СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ
Июль – сентябрь 1994. Том 1, № 3, 20–37

УДК 519.17

О ДЛИНЕ ПУТИ КИТАЙСКОГО ПОЧТАЛЬОНА В ОДНОРОДНЫХ ГРАФАХ*)

А. В. Косточка, Н. Тулай

Задача китайского почтальона, т. е. задача нахождения кратчайшего замкнутого обхода всех ребер однородного графа нечетной степени эквивалентна задаче нахождения минимального джойна — остовного подграфа, все степени которого нечетны. Известно, что размер минимального джойна в любом связном графе с n вершинами не меньше $n/2$ и не больше $n-1$. В настоящей работе установлены верхние оценки размеров минимального джойна в однородном графе нечетной степени через его связность и некоторые другие параметры. Большинство оценок неулучшаемы в классе рассматриваемых графов.

В настоящей работе граф $G = (V, E)$ с множеством вершин V и множеством ребер E может иметь кратные ребра и петли. Граф без петель и кратных ребер называется *обыкновенным*. *Путь почтальона* в связном графе G — это любой замкнутый маршрут, содержащий все ребра графа G. *Решением задачи китайского почтальона* называется величина $P(G)$ — число ребер в кратчайшем пути почтальона в G. *Джойном* в графе $G = (V, E)$ называется произвольный остовный подграф $H(V, F)$ графа G такой, что четности степеней любой вершины $v \in V$ в G и в H одинаковы. Через $\tau(G)$ обозначим минимально возможное число ребер в джойне графа G.

Понятно, что $P(G) = |E(G)| + \tau(G)$. В связи с многочисленными приложениями задачи китайского почтальона естественно пытаться оценить сверху величину $P(G)$ (или, что эквивалентно, $\tau(G)$) в графах из определенных классов. Легко убедиться, что $\tau(G) \leqslant |V| - 1$ для любого графа G. В [1] доказано, что если $G = (V, E)$ — обыкновенный 2-реберно-связный граф, отличный от K_4, то

$$\tau(G) \leqslant |V| - 3. \tag{0.1}$$

В [2] описаны графы, для которых в (0.1) достигается равенство. Примеры полных двудольных графов $K_{k,n-k}$ для нечетных k показывают,

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-1486) и Международного научного фонда (код проекта RPY000).

что при фиксированном k существуют k-связные n-вершинные обыкновенные графы G с $\tau(G) \geqslant n - k - 1$. Если же допускать кратные ребра, то в любом n-вершинном дереве замена каждого ребра пучком из $2k+1$ ребер дает $(2k+1)$-реберно-связный n-вершинный граф $G(n,k)$ с размером минимального джойна $\tau(G(n,k)) = n - 1$. В приведенных примерах максимальная степень графа отличается от минимальной, хотя к дереву с кратными ребрами можно добавить петли, чтобы сделать его однородным, не уменьшая размера минимального джойна. В связи с этим естественно попытаться установить вид верхних оценок величины минимального джойна для однородных обыкновенных графов и однородных графов из более общих классов (в частности, для однородных графов без петель). В настоящей работе получены оценки такого вида; некоторые из них неулучшаемы.

Поскольку $\tau(G) = 0$ для любого $2k$-однородного графа G, рассматриваются лишь $(2k+1)$-однородные графы. Очевидно, что число вершин любого $(2k+1)$-однородного графа $G = (V, E)$ четно и $\tau(G) \geqslant |V|/2$.

Подмножество S ребер в графе G называется *разрезом*, если число компонент связности в $G \backslash S$ больше, чем в G, и S минимально по включению относительно этого свойства. Будем говорить, что S — *нечетный разрез*, если $|S|$ нечетно. В $(2k+1)$-однородном графе разрез S назовем *малым*, если $|S| \leqslant 2k$.

