СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ
Июль – сентябрь 1994. Том 1, № 3, 3–19

УДК 519.17

ОДНО УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ФРАНКА — ШЕБО — ТАРДОШ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ*)

А. В. Косточка

Изучается задача нахождения T-джойнов минимальной мощности, которая включает в себя известную задачу китайского почтальона, задачи о кратчайшем пути и о наибольшем паросочетании. Эта задача тесно связана также с задачей о многопродуктовых потоках на плоскости и задачей о кратчайшем покрытии циклами. Несмотря на общий характер постановки задача о T-джойне минимальной мощности является полиномиально разрешимой [1]. Для любого четного подмножества T множества вершин произвольного связного графа G минимально возможная мощность $\tau(G,T)$ T-джойнов в G не меньше максимального числа $\nu(G,T)$ попарно не пересекающихся T-разрезов в G. В случае двудольного графа G имеет место равенство $\nu(G,T) = \tau(G,T)$ (см. [2]). А. Франк, А. Шебо, Е. Тардош [3] доказали, что можно выбрать упаковку T-разрезов мощности $\tau(G,T)$, удовлетворяющую дополнительным требованиям. Как показано в настоящей работе, эти требования можно ужесточить, что используется при получении верхних оценок величины $\tau(G,T)$.

§ 1. Обсуждение задачи и формулировки результатов

Пусть $G = (V,E)$ — связный неориентированный граф (допускаются петли и кратные ребра). Через $d_F(v)$ обозначим число ребер из $F \subseteq E$, инцидентных вершине $v \in V$, а через $N_G(v)$ — множество вершин, смежных с v. Будем говорить, что множество $T \subseteq V$ *четно*, если его мощность $|T|$ есть четное число. Для четного T назовем *T-джойном* множество $F \subseteq E$ такое, что число $d_F(v)$ нечетно, если и только если $v \in T$. Множество $X \subseteq V$ назовем *T-нечетным*, если $|X \cap T|$ нечетно. Ниже разрезы понимаются как множества ребер. Разрез $(X, V \backslash X)$ называется *T-разрезом*, если X является T-нечетным. Для $X \subseteq V$ обозначим через $q(X,T)$ число T-нечетных компонент связности графа $G \backslash X$. Примем также следующие обозначения: $\tau(G,T)$ — минимально возможная мощность T-джойнов в графе G и $\nu(G,T)$ — максимальное число попарно не пересекающихся T-разрезов в графе G.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-1486), а также частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (код проекта RPY000).

Каждый T-джойн имеет нечетное (и следовательно, положительное) число общих ребер с каждым T-разрезом. Поэтому

$$\nu(G,T) \leqslant \tau(G,T). \tag{1}$$

Представляют интерес пары (G,T), на которых в (1) достигается равенство. Из работ П. Сеймура [2, 4] вытекает, что двудольные и параллельно-последовательные графы обладают следующим свойством:

$$\nu(G,T) = \tau(G,T) \quad \text{для любого четного } T. \tag{2}$$

А. Герардс [5] и З. Сигети [6] назвали графы со свойством (2) графами Сеймура и описали семейства графов Сеймура, содержащие и двудольные, и параллельно-последовательные графы. А. Франк, А. Шебо и Е. Тардош [3] доказали следующее утверждение.

Теорема А [3]. *Пусть $G = (A, B; E)$ — двудольный граф с долями A, B и множество $T \subseteq A \cup B$ четно. Тогда существует разбиение $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_k\}$ множества A такое, что*

$$\tau(G,T) = q(X_1,T) + q(X_2,T) + \ldots + q(X_k,T).$$

Теорема А уточняет результат П. Сеймура для двудольных графов в том смысле, что множество из $\tau(G,T)$ непересекающихся T-разрезов выбирается специальным образом (для каждого разреза C из этого множества найдется номер i такой, что один конец каждого ребра из C принадлежит X_i).

Другая минимаксная теорема установлена А. Шебо [7]. Прежде чем ее сформулировать, приведем некоторые определения.

Пусть $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_k\}$ — разбиение множества V. *Мультиразрезом* $M = M(\mathcal{Y})$ называется множество ребер, соединяющих разные части разбиения $\mathcal{Y}$. Число k элементов разбиения $\mathcal{Y}$ обозначим $\mathrm{val}(M)$. Если каждое множество Y_i разбиения $\mathcal{Y}$ является T-нечетным и порождает связный подграф, то мультиразрез M называется *T-границей.*

Если $M = M(\{Y_1, \ldots, Y_k\})$ является T-границей, то k четно и M имеет не менее $k/2$ общих ребер с любым T-джойном. Значит, если $\mathcal{M} = (M_1, \ldots, M_l)$ — упаковка T-границ $M_1, \ldots, M_l$ (т. е. любое ребро графа G принадлежит не более чем одному из $M_1, \ldots, M_l$), то имеет место неравенство

$$\mathrm{val}(M_1) + \ldots + \mathrm{val}(M_l) \leqslant 2\tau(G,T).$$

Теорема В [7]. *Пусть граф $G = (V, E)$ связен и множество $T \subseteq V$ четно. Тогда существует упаковка T-границ $\mathcal{M} = (M_1, \ldots, M_l)$ такая, что*

— $\mathrm{val}(M_1) + \ldots + \mathrm{val}(M_l) = 2\tau(G,T)$,

— *для каждого* $M_i = M(Y_{i,1}, \dots, Y_{i,k_i})$ *граф* $G(\mathcal{Y}_i)$, *полученный стягиванием каждого* $Y_{i,j}$ *в вершину* $x_{i,j}$, *является бикритическим.*

Напомним, что граф G называется *бикритическим*, если после удаления из него любых двух вершин в оставшемся графе есть совершенное паросочетание.

А. Франк и З. Сигети указали довольно простой способ доказательства теоремы B на основе теоремы A.

Известны факты о структуре минимальных T-джойнов, сходные с утверждениями о максимальных паросочетаниях. Важные результаты в этом направлении получил А. Шебо. В [8, 9] он доказал аналог теоремы Галлаи — Эдмондса (см. [1, теорема 3.2.1]) и в [9, 10] — аналог теоремы Коцига — Ловаса (см. [1, теорема 5.2.6]).

