИЕ

Условие: *задано множество* A, *состоящее из* km *элементов, число* $B \in \mathbf{Z}^+$ *и такие размеры* $s(a) \in \mathbf{Z}^+$ *всех элементов* $a \in A$, *что* $B/(k+1) < s(a) < B/(k-1)$ и $\sum_{a \in A} s(a) = mB$.

Вопрос: *можно ли множество* A *разбить на* m *непересекающихся* k-*элементных подмножеств* $A_1, \dots, A_m$ *таких, что для любого* $i = 1, \dots, m$ *выполнено соотношение*

$$\sum_{a \in A_i} s(a) = B\,? \tag{12}$$

Лемма 6. Задача k-РАЗБИЕНИЕ *является* NP-*трудной в сильном смысле при* $k \geqslant 3$.

Доказательство. NP-трудность задачи в случае $k = 3$ доказана в [22, с. 124, 283]. Рассмотрим случай $k > 3$. Проведем сведение задачи 3-РАЗБИЕНИЕ к этому случаю.

Пусть в задаче 3-РАЗБИЕНИЕ заданы множество A, состоящее из $3m$ элементов, число $B \in \mathbf{Z}^+$, которое мы будем называть *границей* множества A и числовое семейство $\{s(a) \in \mathbf{Z}^+ \mid a \in A\}$, задающее размеры элементов множества A такие, что

$$B/4 < s(a) < B/2, \quad \sum_{a \in A} s(a) = mB.$$

Пусть A' — произвольное множество мощности $(k-3)m$, причем $A' \cap A = \varnothing$. Сформируем множество $\widetilde{A}$ из km элементов такое, что $\widetilde{A} = A \cup A'$, и определим размеры $\{\tilde{s}(a) \in \mathbf{Z}^+ \mid a \in \widetilde{A}\}$:

$$\tilde{s}(a) = \begin{cases} C + s(a), & \text{если } a \in A, \\ C + B, & \text{если } a \in A', \end{cases}$$

где $C = (k-2)B$. Определим в задаче k-РАЗБИЕНИЕ границу

$$\widetilde{B} = B + 3C + (k-3)(C+B) = (k^2 - k - 2)B = kC + (k-2)B.$$

Предоставляем читателю убедиться в том, что

$$\widetilde{B}/(k+1) < \tilde{s}(a) < \widetilde{B}/(k-1) \text{ для каждого } a \in \widetilde{A};, \quad \sum_{a \in \widetilde{A}} \tilde{s}(a) = m\widetilde{B}.$$

Покажем, что искомое 3-разбиение $\{A_1, \dots, A_m\}$ множества A существует, если и только если существует k-разбиение $\{\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_m\}$ множества $\widetilde{A}$ такое, что при каждом $i = 1, \dots, m$ имеет место равенство

$$\sum_{a \in \widetilde{A}_i} \tilde{s}(a) = \widetilde{B}. \tag{13}$$

Действительно, по 3-разбиению соответствующее k-разбиение строится так: множество A' следует разбить на m произвольных подмножеств $A'_1, \dots, A'_m$ мощности $k-3$ каждое и положить $\widetilde{A}_i = A_i \cup A'_i$, $i = 1, \dots, m$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что задано k-разбиение $\{\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_m\}$ множества $\widetilde{A}$, удовлетворяющее (13). Положим $A_i = \widetilde{A}_i \cap A$, $A'_i = \widetilde{A}_i \cap A'$. Из определения размеров $\tilde{s}(a)$ следует, что если $|A'_i| < k-3$, то $\sum_{a \in \widetilde{A}_i} \tilde{s}(a) < \widetilde{B}$ при любом A_i мощности $k - |A'_i|$, а если $|A'_i| > k-3$, то $\sum_{a \in \widetilde{A}_i} \tilde{s}(a) > \widetilde{B}$. Таким образом, при всех $i = 1, \dots, m$ выполняется соотношение $|A'_i| = k-3$, что автоматически дает 3-разбиение $\{A_1, \dots, A_m\}$ множества A, удовлетворяющее условию (12).

Поскольку при фиксированном k длины записей входной информации задачи k-РАЗБИЕНИЕ и исходной задачи 3-РАЗБИЕНИЕ по порядку равны, лемма 7 доказана.

Теорема 2. *При любом* $\lambda \in (0,1)$ *задача* НСЧ1(λ) *является* NP-*полной в сильном смысле.*

Доказательство. Пусть задано число $\lambda \in (0,1)$. Предположим, что при $k = \lceil (1-\lambda)^{-1} \rceil + 1$ заданы входные данные (кратко, вход) задачи k-РАЗБИЕНИЕ, т. е. число $B \in \mathbb{Z}^+$ и такие размеры $s(j)$ элементов множества $A = \{1, 2, \dots, km\}$, что $\sum_{j \in A} s(j) = Bm$ и $B/(k+1) < s(j) < B/(k-1)$. Зададим вход задачи НСЧ1(λ):

$$n = (k+2)m, \quad l = \left\lceil \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2 B} \right\rceil, \quad B' = lB, \quad d = B'; \quad D = \left\lfloor \frac{B'}{\lambda} \right\rfloor;$$

$$x_j = \begin{cases} s(j)l & \text{при } j \in A \quad (A\text{-числа}); \\ D - d \doteq \beta & \text{при } j \in \{km+1, \dots, km+m\} \quad (\beta\text{-числа}); \\ -D \doteq \gamma & \text{при } j \in \{(k+1)m+1, \dots, n\} \quad (\gamma\text{-числа}). \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что определенный таким образом вход удовлетворяет условию задачи НСЧ1(λ). Кроме того, при любом $j \in A$ выполняется неравенство

$$x_j < \beta. \tag{14}$$

Действительно, так как $x_j < B'/(k-1)$ при $j \in A$, достаточно установить, что $\beta = \lfloor B'/\lambda \rfloor - B' \geqslant B'/(k-1)$. Для этого (с учетом определения k) достаточно доказать неравенство

$$\lambda^{-1}B' - 1 - B' \geqslant B'(\lceil 1/(1-\lambda)\rceil)^{-1},$$

или

$$B' \geqslant (\lambda^{-1} - 1 - (\lceil 1/(1-\lambda)\rceil)^{-1})^{-1}.$$

Последнее вытекает из неравенства

$$B' \geqslant \lambda(1-\lambda)^{-2} = (\lambda^{-1} - 1 - (1/(1-\lambda))^{-1})^{-1}.$$

Покажем далее, что искомая перестановка π в задаче НСЧ1(λ) существует, если и только если в задаче k-РАЗБИЕНИЕ существует такое разбиение $\{A_1, \dots, A_m\}$ множества A, что

$$\sum_{i \in A_j} s(i) = B, \quad j = 1, \dots, m.$$

Если разбиение $\{A_1, \dots, A_m\}$, удовлетворяющее указанному свойству, существует, то перестановку π определяет последовательность номеров

$$\widetilde{A}_1\beta_1\gamma_1\widetilde{A}_2\beta_2\gamma_2 \cdots \widetilde{A}_m\beta_m\gamma_m,$$

где $\widetilde{A}_i$ — любая перестановка номеров из множества A_i, $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ — любая перестановка номеров β-чисел, $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ — любая перестановка номеров γ-чисел. Очевидно, что перестановка π — искомая в задаче НСЧ 1(λ).

Пусть теперь перестановка π задает нестрогое суммирование чисел $\{x_1, \dots, x_n\}$ в отрезке $[0, d]$. Последовательно соединив звеньями ломаной точки, соответствующие суммам $x_\pi^0, x_\pi^1, \dots, x_\pi^n$, получим замкнутую траекторию суммирования. Звенья, порожденные γ-, β- и A-числами, будем называть γ-, β- и *A-звеньями* соответственно.

Для всякого γ-числа x_{π_j} ровно одна из двух сумм x_π^{j-1}, x_π^j (только одна из концевых вершин γ-звена) лежит в отрезке $[0, d]$, причем точно на его границе, т. е. совпадает либо с 0, либо с d. В противном случае расстояние от другого конца γ-звена (обозначим его через $x_\pi^{j^*}$) до отрезка $[0, d]$ превосходит $D - d = \beta$ и нестрогое суммирование невозможно.