Для $(2k+1)$-однородного графа G без малых нечетных разрезов по теореме Татта имеем $\tau(G) = |V|/2$. Оказывается, для того чтобы число $\tau(G)$ было велико, необходимо наличие в G большого числа малых нечетных разрезов. Для $(2k+1)$-однородного графа G обозначим через $r(G)$ наибольшее r, для которого в G существует множество $\mathcal{F}$, состоящее из r малых нечетных разрезов в G и такое, что каждое ребро графа G принадлежит не более чем двум разрезам из $\mathcal{F}$ (другими словами, $r(G)$ — размер максимальной 2-упаковки малых нечетных разрезов в G). Мы покажем, что с помощью $r(G)$ можно оценить сверху величину $\tau(G) - |V|/2$ для $(2k+1)$-однородного $2t$-реберно-связного графа G.

Теорема I. *Пусть G — $(2k+1)$-однородный $2t$-реберно-связный граф. Тогда*

$$\tau(G) - |V|/2 \leqslant \max\left\{0, \frac{r(G)/2 - 1}{\lfloor (k+t)/(k-t) \rfloor + 1}\right\}.$$

В оценке из теоремы I равенство достигается для любых t, $0 \leqslant t < k$, на бесконечном множестве $(2k+1)$-однородных $(2t+1)$-реберно-связных (в том числе и обыкновенных) графов.

Назовем $(2k+1)$-однородный граф G *m-атомным*, если для любого малого нечетного разреза S каждая из компонент графа $G \backslash S$ имеет не менее m вершин.

Поскольку в описанной ситуации обе компоненты в $G\backslash S$ имеют по нечетному числу вершин, достаточно рассматривать m-атомные графы для нечетных m. Заметим, что любой $(2k+1)$-однородный граф без петель является 3-атомным, а обыкновенный $(2k+1)$-однородный граф — $(2k+3)$-атомным графом.

Теорема II. *Пусть G — произвольный $(2k+1)$-однородный $2t$-реберно-связный m-атомный граф (m нечетно). Тогда*

$$\tau(G) - |V|/2 \leqslant \max\left\{0, \frac{|V| - 2m}{\lfloor (k+t)/(k-t) \rfloor (m+1)}\right\}.$$

В последнем соотношении равенство достигается для любых t, $0 \leqslant t < k$, и нечетных $m > 0$ на бесконечном множестве m-атомных $(2k+1)$-однородных $(2t+1)$-реберно-связных графов. В частности, справедливы следующие утверждения.

Следствие 1. *Максимальное значение $\tau(G)$ в классе n-вершинных $(2k+1)$-однородных $2t$-реберно-связных графов без петель равно величине*

$$\max\left\{n/2, n/2 + \frac{n/2 - 3}{\lfloor (k+t)/(k-t) \rfloor 2}\right\}. \tag{0.2}$$

Следствие 2. *Максимальное значение $\tau(G)$ в классе всех n-вершинных обыкновенных графов не превосходит величины*

$$\max\left\{n/2, n/2 + \frac{n/2 - 2k - 3}{\lfloor (k+t)/(k-t) \rfloor (k+2)}\right\}.$$

Последняя оценка неулучшаема при $\lfloor (k+t)/(k-t) \rfloor^2 \geqslant 2t+1$. В других случаях ее можно улучшить.

Отметим, что при $n \to \infty$ асимптотика полученных оценок для $\tau(G)$ ближе к $n/2$, чем к n.

§ 1. Определения и вспомогательные результаты

Выражение $V(G)$ везде обозначает множество вершин графа G. Для $X, Y \subset V(G)$ через $E(X,Y)$ обозначим множество ребер в G, соединяющих элементы X с элементами Y. Подмножество $X \subset V$ для графа $G = (V, E)$ называется *нечетным*, если сумма степеней вершин из X нечетна, а для подмножества $Y \subset V$ через $q(Y, G)$ обозначим число нечетных компонент связности в графе $G\backslash Y$.

Пусть F — джойн в $G = (V, E)$ и $Y, Y \subset V$, — нечетное множество. Тогда Y и $G \backslash Y$ должно соединять нечетное число ребер из F. Следовательно, для любого разбиения $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_s\}$ множества $V(G)$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{s} q(X_i, G) \leqslant 2\tau(G). \tag{1.1}$$

Разбиение $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_s\}$ множества $V(G)$ называется *оптимальным*, если $\sum\limits_{i=1}^{s} q(X_i, G) = 2\tau(G)$. В [3] доказано, что для любого графа G существует оптимальное разбиение. Нам понадобится следующее усиление этого результата.