Сформулируем основные результаты, полученные в настоящей работе. Первый из них представляет собой уточнение теоремы Франка — Шебо — Тардош, опирающееся на идею из [11]. Предварительно введем определение. Компонента связности C некоторого графа называется *простой*, если она состоит из одной вершины, и *непростой* в ином случае.

Теорема 1. *Пусть* $G = (A, B; E)$ — *двудольный связный граф с долями* A, B *и множество* $T \subseteq A \cup B$ *четно. Тогда найдется разбиение* $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_k\}$ *множества* A *такое, что*

(a) $\tau(G,T) = q(X_1,T) + q(X_2,T) + \ldots + q(X_k,T)$;

(b) *для любых* $i \neq j$, $1 \leqslant j \leqslant k$, $1 \leqslant i \leqslant k$, *множество* X_i *содержится в некоторой компоненте связности графа* $G \backslash X_j$;

(c) *для каждого* j, $1 \leqslant j \leqslant k$, *все непростые компоненты связности графа* $G \backslash X_j$ *являются* T*-нечетными.*

Для пары (G,T) и разбиения $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ множества вершин $V(G)$ графа G определим

— граф $\widetilde{G} = \widetilde{G}(\mathcal{X})$ с множеством вершин $V(\widetilde{G}) = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ и множеством ребер $E(\widetilde{G}) = \{\widetilde{e} \mid e \in E(G)\}$, где $\widetilde{e}$ соединяет множества X_i и X_j, если и только если одна из вершин, инцидентных ребру e в G, принадлежит X_i, а другая — X_j;

— множество $\widetilde{T} = \widetilde{T}(\mathcal{X})$ такое, что $X_i \in \widetilde{T}$, если и только если $|X_i \cap T|$ нечетно.

Другими словами, пара $(\widetilde{G}, \widetilde{T})(\mathcal{X})$ получена из пары (G,T) склеиванием вершин каждого множества X_i разбиения $\mathcal{X}$ в одну вершину X_i.

Из теоремы 1 вытекает следующая

Теорема 2. *Пусть граф* $G = (V, E)$ *связен и множество* $T \subseteq V$ *четно. Тогда существует разбиение* $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ *множества* $V(G)$ *такое, что*

(a) $q(X_1,T)+q(X_2,T)+\ldots+q(X_k,T)=2\tau(G,T)$;

(b) *для любых* $i\neq j$, $1\leqslant j\leqslant k$, $1\leqslant i\leqslant k$, *множество* X_i *содержится в некоторой компоненте связности графа* $G\backslash X_j$;

(c) *для каждого* j, $1\leqslant j\leqslant k$, *все компоненты связности графа* $G\backslash X_j$ *являются* T*-нечетными*;

(d) *для любых* j, $1\leqslant j\leqslant k$, *и каждой компоненты связности* C *графа* $G\backslash X_j$ *граф* $G\backslash C$ *связен*;

(e) *каждый блок графа* $\widetilde{G}(\mathcal{X})$ *является бикритическим.*

В условиях теоремы 2 из свойств (b), (a) следует, что $\tau((\widetilde{G},\widetilde{T})(\mathcal{X}))=\tau(G,T)$ и разбиение на одноэлементные множества является оптимальным для пары $(\widetilde{G},\widetilde{T})$. Поэтому ввиду свойств (c), (e) любой минимальный $\widetilde{T}$-джойн в графе $\widetilde{G}$ есть объединение совершенных паросочетаний в блоках графа $\widetilde{G}$. Следовательно, $2\tau(\widetilde{G},\widetilde{T})=|V(\widetilde{G})|-1+b(\widetilde{G})$, где $b(\widetilde{G})$ — число блоков в графе $\widetilde{G}$.

Таким образом, структура минимальных $\widetilde{T}$-джойнов в $\widetilde{G}$ проще, чем в произвольных графах. Это свойство представляется полезным. Например, множества ребер блоков в $\widetilde{G}$ образуют T-границы в G. Поэтому теорему 2 можно рассматривать как уточнение теоремы B: строится упаковка T-границ специального вида. Другие применения теоремы 2 обсуждаются в § 5.

§ 2. Консервативные взвешивания

Для графа $G=(V,E)$ отображение $\mathbf{w}\colon E\to\{-1,1\}$ называется *консервативным взвешиванием*, если для любого цикла C в графе G справедливо неравенство $\sum\limits_{e\in C}\mathbf{w}(e)\geqslant 0$. Циклы, на которых достигается равенство, называются 0-*циклами*. Консервативное взвешивание $\mathbf{w}$ можно рассматривать как разбиение $E=E^-\cup E^+$, где $E^-=E^-(\mathbf{w})=\{e\in E\mid \mathbf{w}(e)=-1\}$, $E^+=E^+(\mathbf{w})=E\backslash E^-$, обладающее следующим свойством: для каждого цикла C в G справедливо неравенство $|C\cap E^-|\leqslant|C\cap E^+|$.

Минимальные T-джойны тесно связаны с консервативными взвешиваниями [1, 3]. Действительно, пусть F — минимальный T-джойн в G. Рассмотрим отображение $\mathbf{w}=\mathbf{w}(F)\colon E\to\{-1,1\}$ с $E^-(\mathbf{w})=F$. Ввиду минимальности F взвешивание $\mathbf{w}(F)$ консервативно. С другой стороны, если $\mathbf{w}$ — консервативное взвешивание графа $G=(V,E)$, то положим $T=T(\mathbf{w})=\{v\in V\mid d_{E^-}(v)$ нечетно $\}$. Поскольку $\mathbf{w}$ консервативно, $E^-(\mathbf{w})$ — минимальный $T(\mathbf{w})$-джойн в G.

Таким образом, теорема 1 эквивалентна следующей теореме.

Теорема 1$'$. *Пусть $G = (A, B; E)$ — двудольный связный граф с долями A и B. Если $\mathbf{w}$ — консервативное взвешивание графа G, то существует разбиение $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_k\}$ множества A такое, что для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant k$, справедливы следующие утверждения:*

(a) *в каждую компоненту связности графа $G \backslash X_j$ заходит не более одного ребра из E^-;*

(b) *при любом i, $i \neq j$, множество X_i содержится в некоторой компоненте связности графа $G \backslash X_j$;*

(c) *в каждую непростую компоненту связности графа $G \backslash X_j$ заходит ровно одно ребро из E^-.*

Доказательство теоремы 1$'$ приведено в § 3.