Таким образом, расстояние от $x_\pi^{j^*}$ до $[0,d]$ в точности равно β. Поэтому в случае $j^* = j-1$ (т. е. при $x_\pi^{j^*} = D$) ввиду (14) число $x_{\pi_{j-1}}$ является β-числом, а в случае $j^* = j$ (когда, как легко понять, $x_\pi^{j^*} = d - D$) таковым является число $x_{\pi_{j+1}}$. В обоих случаях вершина траектории суммирования, совпадающая с суммой $x_\pi^{j^*}$, инцидентна паре звеньев, одно из которых является γ-, а другое β-звеном. Таким образом, каждое γ-звено инцидентно хотя бы одному β-звену.

Покажем теперь, что каждое β-звено не может быть инцидентно двум γ-звеньям. Допустим противное, т. е. $x_{\pi_j} = \beta$, $x_{\pi_{j-1}} = \gamma$, $x_{\pi_{j+1}} = \gamma$. Тогда если $x_\pi^{j-1} \notin [0,d]$, то $x_\pi^j = 0$, $x_\pi^{j+1} = -D$ и нестрогое суммирование в $[0,d]$ невозможно. Если же $x_\pi^{j-2} \notin [0,d]$, то $x_\pi^{j-2} = D$ (следовательно, $x_{\pi_{j-2}} = \beta$), $x_\pi^{j-1} = 0$, $x_\pi^j = \beta$, $x_\pi^{j+1} = \beta - D < 0$. Поэтому $x_\pi^{j+1} = d - D$, $x_{\pi_{j+2}} = \beta$, $x_\pi^{j+2} = 0$. (Отсюда получаем соотношение $x_\pi^{j+1} = \beta - D = d - D$, т. е. $\beta = d$, и $D = 2d$.) Отрезок траектории из пяти звеньев (от $x_{\pi_{j-2}}$ до $x_{\pi_{j+2}}$) начинается β-звеном в вершине $x_\pi^{j-3} = d$ и кончается β-звеном в вершине 0. Поэтому крайним β-звеньям не могут быть инцидентны другие γ-звенья (предшествующие звену $x_{\pi_{j-2}}$ или следующие за $x_{\pi_{j+2}}$). Удалим из траектории суммирования все такие пятерки звеньев. В каждой из них содержится три β- и два γ-звена. В оставшейся (несвязной) части траектории количество β-звеньев будет строго меньше количества γ-звеньев; при этом каждое γ-звено инцидентно одному или двум β-звеньям, а каждое β-звено — не более чем одному γ-звену. Но это невозможно, так как в двудольном γ-β-графе инцидентности суммы степеней в обеих долях должны совпадать.

Из этого свойства также следует, что каждое γ-звено инцидентно в точности одному β-звену, а каждое β-звено — точно одному γ-звену. Таким образом, в траектории суммирования все γ- и β-звенья объединены в m непересекающихся пар, промежутки между которыми заполнены A-звеньями, что дает разбиение множества A на m подмножеств $A_1, \ldots, A_m$. Так как каждая γ-β-пара начинается в вершине d и кончается в вершине 0, то сумма A-чисел из каждого множества A_i в точности равна d, т. е. разбиение $\{A_1, \ldots, A_m\}$ является искомым для исходной задачи k-РАЗБИЕНИЕ.

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что при любом фиксированном λ величина k является константой, а длины записей входной информации задачи НСЧ1(λ) и задачи k-РАЗБИЕНИЕ по порядку равны. Отсюда следует полиномиальность процедуры сведения. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 следует, что если в теореме 1 ограничение $\|h_C(x)\| \geqslant 1$ заменить на $\|h_C(x)\| \geqslant 1 - \varepsilon$ при произвольном $\varepsilon > 0$, то происходит качественное изменение сложности задачи о нестрогом суммировании в C заданного семейства векторов. Именно, справедливо

Следствие 1. *Пусть задано число $\lambda \in (0,1)$, и пусть в пространстве $\mathbb{R}^2$ с нормой s задано выпуклое замкнутое неограниченное множество C, содержащее начало координат. Если длины (в норме s) всех O-хорд множества C не меньше λ, то проблема распознавания существования нестрогого суммирования в C произвольного s-семейства векторов является* NP*-трудной в сильном смысле.*

§ 2. Три задачи о нестрогом суммировании векторов

В приложениях метода нестрого суммирования векторов к задачам теории расписаний важную роль будут играть две специальные нормы $\tilde{s}$ и $\hat{s}$. Определим эти нормы, задав в пространстве $\mathbb{R}^m$ соответствующие единичные шары с центром в начале координат, а именно:

$$B_{\tilde{s},m} = \Big\{x \in \mathbb{R}^m \,\Big|\, \Big|\sum_{i=i_1}^{i_2} x(i)\Big| \leqslant 1, \quad \text{при любых } i_1, i_2 :\ 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant m\Big\},$$

$$B_{\hat{s},m} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x(i_1)| \leqslant 1, |x(i_1) - x(i_2)| \leqslant 1 \quad \text{при любых } i_1, i_2 :\ i_1, i_2 = 1, \ldots, m\},$$

где $x = (x(1), \ldots, x(m))$. Вид этих шаров в пространстве $\mathbb{R}^2$ показан на рис. 2.

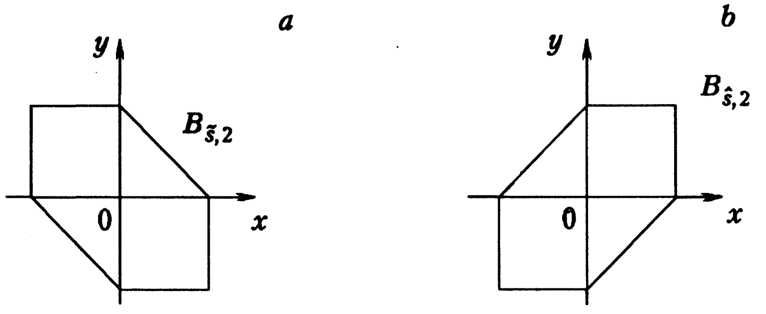

Рис. 2. Единичные шары норм $\tilde{s}$ и $\hat{s}$ в $\mathbb{R}^2$

Как видно из рис. 2, шары норм $\tilde{s}$ и $\hat{s}$ аффинно подобны в $\mathbb{R}^2$. Это верно и в произвольном пространстве $\mathbb{R}^m$. Действительно, линейное отображение $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, переводящее шар $B_{\tilde{s},m}$ в шар $B_{\hat{s},m}$, задается системой $f(x) = Fx$, где F — $(m \times m)$-матрица, элементы которой на главной диагонали и ниже равны единице, а остальные — нулю.

Из аффинного подобия норм $\tilde{s}$ и $\hat{s}$ следует, что их функции Штейница равны, а некоторые задачи о суммировании s-семейств векторов (в частности, задача КСВ) полиномиально эквивалентны.

Для любого вектора $a \in \mathbb{R}^m$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ определим полупространство $P(a,\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid (a,x) \leqslant \lambda\}$, где $(a,x) = \sum_{i=1}^m a(i)x(i)$. Пусть e_i — i-й орт пространства $\mathbb{R}^m$. Введем обозначение

$$P_i(\lambda) \doteq P(e_i,\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x(i) \leqslant \lambda\}. \tag{15}$$

Сформулируем три задачи о нестрогом суммировании векторов в семействах полупространств.

Задача НСВ1. *Для заданного $\tilde{s}$-семейства векторов $X = \{x_1,\dots,x_n\} \subset \mathbb{R}^m$ требуется найти перестановку $\pi = (\pi_1,\dots,\pi_n)$ и набор вещественных чисел $b = (\beta_1,\dots\beta_m)$, которые удовлетворяют условию $(X,\pi) \in S\{P_1(\beta_1),\dots,P_m(\beta_m)\}$ и минимизируют функционал*

$$\theta_1(b) = \sum_{j=1}^m \beta_j.$$

Задача НСВ2. *Для заданного $\hat{s}$-семейства векторов $X = \{x_1,\dots,x_n\} \subset \mathbb{R}^m$ требуется найти перестановку $\pi = (\pi_1,\dots,\pi_n)$ и набор вещественных чисел $b = (\beta_1,\dots,\beta_m)$, которые удовлетворяют условию $(X,\pi) \in S\{P_1(\beta_1),\dots,P_m(\beta_m)\}$ и минимизируют функционал*

$$\theta_2(b) = \max_{j=1,\dots,m} \beta_j.$$

Задача НСВ3. *Пусть $\{e_1,e_2\}$ — канонический базис в пространстве $\mathbb{R}^2$ и $a_1 = e_1$, $a_2 = e_2$, $a_3 = e_2 - e_1$, $a_4 = e_1 - e_2$. Тогда для заданного $\hat{s}$-семейства векторов $X = \{x_1,\dots,x_n\} \subset \mathbb{R}^2$ требуется найти перестановку $\pi = (\pi_1,\dots,\pi_n)$ и набор вещественных чисел $b = (\beta_1,\dots,\beta_4)$, которые удовлетворяют условию $(X,\pi) \in S\{P(a_1,\beta_1),\dots,P(a_4,\beta_4)\}$ и минимизируют функционал*

$$\theta_3(b) = \max\{\beta_1+\beta_3, \beta_2+\beta_4\}.$$

Далее ограничимся рассмотрением задач НСВ1 и НСВ2 при $m = 2$. (Задача НСВ3 по постановке относится к двумерному случаю.)