Теорема A [4, теорема 2]. *Пусть G — связный граф. Тогда существует оптимальное разбиение $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_s\}$ множества $V(G)$ такое, что*

— *для любых $i \neq j$ множество X_i содержится в какой-то компоненте графа $G \backslash X_j$;*

— *для любого i каждая компонента $G \backslash X_i$ нечетна;*

— *для любой компоненты C графа $G \backslash X_i$ граф $G \backslash C$ связен.*

Оптимальное разбиение со свойствами, указанными в теореме A, называется *сильно оптимальным*.

Замечание 1.1. В $(2k+1)$-однородном графе G для любого $X \subset V(G)$ числа $q(X)$ и $|X|$ имеют одинаковую четность.

Допустим, что G — произвольный $(2k+1)$-однородный граф и $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_s\}$ — сильно оптимальное разбиение $V(G)$. Через $r(X_i, G)$ обозначим число нечетных компонент $G \backslash X_i$, соединенных с вершинами X_i менее чем $2k+1$ ребрами. Положим $r(G, \mathcal{X}) = \sum\limits_{i=1}^{s} r(X_i, G)$. По определению $r(G, \mathcal{X}) \leqslant r(G)$ при любом разбиении $\mathcal{X}$. Поэтому теорема I следует из теоремы I$'$; доказательство последней см. в § 2.

Теорема I$'$. *Пусть $G = (V, E)$ — $(2k+1)$-однородный $2t$-реберно-связный граф и $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_s\}$ — сильно оптимальное разбиение. Тогда*

$$\tau(G) - |V|/2 \leqslant \max\left\{0, \frac{r(G, \mathcal{X})/2 - 1}{\lfloor (k+t)/(k-t) \rfloor + 1}\right\}.$$

В дальнейшем используется обозначение $\alpha = \lfloor (k+t)/(k-t) \rfloor$.

§ 2. Оценки размеров минимальных джойнов через число малых разрезов

Лемма 2.1. *Пусть $G = (V, E)$ — $(2k+1)$-однородный $2t$-реберно-связный граф, а $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_s\}$ — сильно оптимальное разбиение множества V такие, что пара $(G, \mathcal{X})$ является контрпримером к теореме* I$'$ *с наименьшим числом вершин в G. Если C — компонента $G \backslash X_j$ для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant s$, и $|E(C, X_j)| < 2k+1$, то $|V(C)| = 1$ либо $|V \backslash V(C)| = 1$.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна, т. е. имеют место неравенства $2 \leqslant |V(C)| \leqslant |V(G)| - 2$. Разбиение $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_s\}$ множества $V(G)$ оптимальное, поэтому справедливо равенство

$$2\tau(G) = \sum_{i=1}^{s} q(X_i). \tag{2.1}$$

По графу G построим два графа G_1 и G_2 следующим образом: G_1 получим из G, стянув все вершины C в одну вершину z и добавив к z такое число петель, чтобы ее степень в G_1 стала равной $2k+1$; G_2 получим из G, стянув $V(G) \backslash V(C)$ в одну вершину y и добавив к y такое число петель, чтобы ее степень в G_2 стала равной $2k+1$. Поскольку стягивание ребер не понижает реберную связность, G_1 и G_2 являются $2t$-реберно-связными. Докажем, что

$$\tau(G) + 1 = \tau(G_1) + \tau(G_2). \tag{2.2}$$

По теореме A множества $X_1, \dots, X_s$ можно разбить на две группы так, что $X_1, \dots, X_l \subseteq V(C)$, а $X_{l+1}, \dots, X_s \subseteq V(G) \backslash V(C)$. Тогда $\mathcal{X}_1 = \{X_{l+1}, \dots, X_s, \{z\}\}$ и $\mathcal{X}_2 = \{X_1, \dots, X_l, \{y\}\}$ являются разбиениями $V(G_1)$ и $V(G_2)$ соответственно. Согласно (1.1) имеем

$$\sum_{i=1}^{l} q(X_i, G_2) + q(\{y\}, G_2) \leqslant 2\tau(G_2), \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=l+1}^{s} q(X_i, G_1) + q(\{z\}, G_1) \leqslant 2\tau(G_1). \tag{2.4}$$