Далее потребуется лемма, доказанная А. Шебо [11]. Для формулировки леммы введем следующее понятие: вершину v графа G назовем *T-маргинальной*, если $d_F(v) = 1$ для любого минимального T-джойна F.

Лемма 1 [11]. *Пусть граф $G = (V, E)$ связен и множество $T \neq \varnothing$ четно. Различные вершины a и b графа G такие, что $\tau(G, T\Delta\{a, b\})$ минимально по всем парам $\{a, b\} \subseteq V$, являются T-маргинальными.*

Здесь $X\Delta Y$ означает симметрическую разность множеств X и Y.

Пусть $\mathbf{w}$ — консервативное взвешивание графа G. Вершина v называется $\mathbf{w}$-*маргинальной*, если она инцидентна в точности одному ребру $e(v) \in E^-$ и любой 0-цикл, проходящий через v, содержит $e(v)$.

Ввиду вышеизложенного для любого консервативного взвешивания $\mathbf{w}$ графа G каждая $T(\mathbf{w})$-маргинальная вершина является также $\mathbf{w}$-маргинальной. Поэтому мы можем использовать следующее утверждение, непосредственно вытекающее из леммы 1.

Лемма 1$'$. *Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и $\mathbf{w}$ — консервативное взвешивание графа G с $E^- \neq \varnothing$. Тогда в G есть $\mathbf{w}$-маргинальная вершина.*

§ 3. Двудольные графы

Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и $\mathbf{w}$ — консервативное взвешивание графа G. Для вершины $b \in V(G)$ через $(G^*, \mathbf{w}^*) = (G^*(b), \mathbf{w}^*(b))$ обозначим результат стягивания всех ребер, инцидентных b. Новая вершина будет обозначаться через b^*. Если G — двудольный граф, то G^* тоже двудольный граф. Если b является $\mathbf{w}$-маргинальной вершиной, то $\mathbf{w}^*$ — консервативное взвешивание графа G^*.

Разбиение $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ множества A, удовлетворяющее утверждениям (a)–(c) теоремы 1$'$, назовем $\mathbf{w}$-*подходящим*.

Доказательство теоремы $1'$. Допустим, что теорема неверна, и пусть связный двудольный граф $G = (A, B; E)$ и консервативное взвешивание $\mathbf{w}$ графа G образуют контрпример к теореме с минимальным числом вершин в G. Тогда $|A| > 1$. Если $E^- = \varnothing$, то тривиальное разбиение $\mathcal{X} = \{A\}$ является $\mathbf{w}$-подходящим. Значит, $E^-(\mathbf{w}) \neq \varnothing$. По лемме $1'$ найдется $\mathbf{w}$-маргинальная вершина $b \in A \cup B$. Пусть $N_G(b) = \{a_1, \ldots, a_l\}$. Рассмотрим $(G^*(b), \mathbf{w}^*(b))$. Согласно индукционному предположению существует $\mathbf{w}^*$-подходящее разбиение $\mathcal{X}^* = \{X_1^*, \ldots, X_k^*\}$ множества A^*.

Случай 1: $b^* \in A^*$. Можно считать, что $b^* \in X_k^*$. Положим

$$X_j = \begin{cases} X_j^* & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant k-1, \\ (X_k^* \backslash \{b^*\}) \cup \{a_1, \ldots, a_l\} & \text{при } j = k. \end{cases}$$

Определим семейства $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^*$ по следующим правилам. Считаем $D \subseteq V(G)\backslash\{b\}$ (соответственно $D \subseteq V(G^*)\backslash\{b^*\}$) элементом $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}^*$), если D — множество вершин какой-нибудь компоненты связности графа $G\backslash X_j$ ($G^*\backslash X_j^*$) при некотором $j = 1, \ldots, k$. Аналогичные семейства множеств вершин компонент связности, содержащих b (b^*), обозначим через $\mathcal{Q}$ ($\mathcal{Q}^*$). Тогда $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$ и $\mathcal{Q} = \{(D^*\backslash\{b^*\}) \cup \{a_1, \ldots, a_l, b\} \mid D^* \in \mathcal{Q}^*\} \cup \{\{b\}\}$, так как $N_G(b) = \{a_1, \ldots, a_l\}$. Таким образом, утверждение (a) теоремы $1'$ справедливо для $\{X_1, \ldots, X_k\}$. Поскольку b «связывает» $a_1, \ldots, a_l$, утверждение (b) также справедливо. Так как $\{b\}$ является простой компонентой связности, утверждение (c) тоже верно, что противоречит выбору G и $\mathbf{w}$.

Случай 2: $b^* \in B^*$, $\{b^*\}$ не является компонентой связности в $G^*\backslash X_j^*$ ни для какого j, и b не является точкой сочленения в G. Положим

$$X_j = \begin{cases} X_j^* & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant k, \\ \{b\} & \text{при } j = k+1. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^*$ и $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^*$ определены так же, как в случае 1. Граф $G\backslash\{b\}$ связен, поэтому

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^* \cup \{V(G)\backslash\{b\}\}, \quad \mathcal{Q} = \{(D^*\backslash\{b^*\}) \cup \{a_1, \ldots, a_l, b\} \mid D^* \in \mathcal{Q}^*\}.$$

Тем самым утверждения (a) и (b) доказаны. В рассматриваемом случае все компоненты связности из $\mathcal{Q}^*$ непростые. Таким образом, утверждение (c) тоже верно для $\{X_1, \ldots, X_{k+1}\}$.