Пусть ν_i обозначает количество областей нестрогого суммирования в задаче НСВi. Таким образом, $\nu_1 = \nu_2 = 2$, $\nu_3 = 4$. Рассмотрим выпуклые множества $C_i(b)$, являющиеся пересечением областей нестрогого суммирования в каждой из задач НСВi:

$$C_1(b) = C_2(b) = P_1(\beta_1) \cap P_2(\beta_2); \; C_3(b) = \bigcap_{i=1}^{4} P(a_i, \beta_i).$$

Легко устанавливается следующее свойство множеств C_i.

Лемма 7. *Для любых чисел $\beta_i \in R^+$, образующих наборы $b' = (\beta_1, \beta_2)$, $b'' = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, и любой O-хорды h_C множества $C \in \{C_1(b'), C_2(b'), C_3(b'')\}$ справедливы оценки*

$$\left\| h_{C_1(b')} \right\|_{\tilde{s}} \geqslant \beta_1 + \beta_2;$$
$$\left\| h_{C_2(b')} \right\|_{\hat{s}} \geqslant (\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})^2;$$
$$\left\| h_{C_3(b'')} \right\|_{\hat{s}} \geqslant \min\{\beta_3 + \beta_4,\ \beta_1 + \beta_3,\ \beta_2 + \beta_4,\ \beta_1 + \beta_2 + 2\sqrt{\beta_1 \beta_2}\}.$$

Доказательство предоставляется читателю.

Если в лемме 7 в каждом из трех соотношений выбрать значения параметров $\beta_j \in \mathbb{R}^+$, обеспечивающие выполнение неравенства $\|h_{C_i}(x)\| \geqslant 1$ при всех $x \in \mathbb{R}^2$, то с учетом теоремы 1 получим возможность нестрогого суммирования всякого $\tilde{s}$-семейства X в области $C_1(b)$ при $b = (\beta_1, \beta_2)$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$, всякого $\hat{s}$-семейства X в области $C_2(b)$ при $b = (\beta_1, \beta_2)$, $\beta_1 = \beta_2 = 1/4$, и в области $C_3(b)$ при $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1/2$ соответственно. С учетом замечания 1 (см. § 2) получаем следствия теоремы 1.

Следствие 2. *Существует алгоритм трудоемкости $O(n \log n)$, находящий приближенное решение задачи НСВ1 в случае $m = 2$ с неулучшаемой оценкой $\theta_1(b) \leqslant 1 \doteq \theta_1^*$.*

Следствие 3. *Существует алгоритм трудоемкости $O(n \log n)$, находящий приближенное решение задачи НСВ2 в случае $m = 2$ с неулучшаемой оценкой $\theta_2(b) \leqslant 1/4 \doteq \theta_2^*$.*

Следствие 4. *Существует алгоритм трудоемкости $O(n \log n)$, находящий приближенное решение задачи НСВ3 с неулучшаемой оценкой $\theta_3(b) \leqslant 1 \doteq \theta_3^*$.*

Отметим еще одно свойство, вытекающее из доказательства теоремы 1. Из лемм 3 и 4 следует, что в тех случаях, когда при работе алгоритма (см. доказательство теоремы 1) частичная сумма вынуждена покинуть на один шаг множество C (ситуация леммы 5), мы можем, по своему выбору, оставить ее в C_2, выбрав $x_{\pi_{k+1}} = x_s$, или в C_1, выбрав $x_{\pi_{k+1}} = x_p$. Таким образом, всегда выбирая в такой ситуации вектор x_s, мы получаем такое нестрогое суммирование в C, которое является строгим по отношению к области $C \cup C_2 \subset C \cup L(a)$. Аналогично, выбирая вектор x_p, получаем строгое суммирование в области $C \cup C_1 \subset C \cup R(b)$. Применительно к задачам НСВ1, НСВ2 это дает следующий результат.

Следствие 5. *При решении задач* НСВ1 *и* НСВ2 *алгоритм, построенный при доказательстве теоремы* 1, *позволяет находить такое нестрогое суммирование s-семейства векторов в паре областей $\{P_1(b_1), P_2(b_2)\}$, которое является строгим по отношению к одной из них (по нашему выбору).*

Конкретизируя это следствие для задачи НСВ1, получаем утверждение, которое оказывается полезным при конструировании расписаний.

Следствие 6. *Для любых $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^+$, $\beta_1 + \beta_2 \geqslant 1$, и любого $\tilde{s}$-семейства векторов $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^2$ можно указать алгоритм трудоемкости $O(n \log n)$ для нахождения перестановок $\pi' = (\pi'_1, \dots, \pi'_n)$ и $\pi'' = (\pi''_1, \dots, \pi''_n)$ таких, что*

$$\min\{x_{\pi'}^{k-1}(1), x_{\pi'}^{k}(1)\} \leqslant \beta_1, \quad x_{\pi'}^{k}(2) \leqslant \beta_2, \quad k = 1, \dots, n;$$
$$\min\{x_{\pi''}^{k-1}(2), x_{\pi''}^{k}(2)\} \leqslant \beta_2, \quad x_{\pi''}^{k}(1) \leqslant \beta_1, \quad k = 1, \dots, n,$$

где $x_\pi^k = \sum_{j=1}^{k} x_{\pi_j}$.

Замечание 5. Определим для $x \in \mathbb{R}^m$ норму s_∞ следующим образом: $\|x\|_{s_\infty} = \max_{i=1,\dots,m} |x(i)|$. Тогда всякое $\tilde{s}$-семейство является в то же время и s_∞-семейством. Поскольку длина любой O-хорды множества $C_1(b)$ в норме s_∞ оценивается снизу той же величиной $\beta_1 + \beta_2$, следствие 6 обобщается на s_∞-семейства векторов.

Вернемся к следствиям 2–4. Отметим, что неулучшаемость сформулированных в них оценок понимается как их неулучшаемость не только для алгоритма, описанного в доказательстве теоремы 1, но для любого алгоритма. Утверждение о неулучшаемости оценок не следует из теорем 1, 2 и нуждается в отдельном доказательстве. В самом деле, из следствия 1 вытекает невозможность для каждой из задач НСВi ($i = 1, 2, 3$) и любого $\varepsilon > 0$ нестрогого суммирования в пересечении областей $\{P(a_k, \beta_k)\}$ с гарантированным значением функционала $\theta_i(b) \leqslant \theta_i^* - \varepsilon$. Но отсюда не следует невозможность нестрогого суммирования в семействе этих областей. Тем не менее, удается не только доказать неулучшаемость оценок в следствиях 2–4 при решении задач НСВi, но и установить NP-полноту соответствующих задач распознавания.

Пусть задано произвольное число $\lambda \in (0,1)$. Сформулируем три задачи на распознавание, которые назовем НСВ$i\,(\lambda)$ $(i = 1,2,3)$.

Задача НСВ$i\,(\lambda)$

Условие: *заданы число* $D \in \mathbb{Z}^+$ *и семейство* $X = \{x_1,\dots,x_n\} \subset \mathbb{Z}^m$ *такие, что* $\Sigma(X) = 0$, $\|x_j\| \leqslant D$ *при* $x_j \in X$.

Вопрос: *существуют ли перестановка* $\pi = (\pi_1,\dots,\pi_n)$ *и вектор* $b = (\beta_1,\dots,\beta_{\nu_i})$ *такие, что* $(X,\pi) \in S\{P(a_1,\beta_1),\dots,P(a_{\nu_i},\beta_{\nu_i})\}$ *и* $\theta_i(b) \leqslant \lambda\theta_i^* D$?

Под нормой вектора в каждой из задач НСВ$i\,(\lambda)$ понимается норма, определенная в задаче НСВi.