Но при $1 \leqslant i \leqslant l$

$$q(X_i, G_2) = q(X_i, G), \tag{2.5}$$

а при $l+1 \leqslant i \leqslant s$

$$q(X_i, G_1) = q(X_i, G). \tag{2.6}$$

Объединяя (2.3) с (2.4) и учитывая (2.5), (2.6), получаем

$$\sum_{i=1}^{s} q(X_i, G) + q(\{y\}, G_2) + q(\{z\}, G_1) \leqslant 2\tau(G_2) + 2\tau(G_1). \tag{2.7}$$

Поскольку по теореме А граф $G \backslash C$ связен, а $q(\{y\}, G_2) = 1$ и C — связная компонента в $G \backslash X$, имеем $q(\{z\}, G_1) = 1$. Отсюда с учетом (2.1) и (2.7) получаем неравенство $\tau(G) + 1 \leqslant \tau(G_1) + \tau(G_2)$. Чтобы доказать обратное неравенство, рассмотрим произвольный минимальный джойн F в G. Так как $2\tau(G) = \sum\limits_{i=1}^{s} q(X_i, G)$, множества X_j и $V(C)$ соединяются ровно одним ребром из F. Пусть это ребро (a, b), $a \in V(C)$, $b \notin V(C)$. По джойну F в G построим джойн F_1 в G_1 и джойн F_2 в G_2 следующим образом: $F_1 = (F \backslash (E(C) \cup \{(a,b)\})) \cup \{(b,z)\}$, $F_2 = (F \cap E(C)) \cup \{(a,y)\}$. Имеем

$$\tau(G_1) \leqslant |F_1| = |F \backslash E(C)|, \tag{2.8}$$

$$\tau(G_2) \leqslant |F_2| = |(F \cap E(C)) \cup \{(a,b)\}|. \tag{2.9}$$

Объединяя (2.8) и (2.9), получаем $\tau(G_1) + \tau(G_2) \leqslant |F| + 1 = \tau(G) + 1$. Тем самым утверждение (2.2) доказано.

Из (2.2) следует, что $\mathcal{X} = \{X_{l+1}, \ldots, X_s, \{z\}\}$ и $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_l, \{y\}\}$ — оптимальные разбиения множеств $V(G_1)$ и $V(G_2)$ соответственно. Кроме того, по построению эти разбиения удовлетворяют условиям теоремы А, т. е. X_1 и X_2 — сильно оптимальные разбиения множеств $V(G_1)$ и $V(G_2)$. Наконец, поскольку количество вершин в каждом из графов G_1 и G_2 меньше, чем в графе G, по индукционному предположению имеем

$$\tau(G_1) \leqslant \frac{1}{2}|V(G_1)| + \frac{r(G_1, \mathcal{X}_1) - 2}{2\alpha + 2}, \tag{2.10}$$

$$\tau(G_2) \leqslant \frac{1}{2}|V(G_2)| + \frac{r(G_2, \mathcal{X}_1) - 2}{2\alpha + 2}. \tag{2.11}$$

Так как $r(\{y\}, G_2) = 1$ и $r(\{z\}, G_1) = 1$, а $r(X_i, G_2) = r(X_i, G)$ при $1 \leqslant i \leqslant l$ и $r(X_i, G_1) = r(X_i, G)$ при $l+1 \leqslant i \leqslant s$, справедливо равенство

$$r(G_1, \mathcal{X}_1) + r(G_2, \mathcal{X}_2) = r(G, \mathcal{X}) + 2. \tag{2.12}$$

Объединяя (2.10) с (2.11) и учитывая (2.2) и (2.12), получаем

$$\tau(G) + 1 \leqslant \frac{1}{2}|V(G)| + 1 + \frac{r(G, \mathcal{X}) + 2 - 4}{2\alpha + 2},$$

т. е. $\tau(G) \leqslant \frac{1}{2}|V(G)| + \frac{r(G,\mathcal{X}) - 2}{2\alpha+2}$, что противоречит выбору G. Лемма 2.1 доказана.