Случай 3: $b^* \in B^*$, $\{b^*\}$ — компонента связности графа $G^*\backslash X_1^*$ и b не является точкой сочленения в G. Это означает, что каждая из вершин $a_1, \ldots, a_l$ смежна лишь с b и какими-то вершинами из X_1^*. Если b^* инцидентна некоторому ребру из $(E^*)^-$, то мы поступаем так

же, как в случае 2, и приходим к тому же результату. Пусть b^* не инцидентна никакому ребру из $(E^*)^-$. Положим

$$X_j = \begin{cases} X_1^* \cup \{b\} & \text{при } j = 1, \\ X_j^* & \text{при } 2 \leqslant j \leqslant k. \end{cases}$$

Тогда, определив $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^*$ и $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^*$ так же, как в случае 1, получаем

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^* \cup \{\{a_1\}, \dots, \{a_l\}\}, \tag{3}$$

$$\mathcal{Q} = \{(D^* \backslash \{b^*\}) \cup \{a_1, \dots, a_l, b\} \mid D^* \in \mathcal{Q}^* \backslash \{\{b^*\}\}\}. \tag{4}$$

Ввиду вложения $N_{G^*}(b^*) \subseteq X_1^*$ вершина b^* и множество X_1^* находятся в одной компоненте связности графа $G^* \backslash X_j^*$ при $j \in \{2, \dots, k\}$. Таким образом, X_1 содержится в некоторой компоненте связности графа $G \backslash X_j$ при любом $j \in \{2, \dots, k\}$ и утверждение (b) верно для нашего разбиения. В рассматриваемом случае утверждение (a) тоже справедливо. Так как $\{b^*\}$ не является компонентой связности графа $G^* \backslash X_j^*$ при любом $j \in \{2, \dots, k\}$, из (3), (4) вытекает справедливость утверждения (c).

Случай 4: $b^* \in B^*$, b есть точка сочленения в G. Тогда найдутся графы G_1, G_2 такие, что $G_1 \cup G_2 = G, G_1 \cap G_2 = \{b\}$ и каждый из графов $G_1 \backslash \{b\}$, $G_2 \backslash \{b\}$ есть непустое объединение некоторых компонент связности графа $G \backslash \{b\}$. Пусть $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}\,|_{G_i}$, $i = 1, 2$. Ввиду минимальности графа G существуют $\mathbf{w}_1$-подходящее разбиение $\mathcal{X}_1 = \{X_1^1, X_2^1, \dots, X_p^1\}$ множества A_1 и $\mathbf{w}_2$-подходящее разбиение $\mathcal{X}_2 = \{X_1^2, X_2^2, \dots, X_r^2\}$ множества A_2. Можно считать, что $b \in X_p^1 \cap X_1^2$. Положим $k = p + r - 1$,

$$X_j = \begin{cases} X_j^1 & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant p - 1, \\ X_p^1 \cup X_1^2 & \text{при } j = p, \\ X_{j-p+1}^2 & \text{при } p + 1 \leqslant j \leqslant k. \end{cases}$$

Тогда семейство $\mathcal{R}$, определенное так же, как в случае 1, есть объединение аналогичных семейств в графах G_1 и G_2. Множество вершин любой компоненты связности графа вида $G \backslash X_j$, содержащей b, состоит из $V(G_i)$ и множества вершин какой-нибудь компоненты связности графа вида $G_{3-i} \backslash X_j^{3-i}$, содержащей b, $i \in \{1, 2\}$. Значит, утверждения (a) и (b) справедливы для разбиения $\{X_1, \dots, X_k\}$. Поскольку для графа $G_i \backslash X_j^i$ любая компонента связности, содержащая b, содержит также некоторую вершину из B_i, утверждение (c) верно. Теорема $1'$ доказана.

§ 4. Произвольные графы

Как и в случае двудольных графов, будем использовать язык консервативных взвешиваний. Вместо теоремы 2 докажем эквивалентное ей следующее утверждение.

Теорема 2$'$. *Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и $\mathbf{w}$ — консервативное взвешивание графа G. Тогда существует разбиение $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_k\}$ множества V такое, что при каждом j, $1 \leqslant j \leqslant k$, справедливы следующие утверждения:*

(a'_j) *граф $G(X_j)$ не содержит ребер из E^-;*

(b'_j) *при любом i, $i \neq j$, множество X_i содержится в некоторой компоненте связности графа $G \backslash X_j$;*

(c'_j) *в каждую компоненту связности графа $G \backslash X_j$ заходит ровно одно ребро из E^-;*

(d'_j) *для каждой компоненты связности C графа $G \backslash X_j$ граф $G \backslash C$ является связным;*

(e') *каждый блок графа $\widetilde{G}(\mathcal{X})$ является бикритическим.*

Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и $\mathbf{w}$ — консервативное взвешивание графа G. Разбиение $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_k\}$ множества V называется *почти* $\mathbf{w}$*-подходящим*, если при каждом j, $1 \leqslant j \leqslant k$, верно ($\mathrm{a}'_j$), при каждом j, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, выполняются ($\mathrm{b}'_j$), ($\mathrm{c}'_j$) и справедливо утверждение

(c''_k) *в каждую компоненту связности графа $G \backslash X_k$ заходит не более одного ребра из E^-.*

Заметим, что для каждого почти $\mathbf{w}$-подходящего разбиения $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_k\}$ условия (a'_j), (c'_j) ($1 \leqslant j \leqslant k-1$) и ($\mathrm{c}''_k$) обеспечивают консервативность взвешивания $\mathbf{w}$ в графе $\widetilde{G}(\mathcal{X})$.

Пусть $G = (V, E)$ — связный граф. Будем говорить, что разбиение $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_k\}$ множества V *лучше*, чем разбиение $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_m\}$ множества V, если выполняется одно из следующих условий:

(i) $k < m$;

(ii) $k = m$ и общее число ребер в $\bigcup\limits_{j=1}^{k} G(X_j)$ (равное $\sum\limits_{j=1}^{k} |E(G(X_j))|$) больше числа ребер в $\bigcup\limits_{j=1}^{k} G(Y_j)$;

(iii) $k = m$, $\sum\limits_{j=1}^{k} |E(G(X_j))| = \sum\limits_{j=1}^{k} |E(G(Y_j))|$, $|X_k| > |Y_k|$.

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф. Заменив в G каждое ребро e на путь $P(e)$ длины 2, получим двудольный граф G' с долями V и E. Пусть $\mathbf{w}$ — консервативное взвешивание графа G. Положим веса обоих ребер в $P(e)$ равными весу ребра e и получим консервативное взвешивание $\mathbf{w}'$ графа G'. Применив теорему 1 к $(G', \mathbf{w}')$, убеждаемся в существовании почти $\mathbf{w}$-подходящих разбиений множества V.

Пусть $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_k\}$ — одно из наилучших почти $\mathbf{w}$-подходящих разбиений V. Ниже доказываются леммы, из которых следует, что $\mathcal{X}$ удовлетворяет требованиям теоремы $2'$.