Теорема 3. *При любом* $\lambda \in (0,1)$ *каждая из задач* НСВ$i\,(\lambda)$ $(i = 1,2,3)$ *является* NP-*полной в сильном смысле.*

Доказательство. Вектор $x \in \mathbb{R}^2$ для задачи НСВi назовем вектором с *критическим направлением*, если для любого $b \in (\mathbb{R}^+)^{\nu_i}$ из $\theta_i(b) < \theta_i^*$ следует $\|h_{C_i(b)}(x)\| < 1$ по норме, определенной в задаче НСВi. O-хорду $h_{C_i(b)}(x)$, определенную для вектора x с критическим направлением, также будем называть *критической* O-хордой. Нетрудно убедиться, что критическими являются O-хорды $h_{C_1}(e_1 - e_2)$, $h_{C_2}(e_1 - e_2)$ и $h_{C_3}(e_1)$, поскольку

$$
\begin{aligned}
&\|h_{C_1}(e_1 - e_2)\|_{\tilde{s}} = \beta_1 + \beta_2 = \theta_1(\beta),\\
&\|h_{C_2}(e_1 - e_2)\|_{\hat{s}} = 2\beta_1 + 2\beta_2 \leqslant 4\max\{\beta_1,\beta_2\} = 4\theta_2(b),\\
&\|h_{C_3}(e_1)\|_{\hat{s}} = \min\{\beta_1 + \beta_3, \beta_4 + \beta_3\} \leqslant \beta_1 + \beta_3 \leqslant \theta_3(b).
\end{aligned}
$$

Для доказательства NP-трудности задач НСВi нам вновь достаточно рассмотреть лишь семейства коллинеарных векторов (параллельных критической O-хорде соответствующего множества C_i). Поэтому фактически речь будет идти о задачах нестрогого суммирования чисел. Эти задачи, как будет видно из последующих их формулировок, отличаются от рассмотренной ранее задачи НСЧ1.

Задача НСЧ2. *Для заданного (четного) числа* $B' \in \mathbb{Z}^+$ *и семейства чисел* $Z = \{z_i \mid i = 1,\dots,n\} \subset \mathbb{Z}$, $\Sigma(Z) = 0$, *требуется найти перестановку* $\pi = (\pi_1,\dots,\pi_n)$ *такую, что для любого* $k = 1,\dots,n$

$$
\begin{aligned}
&\text{из } z_\pi^{k-1} > B'/2 \quad \text{следует } z_\pi^k \leqslant B'/2,\\
&\text{из } z_\pi^{k-1} < -B'/2 \quad \text{следует } z_\pi^k \geqslant -B'/2.
\end{aligned}
$$

Задача НСЧ3. *Для заданного числа* $B' \in \mathbb{Z}^+$ *и семейства чисел* $Z = \{z_i \mid i = 1,\dots,n\} \subset \mathbb{Z}$, $\Sigma(Z) = 0$ *требуется найти число* $a \in [-B',0]$

и перестановку $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ *такие, что для любого* $k = 1, \dots, n$

$$\begin{array}{ll} \text{из } z_\pi^{k-1} > a + B' & \text{следует } z_\pi^k \leqslant a + B', \\ \text{из } z_\pi^{k-1} < a & \text{следует } z_\pi^k \geqslant a. \end{array}$$

В обеих задачах речь идет о нестрогом суммировании чисел в отрезке $[a, a+B']$. Но в отличие от задачи НСЧ1 нестрогое суммирование должно выполняться независимо для верхней и нижней границы отрезка (что, в принципе, дает возможность траектории суммирования вообще не иметь вершин в данном отрезке, кроме начальной и конечной). Кроме того, в задаче НСЧ2 этот отрезок фиксирован, а в задаче НСЧ3 задана лишь его длина.

Пусть задано число $\lambda \in (0,1)$. Положим $t = \left\lceil \frac{3\lambda}{2(1-\lambda)} \right\rceil$, $k = 2t+1$ и к каждой из задач НСВ$i(\lambda)$ будем сводить (через промежуточную инстанцию НСЧ2 или НСЧ3) уже известную NP-полную в сильном смысле задачу k-РАЗБИЕНИЕ при определенном выше k. (Очевидно, что $k \geqslant 3$.)

Пусть задан вход задачи k-РАЗБИЕНИЕ, т. е. число $B \in \mathbb{Z}^+$, множество $A = \{1, \dots, km\}$ и размеры $s(i) \in \mathbb{Z}^+$ всех элементов $i \in A$ такие, что $\sum_{i \in A} s(i) = Bm$ и

$$\frac{B}{(k+1)} < s(i) < \frac{B}{(k-1)}. \tag{16}$$

Положим $n = km + 3m + 3 + 2t$, $B' = 2tB$, $D = \lceil B'/\lambda \rceil$. Тогда семейство чисел $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ для задачи НСЧ2 определяется следующим образом:

$$z_i = \begin{cases} s(i) \cdot 2t, & i = 1, \dots, km \\ & (A\text{-числа}); \\ \lfloor (D - B')/2 \rfloor \doteq \alpha', & i = km+1, \dots, (k+1)m+1 \\ & (\alpha'\text{-числа}); \\ \lceil (D - B')/2 \rceil \doteq \alpha'', & i = (k+1)m+2, \dots, (k+2)m+2 \\ & (\alpha''\text{-числа}); \\ -D \doteq \gamma, & i = (k+2)m+3, \dots, (k+3)m+3 \\ & (\gamma\text{-числа}) \\ B' \doteq \delta, & i = (k+3)m+4, \dots, n \\ & (\delta\text{-числа}). \end{cases}$$

Семейство чисел Z' для задачи НСЧ3 получается из Z удалением всех δ-чисел и по одному α'-, α''- и γ-числу.

Нетрудно убедиться, что в обоих случаях $|z_i| \leqslant D$ при каждом i и $\sum z_i = 0$. Кроме того, по определению t имеем

$$z_i < B \leqslant \alpha' \quad \text{для каждого} \quad i \in A. \tag{17}$$

Покажем, что задачи НСЧ2 и НСЧ3 имеют положительное решение при заданном числе B' и семействе чисел $\{z_i\}$ если и только если в задаче k-РАЗБИЕНИЕ существует разбиение $\{A_1, \dots, A_m\}$ множества A такое, что

$$\sum_{i \in A_j} s(i) = B, \quad j = 1, \dots, m.$$

Если существует такое разбиение $\{A_1, \dots, A_m\}$, то искомые перестановки π^2, π^3 в задачах НСЧ2, НСЧ3 определяются последовательностями номеров

$$\begin{aligned}\pi^2 = (\delta_1 \cdots \delta_t \alpha_1'' \gamma_1 \alpha_1' \widetilde{A}_1 \alpha_2'' \gamma_2 \alpha_2' \widetilde{A}_2 \cdots \\ \alpha_m'' \gamma_m \alpha_m' \widetilde{A}_m \alpha_{m+1}'' \gamma_{m+1} \alpha_{m+1}' \delta_{t+1} \cdots \delta_{2t}), \\ \pi^3 = (\alpha_1'' \gamma_1 \alpha_1' \widetilde{A}_1 \cdots \alpha_m'' \gamma_m \alpha_m' \widetilde{A}_m),\end{aligned}$$

где

$\widetilde{A}_i$ — любая перестановка номеров из множества A_i;
$(\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1})$ — любая перестановка номеров φ-чисел, $\varphi \in \{\alpha', \alpha'', \gamma\}$;
$(\delta_1, \dots, \delta_{2t})$ — любая перестановка номеров δ-чисел.

Ясно, что перестановка π^2 задает такое нестрогое суммирование чисел Z в отрезке $[-Bt, Bt]$, которое требуется в задаче НСЧ2, а перестановка π^3 — суммирование чисел Z' в отрезке $[-B', 0]$ для задачи НСЧ3. Для каждой из двух задач докажем обратное утверждение.

Пусть некоторая перестановка π задает нестрогое суммирование чисел Z в отрезке $[-Bt, Bt]$. Как и в задаче НСЧ1 последовательно соединим частичные суммы $z_\pi^0, \dots, z_\pi^n$ звеньями ломаной и будем говорить о траектории суммирования. Поскольку каждое γ-звено превосходит длину отрезка $[-Bt, Bt]$ на $\alpha' + \alpha''$ и согласно (17) α'-, α''-звенья суть самые длинные звенья, идущие в положительном направлении, для обеспечения нестрогого суммирования в отрезке длины B' необходимо, чтобы каждое γ-звено было инцидентно хотя бы одному α''-звену. (Если $\alpha' = \alpha''$, то нам не важно, какие из них считать α''-звеньями.) А поскольку число γ-звеньев совпадает с числом α''-звеньев, каждое γ-звено инцидентно точно одному α''-звену и точно одному α'-звену. (Снова если $\alpha' = \delta$, то α'- и δ-числа взаимозаменяемы.) Таким образом, α'-, α''- и γ-звенья объединяются в $m + 1$ троек, промежутки между которыми в траектории суммирования заполняются A- и δ-звеньями. А поскольку каждая тройка $\alpha_i''\gamma_i\alpha_i'$ начинается в точке $Bt = a + B'$ и заканчивается в точке $a = -Bt$, суммарная длина звеньев каждого промежутка в точности равна B'. Покажем, что все δ-звенья содержатся в одном промежутке, которому принадлежат начальный и конечный отрезки замкнутой траектории суммирования.