Доказательство теоремы I′. Выберем пару $(G, \mathcal{X})$ в соответствии с условием леммы 2.1. Если $q(X_i, G) \leqslant |X_i|$ для любого i, то

$$\sum_{i=1}^{s} q(X_i, G) \leqslant \sum_{i=1}^{s} |X_i| = |V(G)|, \quad 2\tau(G) \leqslant |V(G)|.$$

Таким образом, можно считать, что существует множество X_j такое, что $q(X_j) > |X_j|$. По лемме 2.1 для любого X_i, $|X_i| \geqslant 2$, каждая компонента связности C графа $G \backslash X_i$ при условии $|E(V(C), X_i)| < 2k+1$ должна состоять из одной вершины и, следовательно, образовывать один из классов разбиения $\mathcal{X}$ для некоторого m. То же утверждение справедливо для компонент связности графа $G \backslash X_i$, если $X_i = \{x\}$ и x — точка сочленения в G. Таким образом, в обозначениях

$$Y_1 = \{X_i \in \mathcal{X} \mid |X_i| = 1 \text{ и граф } G \backslash X_i \text{ связен}\}, \; Y_2 = \mathcal{X} \backslash Y_1$$

можно записать

$$\begin{aligned} r(G, \mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{s} r(X_i, G) &= \sum_{X_i \in Y_1} r(X_i, G) + \sum_{X_i \in Y_2} r(X_i, G) \\ &\geqslant 2 \sum_{X_i \in Y_2} r(X_i, G) \geqslant 2 \sum_{\{j \mid |X_j| < q(X_j)\}} r(X_i, G). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Чтобы получить противоречие с выбором G, покажем, что разность $2\tau(G) - |V(G)| - (r(G, \mathcal{X}) - 2)/(\alpha + 1)$ не положительна. Имеем

$$\begin{aligned} 2\tau(G) - |V(G)| &- \frac{r(G, \mathcal{X}) - 2}{\alpha + 1} \\ &\leqslant \sum_{\{i \mid |X_i| \geqslant q(X_i, G)\}} q(X_i, G) + \sum_{\{j \mid |X_j| < q(X_j, G)\}} q(X_j, G) \\ &- \sum_{\{i \mid |X_i| \geqslant q(X_i, G)\}} |X_i| - \sum_{\{j \mid |X_j| < q(X_j, G)\}} |X_j| - \frac{r(G, \mathcal{X})}{\alpha + 1} + \frac{2}{\alpha + 1} \\ &\leqslant \sum_{\{j \mid |X_j| < q(X_j, G)\}} (q(X_j, G) - |X_j|) - \frac{r(G, \mathcal{X})}{\alpha + 1} + \frac{2}{\alpha + 1}. \end{aligned}$$

В силу (2.13) последнее выражение не превосходит величины

$$\sum_{\{j \mid |X_j| < q(X_j, G)\}} \left(q(X_j, G) - |X_j| - \frac{2r(X_j, G)}{\alpha + 1} \right) + \frac{2}{\alpha + 1}.$$

Покажем, что

$$q(X_j,G) \leqslant |X_j| + \frac{2}{\alpha+1}r(X_j,G) - \frac{2}{\alpha+1}.$$

Пусть E_j — множество тех ребер, у которых ровно один конец принадлежит X_j. Тогда $|E_j| \leqslant (2k+1)|X_j|$. Однако

$$|E_j| \geqslant (2t+1)r(X_j,G) + (q(X_j,G) - r(X_j,G))(2k+1).$$

Следовательно,

$$(2k+1)|X_j| \geqslant (2k+1)(q(X_j,G) - r(X_j,G)) + (2t+1)r(X_j,G). \quad (2.14)$$