Лемма 2. *Если X_i имеет непустое пересечение с двумя компонентами связности C_1 и C_2 графа $G \backslash X_k$, то $X_i \cup X_k$ содержится в некоторой компоненте связности графа $G \backslash X_j$ для каждого $j \notin \{i, k\}$.*

Доказательство. Пусть $v_1 \in X_i \cap V(C_1)$, $v_2 \in X_i \cap V(C_2)$ и D — компонента связности графа $G \backslash X_j$, содержащая X_i. Тогда D содержит какой-то путь P, соединяющий v_1 и v_2. Но любой такой путь должен содержать какую-нибудь вершину $v \in X_k$. Значит, $X_k \subset V(D)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для разбиения $\mathcal{X}$ выполняется* (b'_k).

Доказательство. Обозначим через $K_1, \dots, K_t$ компоненты связности графа $G \backslash X_k$. Допустим, что $X_i \nsubseteq K_j$ при любом j, $1 \leqslant j \leqslant t$. Пусть $C_1, \dots, C_r$ — компоненты связности графа $G \backslash X_i$ с $X_k \subseteq V(C_r)$, а $D_1, \dots, D_m$ — компоненты связности графа $G \backslash C_r$. Обозначим $X_{is} = X_i \cap V(D_s)$, $s = 1, \dots, m$. В силу определения C_r имеем $X_{is} \neq \varnothing$, $s = 1, \dots, m$. Каждая компонента D_s содержится в некоторой компоненте K_j, поэтому $m \geqslant 2$. Каждая из компонент $C_1, \dots, C_{r-1}$ является также компонентой связности графа $G \backslash X_{is}$ для некоторого X_{is}. В силу (c'_i) выполняется следующее условие:

$$\textit{ровно в одну из компонент } D_1, \dots, D_m \textit{ заходит ребро } e \in E^-. \tag{5}$$

Для определенности будем считать, что условие (5) выполнено с компонентой D_m. Кроме того, можно считать, что $D_m \subseteq K_t$, $D_1 \subseteq K_1$. Пусть $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_k\}$, где

$$Y_j = \begin{cases} X_j & \text{при } j \notin \{i, k\}, \\ X_i \backslash X_{i1} & \text{при } j = i, \\ X_{i1} \cup X_k & \text{при } j = k. \end{cases}$$

По условию (iii) разбиение $\mathcal{Y}$ лучше разбиения $\mathcal{X}$. Таким образом, доказательство того, что разбиение $\mathcal{Y}$ является почти $\mathbf{w}$-подходящим, приведет к противоречию с выбором $\mathcal{X}$.

Согласно (5) утверждение (a'_j) верно для каждого $Y_j, 1 \leqslant j \leqslant k$. Компонентами связности графа $G \backslash Y_k$ являются компоненты связности $K_2, \dots, K_t$ графа $G(D_1 \backslash X_{i1})$ (таковыми являются некоторые из $C_1, \dots, C_{r-1}$) и компоненты связности графа $G(K_1 \backslash D_1)$. Ввиду условий (5) и (c''_k) для разбиения $\mathcal{X}$ в $V(K_1 \backslash D_1)$ заходит не более одного ребра из E^-. Следовательно, для $\mathcal{Y}$ выполняется (c''_k). При $j \notin \{i, k\}$ в силу леммы 2 верны (b'_j) и (c'_j). Компонентами связности графа $G \backslash Y_i$ являются некоторые C_s и $C_r \cup D_1$. Таким образом, $\mathcal{Y}$ удовлетворяет условию (b'_i). В частности, $Y_k \subseteq V(C_r \cup D_1)$. В силу (5) условие (c'_i) тоже выполняется для $\mathcal{Y}$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для разбиения $\mathcal{X}$ выполняется* (c'_k).

Доказательство. Допустим, что лемма неверна, $C_1, \dots, C_r$ являются компонентами связности графа $G \backslash X_k$ и имеет место следующее утверждение:

$$\text{ни одно ребро из } E^- \text{ не заходит в } C_r. \tag{6}$$

Можно считать, что верно соотношение $X_{k-1} \subseteq V(C_r)$ и существует ребро e_0, соединяющее X_{k-1} с X_k. Пусть $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_{k-1}\}$, где

$$Y_j = \begin{cases} X_j & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant k-2, \\ X_{k-1} \cup X_k & \text{при } j = k-1. \end{cases}$$

По условию (i) разбиение $\mathcal{Y}$ лучше разбиения $\mathcal{X}$. Покажем, что $\mathcal{Y}$ — почти $\mathbf{w}$-подходящее разбиение.

При $1 \leqslant j \leqslant k-2$ утверждения (a'_j) и (c'_j) выполняются для $\mathcal{Y}$ автоматически, а (b'_j) — ввиду наличия ребра e_0. В силу выбора C_r верно (a'_{k-1}). Проверим выполнение (c''_{k-1}) для $\mathcal{Y}$. Пусть $D_1, \dots, D_m$ — компоненты связности графа $G \backslash X_{k-1}$ и $X_k \subseteq V(D_m)$. Тогда компонентами связности графа $G \backslash Y_{k-1}$ являются $D_1, \dots, D_{m-1}, C_1, \dots, C_{r-1}$ и компоненты связности графа $D_m \cap C_r$. В силу (6) в $D_m \cap C_r$ заходит ровно одно ребро из E^-. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Для разбиения $\mathcal{X}$ при каждом j, $1 \leqslant j \leqslant k$, выполняется утверждение* (d'_j).

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Множества X_j перенумеруем так, чтобы для некоторой компоненты связности C графа $G \backslash X_k$ компонентами связности графа $G \backslash C$ оказались $D_1, \dots, D_m$, где $m \geqslant 2$. Согласно леммам 3 и 4 после перенумерации разбиение $\mathcal{X}$ остается почти $\mathbf{w}$-подходящим и может быть хуже наилучшего только по условию (iii). Обозначим $X_{ks} = X_k \cap V(D_s)$, $s = 1, \dots, m$. В силу (c'_k) можно считать, что верно следующее утверждение:

$$\text{единственное ребро из } e \in E^-, \text{ заходящее в } C, \text{ соединяет } C \text{ с } X_{km}. \tag{7}$$

Пусть e_0 — некоторое ребро, соединяющее C с X_{k1}, и X_{k-1} содержит другой конец e_0. Положим

$$Y_j = \begin{cases} X_j & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant k-2, \\ X_k \backslash X_{k1} & \text{при } j = k-1, \\ X_{k1} \cup X_{k-1} & \text{при } j = k. \end{cases}$$