Действительно, начальный отрезок $[0, B'/2]$ траектории заполнен, как известно, A- и δ-звеньями. Из (16) и (17) следует, что суммарная длина любых $t+1$ таких звеньев превосходит Bt, а длина любых t из них не превосходит Bt, причем эта длина равна Bt, если и только если все звенья являются δ-звеньями. Аналогично, конечный отрезок $[-B'/2, 0]$ траектории тоже заполнен t δ-звеньями, что и доказывает наше утверждение.

Таким образом, все остальные промежутки между тройками заполнены только A-звеньями, что дает искомое разбиение в задаче k-РАЗБИЕНИЕ.

Пусть теперь в задаче НСЧ3 перестановка π задает нестрогое суммирование чисел Z' в некотором отрезке $[a, a + B']$. Тогда аналогично получаем объединение α'-, α''- и γ-звеньев в m троек, m промежутков между которыми (каждый длины B') заполнены только A-звеньями, что и дает искомое разбиение $\{A_1, \ldots, A_m\}$.

Теперь по семействам чисел Z и Z' в задачах НСВ$i\,(\lambda)$ определим семейства векторов X_i:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \{x_j = (z_j, -z_j) \mid z_j \in Z'\}, & \|x_j\|_{\hat{s}} &\leqslant D & &\text{при } x_j \in X_1;\\
X_2 &= \{x_j = (z_j, -z_j) \mid z_j \in Z\}, & \|x_j\|_{\hat{s}} &\leqslant 2D & &\text{при } x_j \in X_2;\\
X_3 &= \{x_j = (z_j, 0) \mid z_j \in Z'\}, & \|x_j\|_{\hat{s}} &\leqslant D & &\text{при } x_j \in X_3.
\end{aligned}$$

Убедимся, что решения задач НСВ1 и НСВ3 со значениями $\theta_i(b) \leqslant \lambda\theta_i^* D$ существуют, если и только если имеется решение задачи НСЧ3, и существует решение задачи НСВ2 со значением $\theta_2(b) \leqslant 2\lambda\theta_2^* D$, если и только если имеется решение задачи НСЧ2.

Пусть в задаче НСЧ3 имеется перестановка π, задающая нестрогое суммирование чисел Z' в некотором отрезке $[a, a+B']$, $a \in [-B', 0]$. Тогда в задаче НСВ1 эта же перестановка задает нестрогое суммирование векторов X_1 в паре областей $\{P_1(a + B'), P_2(-a)\}$ со значением функционала $\theta_1(b) = B' \leqslant \lambda D = \lambda\theta_1^* D$, а в задаче НСВ3 она обеспечивает суммирование векторов X_3 в областях $\{P(a_i, \beta_i) \mid i = 1, \ldots, 4\}$ при $\beta_1 = \beta_4 = a + B'$, $\beta_2 = \beta_3 = -a$. При этом получаем $\theta_3(b) = B' \leqslant \lambda D = \lambda\theta_3^* D$.

Обратно, пусть имеется решение задачи НСВ3 (вектор b и перестановка π) со значением $\theta_3(b) \leqslant \lambda D$. Так как все векторы из X_3 имеют целочисленные координаты, очевидно, существует и целочисленное решение b задачи НСВ3 с не худшим значением функции $\theta_3(b)$, т. е. $\theta_3(b) \leqslant \lfloor \lambda D \rfloor = B'$. Следовательно, $\left\|h_{C_3}(e_1)\right\|_{\hat{s}} \leqslant B'$ и перестановка π является решением задачи НСЧ3. К такому же выводу приходим из существования решения задачи НСВ1 со значением $\theta_1(b) \leqslant \lambda D$.

Зависимость между задачами НСВ2 и НСЧ2 проверяется аналогично. Для завершения доказательства NP-трудности задач НСВ$i(\lambda)$ достаточно заметить, что при любом фиксированном $\lambda \in (0,1)$ размер входа задачи НСВ$i(\lambda)$ совпадает по порядку с размером входа задачи k-РАЗБИЕНИЕ. Наконец, NP-полнота задач НСВ$i(\lambda)$ следует из того, что при ограниченных сверху значениях функционалов $\theta_i(b)$ проверка существования подходящего вектора b сводится к перебору конечного числа вариантов. Теорема 3 доказана.

В следующем параграфе мы рассмотрим приложение этих результатов к задачам теории расписаний.

§ 3. Три задачи теории расписаний

Сформулируем общую задачу составления расписания, частными случаями которой являются рассматриваемые ниже задачи.

Задача G. *Имеется множество машин $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m\}$ и множество работ $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$. Каждая работа j состоит из m операций $O^j = \{o_1^j, \dots, o_m^j\}$, причем операция o_i^j выполняется на машине i, $1 \leqslant i \leqslant m$. На каждом множестве O^j задано отношение частичного порядка $\to$; запись $o' \to o''$ означает, что операция o'' может выполняться лишь после завершения операции o'.*

Предполагаются выполненными следующие условия:

— *При любых i, j известна длительность t_{ji} операции o_i^j.*

— *Операции неразрывны, т. е. начав выполняться в момент s_{ji}, операция выполняется в течение всего интервала $I_{ji} = [s_{ji}, s_{ji} + t_{ji})$.*

— *Выполнено свойство $(\star)$:*

Для любой машины $i \in \mathcal{M}$ и любых работ $j, j' \in \mathcal{N}$
интервалы $I_{ji}, I_{j'i}$ не пересекаются.

Требуется найти расписание $S = \{s_{ji} \geqslant 0 \mid j \in \mathcal{N}, i \in \mathcal{M}\}$ выполнения работ на машинах, удовлетворяющее перечисленным выше ограничениям и такое, что величина $T(S) \doteq \max_{j,i}(s_{ji} + t_{ji})$ (традиционно именуемая «длиной расписания») принимает минимальное значение.

Далее мы рассмотрим задачу Джонсона (иначе — flow shop, или FS), задачу о сборочной линии (СЛ) и задачу перекрещивающихся маршрутов (ПМ). В рамках общей задачи G эти три задачи отличаются лишь частичными порядками на множествах O^j, что задает различную технологию выполнения работ $j \in \mathcal{N}$.

Задача FS. *В условиях задачи G требуется найти расписание минимальной длины, если на каждом множестве операций O^j частичный порядок задан соотношениями $o_1^j \to o_2^j \to \dots \to o_m^j$.*

Задача СЛ. *В условиях задачи G требуется найти расписание минимальной длины, если на каждом множестве операций O^j частичный порядок задан соотношениями $o_i^j \to o_m^j$, при $i = 1, \dots, m-1$.*

Задача ПМ. *В условиях задачи G при $m = 3$ требуется найти расписание минимальной длины, если все множество работ есть объединение множеств работ двух типов: $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$, и для каждой работы j частичный порядок на множестве O^j задан соотношениями $o_1^j \to o_2^j \to o_3^j$ при $j \in \mathcal{N}_1$ и $o_2^j \to o_1^j \to o_3^j$ при $j \in \mathcal{N}_2$.*

Из свойства ($\star$) задачи G следует, что на каждой машине i, $i = 1, \dots, m$, работы выполняются в некоторой последовательности $\pi^i = (\pi_1^i, \dots, \pi_n^i)$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\sigma_1^{\pi_1} & \to & \sigma_1^{\pi_2} & \to & \cdots & \to & \sigma_1^{\pi_n} \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\sigma_2^{\pi_1} & \to & \sigma_2^{\pi_2} & \to & \cdots & \to & \sigma_2^{\pi_n} \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\sigma_m^{\pi_1} & \to & \sigma_m^{\pi_2} & \to & \cdots & \to & \sigma_m^{\pi_n}
\end{array}
$$