По определению $\alpha < (k+t+1)/(k-t)$. Таким образом, имеем

$$2t+1 > \frac{\alpha-1}{\alpha+1}(2k+1). \quad (2.15)$$

Подставив (2.15) в (2.14), получаем

$$(2k+1)|X_j| > (2k+1)(q(X_j,G) - r(X_j,G)) + \frac{\alpha-1}{\alpha+1}(2k+1)r(X_j,G).$$

Значит,

$$|X_j| - q(X_j,G) > -r(X_j,G) + ((\alpha-1)/(\alpha+1))r(X_j,G),$$
$$|X_j| - q(X_j,G) + (2/(\alpha+1))r(X_j,G) > 0,$$
$$(\alpha+1)\,(|X_j| - q(X_j,G))/2 + r(X_j,G) > 0.$$

По замечанию 1.1 число $(|X_j| - q(X_j,G))/2$ целое. Поэтому

$$(\alpha+1)\,(|X_j| - q(X_j,G))/2 + r(X_j,G) \geqslant 1,$$
$$|X_j| - q(X_j,G) + (2/(\alpha+1))r(X_j,G) \geqslant 2/(\alpha+1).$$

Теорема I$'$ доказана.

§ 3. Оценка размеров минимальных джойнов в m-атомных графах

Сильно оптимальное разбиение $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_s\}$ множества вершин $(2k+1)$-однородного графа $G = (V, E)$ называется (m)*-разбиением*, если для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant s$, и каждой компоненты связности C в $G \backslash X_j$ такой, что $|E(C, X_j)| < 2k+1$, выполнены следующие условия:

(а) $|V \backslash V(C)| \geqslant m$ либо $G \backslash C$ содержит петлю;

(б) $|V(C)| \geqslant m$ либо C содержит петлю.

Как и в § 2, вместо теоремы II будет доказано более сильное утверждение.

Теорема II$'$. *Пусть G — произвольный $(2k+1)$-однородный $2t$-реберно-связный граф, $p(G)$ — число вершин в G, инцидентных петлям, и существует (m)-разбиение $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_s\}$. Тогда*

$$\tau(G) - |V|/2 \leqslant \max\left\{0, \frac{|V| - 2m + (m-1)p(G)}{(m+1)\alpha}\right\}.$$

Лемма 3.1. *Пусть G — $(2k+1)$-однородный $2t$-реберно-связный граф, а $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_s\}$ — (m)-разбиение множества V такие, что пара $(G, \mathcal{X})$ — контрпример к теореме II$'$ с наименьшим числом вершин в G. Если C — компонента $G \backslash X_j$ для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant s$, и $|E(C, X_j)| < 2k+1$, то $|V(C)| = 1$ либо $|V \backslash V(C)| = 1$.*

Доказательство. Допустим противное, т. е.

$$2 \leqslant |V(C)| \leqslant |V(G)| - 2.$$

По тем же правилам, что и в лемме 2.1, строим графы G_1 и G_2. Точно так же доказывается, что

$$\tau(G) + 1 = \tau(G_1) + \tau(G_2). \tag{3.1}$$

Поэтому разбиения $\mathcal{X}_1 = \{X_{l+1}, \dots, X_s, \{z\}\}$ и $\mathcal{X}_2 = \{X_1, \dots, X_l, \{y\}\}$ множеств $V(G_1)$ и $V(G_2)$ оптимальны. Кроме того, эти оптимальные разбиения удовлетворяют условиям теоремы А, т. е. $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ — сильно оптимальные разбиения множеств $V(G_1)$ и $V(G_2)$. Покажем, что $\mathcal{X}_1$ является (m)-разбиением $V(G_1)$.

Пусть X_j — один из членов разбиения $\mathcal{X}_1$ и D_1 — компонента графа $G_1 \backslash X_j$ с $|E(D_1, X_j)| < 2k+1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $X_j = \{z\}$. В этом случае условие (а) выполняется по построению G_1. Допустим, что $|D_1| = |V(G_1) \backslash \{z\}|$ и $|D_1| < m$. Но тогда $G \backslash C = G(D_1)$ содержит петлю. Следовательно, $G_1(D_1)$ содержит петлю, т. е. условие (б) тоже выполняется.