По условию (ii) разбиение $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_k\}$ множества V лучше разбиения $\mathcal{X}$ и, следовательно, лучше наилучшего почти $\mathbf{w}$-подходящего разбиения. Таким образом, доказав, что $\mathcal{Y}$ является почти $\mathbf{w}$-подходящим разбиением, придем к противоречию с выбором $\mathcal{X}$. Утверждения (a'_j) при $1 \leqslant j \leqslant k-1$ и (c'_j) при $1 \leqslant j \leqslant k-2$ автоматически выполняются для разбиения $\mathcal{Y}$. Наличие ребра e_0 обеспечивает выполнение (b'_j) при $1 \leqslant j \leqslant k-1$. Утверждения ($\mathrm{a}'_k$) и ($\mathrm{c}'_{k-1}$) верны в силу (7). Чтобы доказать справедливость (c''_k), рассмотрим компоненты связности графа $G \backslash Y_k$. Таковыми являются компоненты связности графа $G \backslash X_k$, содержащиеся в D_1, и некоторые части компонент связности графа $G \backslash X_{k-1}$, не пересекающиеся с D_1. Следовательно, в силу (7) справедливо утверждение (c''_k). Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для разбиения* $\mathcal{X}$ *выполняется* (e$'$).

Доказательство. Пусть подграф графа $\widetilde{G}$, порожденный множеством вершин $\{X_1, \dots, X_l\}$, образует блок. Ввиду (b'_j) для каждого $j \in \{1, \dots, l\}$

$$\bigcup_{i=1}^{l} X_i \backslash X_j \ \textit{содержится в некоторой компоненте связности графа } G \backslash X_j \tag{8}$$

и для каждого $j \in \{l+1, \dots, k\}$

$$\bigcup_{i=1}^{l} X_i \quad \textit{содержится в некоторой компоненте связности графа } G \backslash X_j. \tag{9}$$

Пользуясь (8), (9) и (d'_j), получаем, что для каждого $j \in \{1, \dots, l\}$

$$X_j \quad \textit{лежит в некоторой компоненте связности } C_j \textit{ графа } G \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{l} X_i \backslash X_j \right). \tag{10}$$

Ввиду условий (a'_j) и (c'_j) при любом j, $1 \leqslant j \leqslant k$,

$$\text{ребра из } E^- \text{ образуют совершенное паросочетание}$$
$$\text{в каждом блоке графа } \widetilde{G}(\mathcal{X}). \tag{11}$$

Допустим, что блок $\widetilde{B}$ графа $\widetilde{G}$ с $V(\widetilde{B}) = \{X_1, \dots, X_l\}$ не является бикритическим и в $H = \widetilde{B} \backslash \{X_1, X_2\}$ нет совершенного паросочетания. По теореме Татта (см. [1, теорема 3.1.1]) существует подмножество вершин $Z \subset V(\widetilde{B})$ такое, что число компонент связности графа $\widetilde{B} \backslash Z$, имеющих нечетное количество вершин, больше $|Z|$. Можно считать, что $Z = \{X_3, \dots, X_r\}$ и компоненты связности графа $\widetilde{B} \backslash Z$ с нечетным количеством вершин суть $C_1, \dots, C_s$. В силу (11) число l четно. Следовательно,

$$s \geqslant r. \tag{12}$$

Пусть $Y = Z \cup \{X_1, X_2\}$. Сравнивая (11) с (12), приходим к следующему выводу:

— $r = s$;

— в подграфе графа G, порожденном Y, нет ребер из E^-;

— в каждую из компонент $C_1, \dots, C_s$ заходит в точности одно ребро из E^-.

Таким образом, положив

$$Y_j = \begin{cases} X_{j+(l-r)} & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant k - (l-r), \\ \bigcup\limits_{i=1}^{r} X_i & \text{при } j = k - (l-r) + 1, \end{cases}$$

получаем разбиение $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_{k-(l-r)+1}\}$ множества V, для которого выполнены утверждения ($a'_{k-(l-r)+1}$) и ($c''_{k-(l-r)+1}$). При любом j, $1 \leqslant j \leqslant k - (l-r)$, утверждения ($a'_j$) и ($c'_j$) выполняются для $\mathcal{Y}$ автоматически, а (b'_j) вытекает из (9) и (10). Противоречие с выбором $\mathcal{X}$ завершает доказательство леммы 6.

Теорема 2$'$ доказана.

Пусть разбиение $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ множества $V(G)$ такое, как в теореме 2, и $\{X_1, X_2, \dots, X_l\}$ — множество вершин некоторого блока в графе $\widetilde{G}(\mathcal{X})$. Через Y_j ($j = 1, \dots, l$) обозначим множество вершин компоненты связности C_j, определенной в (10). По определению $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_l\}$ есть T-граница. Следовательно, как отмечалось выше, теорема 2 уточняет теорему B: упаковка T-границ строится специальным образом.

§ 5. Некоторые применения теоремы 2

Ниже для графа G через $O = O(G)$ обозначаем множество вершин нечетной степени графа G. Нахождение минимального O-джойна эквивалентно решению невзвешенной задачи китайского почтальона. Эта задача, в свою очередь, тесно связана с задачей о кратчайшем покрытии циклами, т. е. о покрытии ребер 2-связного графа циклами минимальной суммарной длины (см. [12]). В частности, Б. Джексон [13] доказал, что для 4-реберно-связных графов эти задачи эквивалентны. Таким образом, верхние оценки размера минимального O-джойна в некоторых семействах графов помогают найти «короткие» покрытия циклами. В связи с этим следующие вопросы представляются естественными.

— Чему равен максимально возможный размер (т. е. число ребер) $f(n,m)$ минимального O-джойна в m-реберно-связных обыкновенных графах с n вершинами?

— Чему равен наибольший размер минимального O-джойна в d-однородных m-реберно-связных графах (или обыкновенных графах) с n вершинами?