Рис. 3. Сеть G_π

Решения задач FS и СЛ мы будем искать в классе так называемых *перестановочных* расписаний, т. е. таких, в которых все перестановки $\{\pi^i \mid i = 1, \dots, m\}$ совпадают. Тем самым, расписание задается единственной перестановкой работ π. В таком расписании схема отношений предшествования на множестве всех операций задается отношениями $o_i^{\pi_1} \to o_i^{\pi_2} \to \cdots \to o_i^{\pi_n}$, $i \in \mathcal{M}$, и отношениями на множествах O^j, $j \in \mathcal{N}$. По этой модели естественным образом строится сетевая модель G_π типа «операции»–«вершины», в которой операциям множества $\mathcal{O} = \cup_{j \in \mathcal{N}} O^j$ соответствуют вершины сети, а дуга из вершины o' в вершину o'' задает отношение предшествования $o' \to o''$ на паре операций $\{o', o''\}$. Ясно, что для точного отражения в сетевой модели G_π всех отношений предшествования на множестве $\mathcal{O}$ достаточно ограничиться дугами, не являющимися транзитивными замыканиями других дуг сети. (Пример такой сети G_π для задачи FS показан на рис. 3.) Наиболее раннее расписание в сети G_π будем обозначать S_π. Как известно из сетевого планирования, длина расписания S_π, удовлетворяющего G_π, равна сумме длительностей операций в критическом пути (т. е. пути наибольшей длины) в сети G_π. Отсюда и из вида сети G_π нетрудно получить формулу длины расписания S_π для задач FS и СЛ соответственно:

$$T(S_\pi) = \max_{1\leqslant k_1\leqslant\dots\leqslant k_{m-1}\leqslant n}\Big(\sum_{j=1}^{k_1} t_{\pi_j 1} + \sum_{j=k_1}^{k_2} t_{\pi_j 2} + \ldots + \sum_{j=k_{m-1}}^{n} t_{\pi_j m}\Big), \tag{18}$$

$$\begin{aligned} T(S_\pi) &= \max_{i=1,\dots,m-1}\ \max_{k=1,\dots,n}\Big(\sum_{j=1}^{k} t_{\pi_j i} + \sum_{j=k}^{n} t_{\pi_j m}\Big) \\ &= \max_i \max_k \Big(\sum_{j=1}^{k} t_{\pi_j i} - \sum_{j=1}^{k-1} t_{\pi_j m}\Big) + M. \end{aligned} \tag{19}$$

Введем следующие обозначения:

$$M_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji}, \quad M = \max_i M_i, \quad K = \max_{j,i} t_{ji}.$$

Из свойства $(\star)$ задачи G следует, что длина $T(S)$ любого расписания S удовлетворяет неравенству

$$T(S) \geqslant M. \tag{20}$$

Длину каждого из получаемых приближенных расписаний мы будем оценивать сверху величиной вида $M + \varphi K$, где $K = \max_{j,i} t_{ji}$ выступает в роли коэффициента пропорциональности всех параметров задачи, имеющих размерность времени: s_{ji}, $T(S)$, M_i и др. (Без ограничения общности далее можем считать, что $K = 1$.) Ввиду (20) для получаемого расписания S справедлива следующая верхняя оценка его относительной погрешности:

$$\frac{T(S) - T(S_{\text{opt}})}{T(S_{\text{opt}})} \leqslant \frac{\varphi}{M}. \tag{21}$$

Ясно, что если какой-то алгоритм гарантирует оценку вида (21) с величиной φ, не зависящей от n, то при неограниченном росте величины M с ростом n (а это является естественным допущением, поскольку M есть сумма длительностей n операций) получаем асимптотическую оптимальность алгоритма на последовательности входов данной задачи при растущем числе работ n и ограниченном числе машин m.

В дальнейших выкладках будем считать, что

$$M_i = M, \; i = 1, \ldots, m. \tag{22}$$

Если это не так, т. е. $M_i < M$ для некоторого i, то мы можем добиться равенства (22), увеличив длительности отдельных операций машины i и сохраняя неизменными величины M и K. (Трудоемкость процедуры «выравнивания» по всем машинам не превосходит $O(nm)$.) Построив расписание для полученного входа задачи, удовлетворяющего (22), мы вернемся к исходным длительностям, сохраняя расписание $S = \{s_{ji}\}$. Ясно, что при этом любая оценка вида $T(S) \leqslant M + \varphi K$ останется справедливой.

Докажем теоремы, устанавливающие связь задач FS, СЛ, ПМ с задачами нестрогого суммирования векторов.

Теорема 4. *Пусть алгоритм $\mathcal{A}$ при любых натуральных n и m для любого $\tilde{s}$-семейства $X \subset \mathbb{R}^m$ с трудоемкостью $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(m,n)$ решает задачу* НСВ1 *с гарантированной оценкой*

$$\theta_1(b) \leqslant \theta_1^*(m). \tag{23}$$

Тогда для задачи FS *с m машинами и n работами можно предложить алгоритм трудоемкости $O(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(m-1,n)+mn)$, который для всякого входа задачи строит перестановочное расписание S_π длины*

$$T(S_\pi) \leqslant M + (m - 1 + \theta_1^*(m-1))K.$$

Доказательство. Полагая для простоты $\pi = (1, 2, \ldots, n)$, формулу (18) преобразуем к виду

$$T(S_\pi) = \max_{\{k_i\}} \sum_{i=1}^{m-1} \Big(\sum_{j=1}^{k_i} t_{ji} - \sum_{j=1}^{k_i-1} t_{j,i+1} \Big) + \sum_{j=1}^{n} t_{jm}$$
$$\leqslant M + \sum_{i=1}^{m-1} \max_{k=1,\ldots,n} \Big(\sum_{j=1}^{k} t_{ji} - \sum_{j=1}^{k-1} t_{j,i+1} \Big). \tag{24}$$

Для каждого $j = 1, \ldots, n$ определим вектор $x_j = (x_j(1), \ldots, x_j(m-1)) \in \mathbb{R}^{m-1}$, где $x_j(i) = t_{ji} - t_{j,i+1}$. Из (22) следует, что $\sum_{j=1}^n x_j = 0$. Кроме того, при любых i_1, i_2 таких, что $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant m-1$, имеем

$$\Big| \sum_{i=i_1}^{i_2} x_j(i) \Big| \leqslant 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, семейство векторов $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ в пространстве $\mathbb{R}^{m-1}$ образует $\tilde{s}$-семейство.

Обозначив $x_\pi^k = \sum_{j=1}^k x_j$, преобразуем (24) к виду

$$T(S_\pi) \leqslant M + \sum_{i=1}^{m-1} \max_{k=1,\dots,n} (\min\{x_\pi^k(i), x_\pi^{k-1}(i)\} + 1)$$
$$= M + m - 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \max_{k=1,\dots,n} \min\{x_\pi^k(i), x_\pi^{k-1}(i)\}.$$

Отсюда видим, что если перестановка π задает нестрогое суммирование векторов x_j в каждой из областей $\{P_i(\beta_i) \mid i = 1, \dots, m-1\}$, определенных в (15) и удовлетворяющих (23), то длина $T(S_\pi)$ перестановочного расписания S_π удовлетворяет неравенству

$$T(S_\pi) \leqslant M + m - 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i \leqslant M + m - 1 + \theta_1^*(m-1).$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Для любого входа задачи Джонсона с тремя машинами и n работами оптимальное значение ее целевой функции лежит в интервале $F_1 = [M, M + 3K]$, и границы интервала точны. Существует алгоритм трудоемкости $O(n \log n)$, с помощью которого для всякого входа находится приближенное расписание со значением длины из интервала F_1.*

Доказательство. Теорема, кроме утверждения о точности границ интервала F_1, вытекает из теоремы 4 и следствия 2.

Точность нижней границы интервала F_1 показывается на тривиальных примерах. Верхняя граница интервала F_1 достигается в пределе на последовательности входов задачи Джонсона, определяемых по любому заданному $\varepsilon > 0$ следующим образом. Множество работ состоит из работ двух видов: p работ с векторами длительностей $(1, 0, 1)$, где $p \geqslant \frac{2}{\varepsilon} - 1$, и q работ с векторами длительностей $(1 - \delta, 1, 1 - \delta)$, где $q > 4p/\varepsilon$, $\delta = p/q$. Теорема 5 доказана.

Отметим, что следствие 6 позволяет строить расписания, не только удовлетворяющие указанной выше оценке, но и обладающие специальными свойствами, о которых говорится в следующей лемме.