Случай 2: $X_j \neq \{z\}$.

Случай 2.1: $z \in D_1$. Так как при z есть петля, условие (б) выполняется. Заметим, что D_1 мы получили из некоторой компоненты D графа $G \backslash X$, заменив C на $\{z\}$. По предположению для $G \backslash D$ верно условие (а), а $G \backslash D = G_1 \backslash D_1$.

Случай 2.2: $z \notin D_1$. Тогда D_1 является компонентой в $G \backslash X_j$. Следовательно, для D_1 верно условие (б). Так как $z \in V(G_1) \backslash V(D_1)$, в графе $G \backslash D_1$ есть петля.

Аналогичные рассуждения справедливы и для графа G_2. Значит, $\mathcal{X}_2$ является (m)-разбиением множества $V(G_2)$. Так как $|V(G_1| < |V|$, $|V(G_2)| < |V|$, по индукционному предположению имеем

$$\tau(G_1) \leqslant \frac{1}{2}|V(G_1)| + \frac{|V(G_1)| - 2m + (m-1)p(G_1)}{\alpha(m+1)}, \tag{3.2}$$

$$\tau(G_2) \leqslant \frac{1}{2}|V(G_2)| + \frac{|V(G_2)| - 2m + (m-1)p(G_2)}{\alpha(m+1)}. \tag{3.3}$$

Объединяя (3.2) и (3.3) и учитывая (3.1), получим

$$\tau(G) + 1 \leqslant \frac{1}{2}|V(G)| + 1 + \frac{|V(G)| + 2 - 4m + (m-1)(p(G_1) + p(G_2))}{\alpha(m+1)}.$$

Но $p(G_1) + p(G_2) = p(G)$. Следовательно,

$$\tau(G) \leqslant \frac{1}{2}|V(G)| + \frac{|V(G)| - 2m + (m-1)p(G)}{\alpha(m+1)}.$$

Противоречие. Лемма 3.1 доказана.

Доказательство теоремы II$'$. Выберем пару $(G, \mathcal{X})$, как в условии леммы 3.1. Если $q(X_i, G) \leqslant |X_i|$ для любого i, то

$$\sum_{i=1}^{s} q(X_i, G) \leqslant \sum_{i=1}^{s} |X_i| = |V(G)|, \quad 2\tau(G) \leqslant |V(G)|.$$

Таким образом, можно считать, что существует X_j с $q(X_j, G) > |X_j|$. По замечанию 1.1 имеем

$$q(X_j, G) \geqslant |X_j| + 2. \tag{3.4}$$

Из леммы 3.1 вытекает, что для любого X_i, $|X_i| \geqslant 2$, каждая компонента связности U графа $G \backslash X_i$ при условии $|E(V(C), X_i)| < 2k+1$ состоит из одной вершины u и, следовательно, совпадает с X_m для некоторого m. Кроме того, поскольку $|E(V(C), X_i)| < 2k+1$, вершина u инцидентна хотя бы одной петле. То же самое справедливо, если $X_i = \{x\}$ и x — точка сочленения в G. Следовательно, $r(G, \mathcal{X}) \leqslant 2p(G)$, и из теоремы I$'$ имеем

$$\tau(G) - |V|/2 \leqslant \frac{r(G, \mathcal{X})/2 - 1}{\alpha + 1} \leqslant \frac{p(G) - 1}{\alpha + 1}.$$

Покажем, что выполняется неравенство

$$\frac{p(G) - 1}{\alpha + 1} \leqslant \frac{|V| - 2m + (m-1)p(G)}{\alpha(m+1)}. \tag{3.5}$$

Если это не так, то, положив $p = p(G)$, имеем

$$\alpha mp - \alpha m + \alpha p - a > (\alpha+1)|V| - 2\alpha m - 2m + (\alpha m - \alpha + m - 1)p,$$

$$(\alpha+2)m - \alpha > (\alpha+1)|V| + (m - 2\alpha - 1)p. \qquad (3.6)$$

Учитывая (3.4) и (2.14), получаем

$$|X_j| + 2 \leqslant q(X_j, G) \leqslant |X_j| + \frac{2}{\alpha+1}(r(X_j, G) - 1), \quad (\alpha+1) \leqslant r(X_j, G) - 1.$$