А. Распо [14] показал, что $f(n,2) = f(n,3) = n-3$ при $n \geqslant 5$. Н. Тулай [15] описал обыкновенные 2-реберно-связные n-вершинные графы, для которых размеры минимального O-джойна равны $n-3$. Ввиду примеров полных двудольных графов $K_{m,n-m}$ при нечетных m верно неравенство $f(n,m) \geqslant n-2\lfloor m/2\rfloor-1$. Пример m-связного n-вершинного графа G с $|O(G)| \geqslant n-1$ показывает, что $f(n,m) \geqslant \lfloor n/2\rfloor$. Докажем равенство

$$f(n,m) = \max\{\lfloor n/2\rfloor, n-2\lfloor m/2\rfloor-1\}. \tag{13}$$

В действительности мы установим (теорема 3) результат, более сильный, чем равенство (13). Предварительно введем следующее определение. Граф G для четного $T \subseteq V(G)$ называется *(k,T)-связным*, если он является $(k-1)$-реберно-связным и каждый T-разрез в G содержит не менее k ребер.

Теорема 3. *Для (k,T)-связного графа G с n вершинами справедливо неравенство $\tau(G,T) \leqslant \max\{n/2, n-k\}$.*

Доказательство. Рассмотрим разбиение $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ множества V, существование которого гарантируется теоремой 2 для (G,T), и соответствующую пару $(\widetilde{G},\widetilde{T})$. Допустим, что $\tau(G,T) > n/2$. Тогда $q(X_i,T) \geqslant |X_i|+1$ для некоторого X_i и X_i является точкой сочленения в $\widetilde{G}$.

Случай 1: существует не менее двух точек сочленения в $\widetilde{G}$. Тогда в $\widetilde{G}$ имеются две различные точки сочленения X_1, X_2 и два висячих

блока B_1, B_2 такие, что $X_i \in V(B_i)$, $i = 1,2$. Пусть

$$Z_i = \bigcup_{X \in V(B_i) \setminus \{X_i\}} X, \quad i = 1,2.$$

Так как $N_G(v) \subseteq Z_i \cup X_i$ для каждой вершины $v \in Z_i$, верно соотношение $|Z_i| + |X_i| \geqslant 1 + (k-1) = k$. Более того, если $|X_i| = 1$, то $|Z_i| \geqslant k$, поскольку (Z_i, X_i) есть T-разрез. Учитывая, что минимальные T-джойны не имеют циклов, из теоремы 2 получаем

$$\begin{aligned}
&\tau(G,T) = \tau(\widetilde{G},\widetilde{T}) \\
&\leqslant \frac{1}{2}|V(B_1)| + \frac{1}{2}|V(B_2)| + (|V(\widetilde{G})| - (|V(B_1)| - 1) - (|V(B_2)| - 1) - 1) \\
&\leqslant n - (|Z_1| - 1)/2 - (|Z_2| - 1)/2 - (|X_1| - 1) - (|X_2| - 1) - 1 \\
&= n - (|Z_1|/2 + |X_1| - 1) - (|Z_2|/2 + |X_2| - 1).
\end{aligned}$$

Если $|X_i| = 1$, то $|Z_i|/2 + |X_i| - 1 \geqslant k/2 + 1 - 1$, иначе $|Z_i|/2 + |X_i| - 1 = (|Z_i| + |X_i|)/2 + (|X_i| - 2)/2 \geqslant k/2$.

Случай 2: единственной точкой сочленения в $\widetilde{G}$ является X_1. Тогда в $\widetilde{G}$ найдутся как минимум три висячих блока B_1, B_2 и B_3, содержащие X_1. Пусть

$$Z_i = \bigcup_{X \in V(B_i) \setminus \{X_1\}} X, \ (i = 1,2,3), \qquad |Z_1| \leqslant |Z_2| \leqslant |Z_3|.$$

Тогда, как и в случае 1, $|Z_i| + |X_1| \geqslant k$. Более того, если $|Z_i| = 1$, то $|X_1| \geqslant k$, поскольку (Z_i, X_1) есть T-разрез. Таким образом,

$$\begin{aligned}
\tau(G,T) = \tau(\widetilde{G},\widetilde{T}) &\leqslant |V(\widetilde{G})| - \sum_{i=1}^{3}(|B_i|/2 - 1) - 1 \\
&\leqslant n - |X_1| - \sum_{i=1}^{3}(|Z_i| - 1)/2 \leqslant n - (|X_1| + |Z_1| - 1) - (|Z_3| - 1)/2. \qquad (14)
\end{aligned}$$

Если $|Z_3| \geqslant 2$, то правая часть выражения (14) не превосходит величины $n - k + 1 - 1/2$ и, следовательно, теорема доказана. В противном случае $|Z_1| = 1$ и $|X_1| + |Z_1| - 1 \geqslant k$. Теорема 3 доказана.

Величина $f(n,m)$ близка к n при фиксированном m. Оказалось, что ситуация с однородными графами несколько иная. В [16] изучены верхние оценки размеров минимальных O-джойнов в $(2s+1)$-однородных $2t$-связных графах с n вершинами. Получены такие оценки в терминах $r(G)$ — максимального размера 2-упаковки «малых» (т. е. содержащих менее $2s$ ребер) нечетных разрезов.

Теорема 4 [16, теорема 1]. *Если G является $(2s+1)$-однородным $2t$-связным графом с n вершинами, то*

$$\tau(G) \leqslant n/2 + \max\left\{0, \left\lfloor \frac{r(G)/2 - 1}{\lfloor \frac{s+t}{s-t} \rfloor + 1} \right\rfloor \right\}.$$

Равенство в оценке из теоремы 4 достигается для любого допустимого списка (s,t,r) на бесконечном числе обыкновенны графов.

Введем определение. *m-Графом* называется $(2s+1)$-однородный граф G, если для любого «малого» нечетного разреза C, разделяющего G на две компоненты связности, в каждой из этих компонент содержится не менее m вершин. Из соображений четности достаточно рассматривать нечетные m. Заметим, что любой обыкновенный $(2s+1)$-однородный граф является $(2s+3)$-графом.

Теорема 5 [16]. *Если G является $(2s+1)$-однородным $2t$-связным m-графом с n вершинами, то*

$$\tau(G) \leqslant n/2 + \max\left\{0, \left\lfloor \frac{n - 2m}{\lfloor \frac{s+t}{s-t} \rfloor (m+1)} \right\rfloor \right\}.$$

Равенство в оценке из теоремы 5 достигается для любого допустимого списка (s,t,m) (m нечетно) на бесконечном числе графов. При $m = 2s+3$ равенство имеет место для обыкновенных графов, если и только если $\lfloor \frac{s+t}{s-t} \rfloor^2 \geqslant 2t+1$.