Лемма 8. *Для любого входа задачи flow shop с тремя машинами и n работами, удовлетворяющего (22) и равенству $K = 1$, и любого $\beta \in [1, 2]$ с трудоемкостью $O(n \log n)$ находятся перестановочные расписания $S_{\pi'}$, $S_{\pi''}$, в которых 1-я машина работает непрерывно в интервале $[0, M]$,* *2-я — в интервале* $[\beta, \beta + M]$, *3-я — в интервале* $[3, 3 + M]$; *при этом*

$$\sum_{j=1}^{k} t_{\pi'_j 1} \leqslant (\beta - 1) + \sum_{j=1}^{k} t_{\pi'_j 2}, \quad k = 1, \dots, n,$$
$$\sum_{j=1}^{k} t_{\pi''_j 2} \leqslant (2 - \beta) + \sum_{j=1}^{k} t_{\pi''_j 3}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Перейдем к задаче СЛ.

Теорема 6. *Пусть алгоритм* $\mathcal{A}$ *при любых натуральных* m *и* n *для любого* $\hat{s}$*-семейства* $X \subset \mathbb{R}^m$ *с трудоемкостью* $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(m, n)$ *решает задачу* НСВ2 *с гарантированной оценкой*

$$\theta_2(b) \leqslant \theta_2^*(m). \tag{25}$$

Тогда для задачи СЛ с m *машинами и* n *работами можно предложить алгоритм трудоемкости* $O(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(m-1, n)+mn)$, *который для всякого входа задачи строит перестановочное расписание* S_π *длины*

$$T(S_\pi) \leqslant M + (1 + \theta_2^*(m - 1))K.$$

Доказательство. Вновь для простоты считаем выполненным условие (22) и $\pi = (1, 2, \dots, n)$. При $j \in \mathcal{N}$ определим векторы $x_j \in \mathbb{R}^{m-1}$ следующим образом:

$$x_j = (x_j(1), \dots, x_j(m - 1)) = (t_{j1} - t_{jm}, \dots, t_{j,m-1} - t_{jm}). \tag{26}$$

Тогда при $K = 1$ получаем $\hat{s}$-семейство векторов $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^{m-1}$. С использованием этих обозначений, преобразуем (19)

$$T(S_\pi) \leqslant M + 1 + \max_i \max_k \min\{x_\pi^k(i), x_\pi^{k-1}(i)\}.$$

Отсюда видим, что если перестановка π задает нестрогое суммирование векторов x_j в областях $P_i(\beta_i)$, определяемых по формуле (15) и удовлетворяющих (25), то длина $T(S_\pi)$ перестановочного расписания S_π удовлетворяет неравенству

$$T(S_\pi) \leqslant M + 1 + \max_{i=1,\dots,m-1} \beta_i = M + 1 + \theta_2(b) \leqslant M + 1 + \theta_2^*(m - 1).$$

Теорема 6 доказана.

С учетом следствия 3 получаем следующий результат.

Теорема 7. *Для любого входа задачи о сборочной линии с тремя машинами и n работами оптимальное значение ее целевой функции лежит в интервале $F_2 = [M, M + 1{,}25K]$, и границы интервала точны. Существует алгоритм трудоемкости $O(n \log n)$, с помощью которого для всякого входа можно найти приближенное расписание со значением длины из интервала F_2.*

Доказательство. Вновь, как и в теореме 5, нам остается показать лишь точность границ интервала F_2. Точность нижней границы этого интервала показывается на тривиальных примерах. Верхняя граница интервала F_2 достигается в пределе (при $n \to \infty$) на последовательности входов задачи о сборочной линии с $n+1$ работами, в которых n работ имеют вектор длительностей $(1, 1-1/n, 1-1/2n)$ и одна работа — вектор длительностей $(0, 1, 1/2)$. Теорема 7 доказана.

Теорема 8. *Для любого входа задачи перекрещивающихся маршрутов с n работами оптимальное значение ее целевой функции лежит в интервале $F_3 = [M, M + 4K]$. Существует алгоритм трудоемкости $O(n \log n)$, с помощью которого для всякого входа найдется приближенное расписание со значением длины из интервала F_3.*

Доказательство. Определим $\hat{s}$-семейство векторов $X = \{x_j \in \mathbb{R}^2 \mid j = 1, \ldots, n\}$ согласно (26) и решим для него задачу НСВЗ. Согласно следствию 4 с трудоемкостью $O(n \log n)$ находится перестановка $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$, задающая нестрогое суммирование векторов X во множестве полуплоскостей $\{P(a_1, \beta_1), \ldots, P(a_4, \beta_4)\}$ с $\theta_3(b) \leqslant 1$. Полученную перестановку π используем для задания приоритетных порядков операций каждой машины в жадном алгоритме построения расписания, описываемом следующими двумя правилами.

1. Если в какой-то момент машина свободна и есть готовые к выполнению на ней работы, то машина начинает выполнять одну из них.
2. Из двух операций $o_i^{\pi_j}, o_i^{\pi_k}$, ожидающих выполнения на машине i, приоритет отдается операции работы, стоящей раньше в перестановке π (т. е. работе π_j, если $j < k$).

Замечаем, что работа жадного алгоритма в основном состоит из работы с очередями операций на машинах (постановка в очередь, удаление из очереди). Поэтому на ее реализацию требуется не более $O(n \log n)$ вычислительных операций. Такую же трудоемкость имеет алгоритм решения задачи НСВЗ, что дает требуемую оценку трудоемкости всего алгоритма. Докажем, что длина $T(S)$ получаемого расписания S удовлетворяет неравенству

$$T(S) \leqslant M + 4K. \tag{27}$$

Предположим, что работы занумерованы согласно перестановке $\pi = (1, 2, \ldots, n)$. Пусть $o_{i_1}^j$ — первая операция работы j. Так как первая операция всегда готова к исполнению, то она не может пропустить вперед ни одной менее приоритетной операции, а машина i_1 до момента s_{ji_1} не имеет простоев. Отсюда для момента f_{ji_1} окончания операции $o^j_{i_1}$ справедливо неравенство

$$f_{ji_1} \leqslant \sum_{k=1}^{j} t_{ki_1} \doteq T^j_{i_1}. \tag{28}$$

Пусть $o^j_{i_2}$ — вторая операция работы j. Расписание машины i_2 представляет собой чередование интервалов работы и интервалов простоя. Пусть $[s,f)$ — интервал работы, внутри которого выполняется операция $o^j_{i_2}$; $o^{j_1}_{i_2}, o^{j_2}_{i_2}, \ldots, o^{j_\nu}_{i_2}$ — такая максимальная цепочка операций, выполняемых на машине i_2 до момента f_{ji_2} в этом порядке, что

— $j_1 < j_2 < \cdots < j_\nu = j$;

— в интервале $[s_{j_1 i_2}, f_{ji_2})$ не выполняется других операций и нет простоев машины i_2.

Ясно, что $[s_{j_1 i_2}, f_{ji_2}) \subseteq [s,f)$. Из максимальности цепочки следует, что возможны три случая.

Случай 1: $s_{j_1 i_2} = 0$. Тогда $f_{ji_2} = \sum_{k=1}^{\nu} t_{j_k i_2} \leqslant \sum_{k=1}^{j} t_{ki_2} = T^j_{i_2}$.

Случай 2: $s_{j_1 i_2} = s > 0$. Так как операции $o^{j_1}_{i_2}$ на машине i_2 предшествует простой, следовательно $o^{j_1}_{i_2}$ — вторая операция работы j_1 и $s_{j_1 i_2} = f_{j_1 i_1}$, где $o^{j_1}_{i_1}$ — первая операция работы j_1. С учетом (28) получаем

$$\begin{aligned} f_{ji_2} = s_{j_1 i_2} + \sum_{k=1}^{\nu} t_{j_k i_2} &\leqslant \sum_{k=1}^{j_1} t_{ki_1} - \sum_{k=1}^{j_1-1} t_{ki_2} + \sum_{k=1}^{j_1-1} t_{ki_2} + \sum_{k=1}^{\nu} t_{j_k i_2} \\ &\leqslant \min\left\{ \sum_{k=1}^{j_1-1} (t_{ki_1} - t_{ki_2}), \sum_{k=1}^{j_1} (t_{ki_1} - t_{ki_2}) \right\} + 1 + T^j_{i_2}. \end{aligned}$$

Случай 3: $s_{j_1 i_2} > s$. Тогда операции $o^{j_1}_{i_2}$ на машине i_2 предшествует какая-то менее приоритетная операция o'. Это означает, что в этом случае $o^{j_1}_{i_2}$ является второй операцией работы j_1 и операция o' началась раньше момента $f_{j_1 i_1}$ прихода работы j_1 на машину i_2. Отсюда $s_{j_1 i_2} - f_{j_1 i_1} < 1$. Таким образом, верхняя оценка величины f_{ji_2} из предыдущего пункта увеличивается на единицу.