Одним из основных инструментов в [16] при доказательстве вышеуказанных результатов является теорема 2.

А. Франк [17] называл джойном любое множество F ребер графа G такое, что $|C \cap F| \leqslant |C \backslash F|$ для каждого цикла C в G. П. Соле и Т. Заславский поставили проблему нахождения максимальной мощности $\mu(G)$ джойна в G. В [17] А. Франк доказал некоторые интересные результаты о $\mu(G)$ и нашел соотношения, связывающие максимальную мощность $\mu(G)$ с другими характеристиками графа. В частности, он вывел минимаксную теорему для μ и предложил алгоритм полиномиальной сложности для вычисления μ.

Приведем еще один результат о $\mu(G)$, комбинация которого с результатами А. Франка дает новые минимаксные утверждения. Предварительно введем определения.

Разбиение $\mathcal{X}$ множества $V(G)$ называется *четным*, если каждый блок в графе $\widetilde{G} = \widetilde{G}(\mathcal{X})$ имеет четное число вершин, и *подходящим*, если $\mathcal{X}$ удовлетворяет условиям (b), (d) и (e) теоремы 2. Ввиду (e) любое подходящее разбиение четно. Напомним, что $b(H)$ обозначает число блоков в H.

Теорема 6. *Для любого связного графа G справедливы равенства*

$$2\mu(G) = \max\{|V(\widetilde{G})| - 1 + b(\widetilde{G}) \mid \mathcal{X} \text{ — четное разбиение }\}$$
$$= \max\{|V(\widetilde{G})| - 1 + b(\widetilde{G}) \mid \mathcal{X} \text{ — подходящее разбиение }\}.$$

Доказательство. По определению джойна найдется четное множество T такое, что $\mu(G) = \tau(G,T)$. По теореме 2 существует подходящее разбиение $\mathcal{X}$ множества $V(G)$ такое, что для пары $(\widetilde{G},\widetilde{T}) = (\widetilde{G},\widetilde{T})(\mathcal{X})$ имеет место равенство $2\tau(G,T) = |V(\widetilde{G})| - 1 + b(\widetilde{G})$.

Наоборот, пусть $\mathcal{X}$ — четное разбиение множества $V(G)$. Выберем $T \subseteq V(G)$ так, чтобы при любом j четность $|T \cap X_j|$ совпадала с четностью числа блоков в $\widetilde{G}(\mathcal{X})$, содержащих X_j. Поскольку $\mathcal{X}$ — четное разбиение, множество T четно. Так как граф $\widetilde{G}$ получен из G склеиванием вершин, верно неравенство $\tau(\widetilde{G},\widetilde{T}) \leqslant \tau(G,T)$. Но по выбору T для любого $\widetilde{T}$-джойна F каждая вершина графа $\widetilde{G}$ инцидентна в каждом блоке, содержащем эту вершину, с нечетным числом ребер из F. Следовательно, $2\tau(\widetilde{G},\widetilde{T}) \geqslant |V(\widetilde{G})| - 1 + b(\widetilde{G})$. Теорема 6 доказана.

Заметим, что теорема 3 дает точную верхнюю оценку для μ через число вершин и связность графа.

Отметим также, что теорема 2 была отправной точкой для А. Агеева, З. Сигети и автора при доказательстве характеризации графов Сеймура, утвердительно отвечающей на один из вопросов А. Шебо.

Автор благодарит З. Сигети за указание ошибок в ранней версии данной работы, а также А. Агеева и А. Шебо за интересные дискуссии и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lovász L., Plummer M. D.** Matching theory. Amsterdam: North-Holland, 1986.
2. **Seymour P.** On odd cuts and plane multicommodity flows // Proc. London Math. Soc. 1981. V. 3/42, N 1. P. 178–192.
3. **Frank A., Sebő A., Tardos É.** Covering directed and odd cuts // Math. Programming Study. 1984. V. 22, N 1. P. 99–112.
4. **Seymour P. D.** The matroids with the max-flow min-cut property // J. Combin. Theory. Ser. B. 1977. V. 23, N 2. P. 189–222.
5. **Gerards A. M. H.** On shortest T-joins and packing T-cuts // J. Combin. Theory. Ser. B. 1992. V. 55, N 1. P. 73–82.
6. **Szigeti Z.** On Seymour graphs // Report N 93803-OR. Institute for Operations Research, Universität Bonn. 1993.

7. **Sebő A.** The Schrijver-system of odd-join polyhedra // Combinatorica. 1988. V. 8, N 2. P. 103–116.
8. **Sebő A.** Undirected distances and the postman-structure of graphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 1990. V. 49, N 1. P. 10–39.
9. **Sebő A.** The factors of graphs: structures and algorithms: Candidates Thesis. Budapest: Hung. Acad. Sci., 1987.
10. **Sebő A.** Dual integrality and multicommodity flows. Combinatorics. Amsterdam: North-Holland, 1988. P. 453–469. (Colloq. Math. Soc. János Bolyai; V. 52).
11. **Sebő A.** A quick proof of Seymour's theorem on T-joins // Discrete Math. 1987. V. 64, N 1. P. 101–103.
12. **Itai A., Rodeh M.** Covering a graph by circuits // Lecture Notes in Comput. Sci. Berlin etc.: Springer, 1978. V. 62. P. 289–299.
13. **Jackson B.** Shortest circuits covers and postman tours in graphs with nowhere zero 4-flow // SIAM J. Comput. 1990. V. 19, N 4. P. 659–665.
14. **Raspaud A.** Postman tours and cycle covers // Discrete Math. 1993. V. 111, N 3. P. 447–454.
15. **Тулай Н.** Экстремальные графы для задачи китайского почтальона // Методы дискретного анализа в теории графов и сложности. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1992. Вып. 52. С. 102–111.
16. **Косточка А. В., Тулай Н.** О длине пути китайского почтальона в однородных графах // Сиб. журн. исследования операций. 1994. Т. 1, № 3. С. 20–37.
17. **Frank A.** Conservative weightings and ear-decompositions of graphs // Combinatorica. 1993. V. 13, N 1. P. 65–81.

Адрес автора:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4
Институт математики СО РАН

Статья поступила

12 мая 1994 г.