В двух последних случаях имеем

$$f_{ji_2} < T^j_{i_2} + 2 + \min\Big\{ \sum_{k=1}^{j_1-1}(t_{ki_1} - t_{ki_2}), \sum_{k=1}^{j_1}(t_{ki_1} - t_{ki_2})\Big\}, \qquad (29)$$

причем работы j и j_1 принадлежат одному и тому же множеству $\mathcal{N}_k$.

Если $j \in \mathcal{N}_1$, то в формуле (29) имеем $i_1 = 1, i_2 = 2$. Пользуясь определением (26) векторов x_j и учитывая, что перестановка $\pi = (1, 2, \dots, n)$ задает их нестрогое суммирование в семействе полуплоскостей $\{P(a_1, \beta_1), \dots, P(a_4, \beta_4)\}$, из (29) получаем следующую оценку:

$$f_{ji_2} < T^j_{i_2} + 2 + \min\{x^{j_1-1}_\pi(1) - x^{j_1-1}_\pi(2), x^{j_1}_\pi(1) - x^{j_1}_\pi(2)\} \leqslant T^j_{i_2} + 2 + \beta_4.$$

Ясно, что эта оценка справедлива и в первом из трех рассмотренных выше случаев.

При $j \in \mathcal{N}_2$ из равенств $i_1 = 2, i_2 = 1$ аналогично получаем оценку, справедливую во всех трех случаях,

$$f_{ji_2} < T^j_{i_2} + 2 + \beta_3.$$

Момент f_{ji_2} является моментом прихода работы j на машину 3 для выполнения последней операции. В терминах длительностей операций на машине 3 этот момент оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} f_{ji_2} < (T^j_{i_2} - T^{j-1}_3) + T^{j-1}_3 + 2 + \beta_4 \leqslant T^{j-1}_3 + 3 + \beta_4 \\ + \min\{x^{j-1}_\pi(2), x^j_\pi(2)\} = T^{j-1}_3 + 3 + \beta_4 + \beta_2 \leqslant T^{j-1}_3 + 4, \qquad (30)\end{aligned}$$

для $j \in \mathcal{N}_1$;

$$\begin{aligned} f_{ji_2} < T^{j-1}_3 + 3 + \beta_3 + \min\{x^{j-1}_\pi(1), x^j_\pi(1)\} \\ = T^{j-1}_3 + 3 + \beta_3 + \beta_1 \leqslant T^{j-1}_3 + 4, \qquad (31)\end{aligned}$$

для $j \in \mathcal{N}_2$.

Рассмотрим расписание машины 3. Обозначим через $D(t)$ суммарную продолжительность простоя машины 3 в интервале $[0, t)$ и покажем, что $D(T(S)) \leqslant 4$. Отсюда будет следовать искомая оценка (27) длины расписания S. Пусть s — начало последнего интервала работы машины 3. Тогда $D(T(S)) = D(s)$. Если $s < 4$, то $D(s) < 4$, что и требуется. Пусть $s \geqslant 4$. Найдем максимальное $j = j^*$ такое, что $T^{j-1}_3 \leqslant s - 4$. Так как каждая работа j приходит на машину 3 раньше момента $T^{n-1}_3 + 4$, после этого момента на машине 3 не может быть простоев. Поэтому $s < T_3^{n-1} + 4$. Из определения j^* следует, что

$$T_3^{j^*-1} \leqslant s - 4 < T_3^{j^*}. \tag{32}$$

Согласно (30), (31) работы $1, \dots, j^*$ приходят на машину 3 раньше момента $T_3^{j^*-1} + 4 \leqslant s$. Поскольку моменту s предшествует простой на машине 3, по правилу 1 жадного алгоритма (см. начало доказательства этой теоремы) заключаем, что все операции $\{o_3^1, \dots, o_3^{j^*}\}$ успевают выполниться до момента s. Отсюда с учетом (32) следует, что

$$D(s) \leqslant s - T_3^{j^*} < 4.$$

Теорема 8 доказана.

В заключение сформулируем две проблемы, решение которых могло бы дать существенное продвижение в решении рассмотренных нами задач теории расписаний.

1. Какова минимальная функция $\mu(m)$ такая, что всякое $\tilde{s}$-семейство векторов из $\mathbb{R}^m$ может быть нестрого просуммировано в некотором множестве полупространств $\{P_i(\beta_i) \mid i = 1, \dots, m\}$, определяемых по формуле (15), с $\sum_{i=1}^{m} \beta_i = \mu(m)$?

2. Какова минимальная функция $\eta(m)$ такая, что всякое $\hat{s}$-семейство векторов из $\mathbb{R}^m$ может быть нестрого просуммировано в семействе полупространств
$$\{P_i(\beta_i) \mid i = 1, \dots, m\},$$
где $\beta_i = \eta(m)$, $i = 1, 2, \dots, m$?

При этом в большей степени нас интересуют алгоритмы, конструктивно доказывающие возможность нестрогого суммирования в обоих случаях. Однако и неконструктивное доказательство даст интересную информацию о свойствах оптимальных решений исследуемых задач и позволит оценивать близость приближенных решений к оптимуму.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Белов И. С., Столин Я. Н.**, Алгоритм в одномаршрутной задаче календарного планирования // Математическая экономика и функциональный анализ. М.: Наука, 1974. С. 248–257.
2. **Севастьянов С. В.** Об асимптотическом подходе к некоторым задачам теории расписаний // 3 Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, 1974 г.: Тез. докл. Новосибирск, 1974. С. 67–69.
3. **Севастьянов С. В.** Об асимптотическом подходе к некоторым задачам теории расписаний // Управляемые системы. Новосибирск, 1975. Вып. 14. С. 40–51.
4. **Бабушкин А. И., Башта А. Л., Белов И. С., Душин Б. И.** Минимизация цикла работы поточной линии // Автомат. и телемех. 1975. № 6. С. 161–167.
5. **Бабушкин А. И., Башта А. Л., Белов И. С.** Построение календарного плана для многомаршрутной задачи трех станков // Автомат. и телемех. 1976. № 7. С. 154–158.
6. **Бабушкин А. И., Башта А. Л., Белов И. С.** Построение календарного плана для задачи встречных маршрутов // Кибернетика. 1977. № 4. С. 130–135.
7. **Севастьянов С. В.** Некоторые обобщения задачи Джонсона // Управляемые системы. Новосибирск, 1981. Вып. 21. С. 45–61.
8. **Севастьянов С. В.** Алгоритм с оценкой для задачи с маршрутами деталей произвольного вида и альтернативными исполнителями // Кибернетика. 1986. № 6. С. 74–79.
9. **Севастьянов С. В.** Геометрия в теории расписаний // Модели и методы оптимизации / Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1988. Т. 10. С. 226–261.
10. **Steinitz E.** Bedingt konvergente Reihen und convexe Systeme // J. Reine Angew. Math. 1913. Bd 143. S. 128–175.
11. **Gross W.** Bedingt konvergente Reihen // Monatsh. Math. und Physik. 1917. Bd 28. S. 221–237.
12. **Bergström V.** Ein neuer Beweis eines Satzes von E. Steinitz // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1931. Bd 8. S. 148–152.
13. **Bergström V.** Zwei Satze über ebene Vektorpolygone // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1931. Bd 8. S. 206–214.
14. **Damsteeg I., Halperin I.** The Steinitz — Gross theorem on sums of vectors // Trans. Royal Soc. Canada. 1950. V. 44. P. 31–35.
15. **Кадец М. И.** Об одном свойстве векторных ломаных в n-мерном пространстве // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8, вып .1. С. 139–143.

16. **Behrend F. A.** The Steinitz — Gross theorem on sums of vectors // Canad. J. Math. 1954. V. 6. P. 108–124.

17. **Севастьянов С. В.** О приближенном решении некоторых задач теории расписаний // Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем. Новосибирск, 1978. Вып. 32. С. 66–75.

18. **Гринберг В. С., Севастьянов С. В.** О величине константы Штейница // Функциональный анализ и его приложения. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 56–57.

19. **Banaszczyk W.** The Steinitz constant of the plane // J. Reine Angew. Math. 1987. V. 373. P. 218–220.

20. **Севастьянов С. В.** О компактном суммировании векторов // Дискретная математика. 1991. Т. 3, вып. 3. С. 66–72.

21. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

22. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи, М.: Мир, 1982.

Адрес автора:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики СО РАН

Статья поступила

4 января 1994 г.