Следовательно,

$$q(X_j, G) \geqslant r(X_j, G) \geqslant \alpha + 2. \qquad (3.7)$$

Любой нечетный разрез в графе G содержит не менее $2t+1$ ребер. Поэтому $(2t+1)q(X_j, G) \leqslant (2k+1)|X_j|$. Следовательно, с учетом (2.15) и (3.7) имеем соотношения $|X_j| > \frac{\alpha-1}{\alpha+1}(\alpha+2) = \alpha - \frac{2}{\alpha+1}$. Поэтому $|X_j| \geqslant \alpha \geqslant 1$ и из (3.7) вытекают неравенства $|V| \geqslant 2\alpha + 2$ и $p \geqslant r(X_j, G) \geqslant \alpha + 2$. Подставив в (3.6) оценки величин $|V(G)|$ и p, находим

$$(\alpha+2)m - \alpha > (\alpha+1)(2\alpha+2) + (m - 2\alpha - 1)(\alpha+2),$$
$$(2\alpha+1)(\alpha+2) > (\alpha+1)(2\alpha+2) + \alpha,$$
$$2\alpha^2 + 5\alpha + 2 > 2\alpha^2 + 5\alpha + 2,$$

что невозможно. Неравенство (3.5) верно. Теорема II$'$ доказана.

Из теоремы II$'$ непосредственно вытекают следствие 2 и оценка сверху максимального значения $\tau(G)$ в следствии 1.

§ 4. Примеры достижимости оценок

В полном двудольном графе $K_{m,m}$ с долями $\{x_1, \ldots, x_m\}$ и $\{y_1, \ldots, y_m\}$ введем нумерацию $N(e)$ ребер по правилу $N((x_i, y_j)) = i + m(j - i)$, где разность $j - i$ берется по модулю m. Таким образом, множество ребер e с номером $N(e) \leqslant m$ образует паросочетание, соединяющее вершины с одинаковыми индексами, множество ребер e с номером $m + 1 \leqslant N(e) \leqslant 2m$ образует паросочетание, в котором x_i соединяется с y_{i+1}, и т. д. Будем полагать, что при $i > m^2$ ребро e_i параллельно ребру e_{i-m^2}. Пусть $H(m,p)$ — мультиграф, порожденный ребрами $K_{m,m}$ с номерами $1, 2, \ldots, p$. Кратные ребра появляются в $H(m,p)$ при $p > m^2$. Пример мультиграфа $H(2,6)$ изображен на рис. 1.

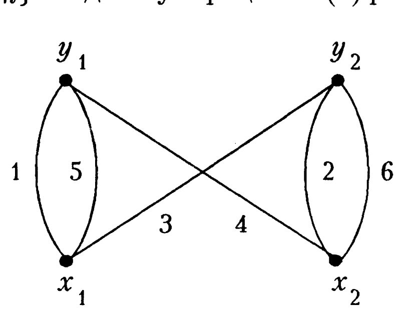

Рис. 1. Мультиграф $H(2,6)$

Лемма 4.1. *Пусть $m \geqslant 1$, $p \geqslant 2$ — натуральные числа. Тогда*

— *мультиграф $H(m,pm)$ является p-реберно-связным при $m \neq 2$;*

— *мультиграф $H(2,2p)$ является $2\lfloor p/2 \rfloor$-реберно-связным;*

— *мультиграф $H(m,pm,s)$, полученный из $H(m,pm)$ расщеплением вершины x_1 на две вершины: вершину x' степени s ($s \leqslant p/2$) и x'' степени $p-s$, является s-реберно-связным.*

Доказательство. Пусть $R = (V_1, V_2)$ — разрез в $H(m,pm)$, $V_x = \{x_1, \dots, x_m\} \cap V_1$, $V_y = \{y_1, \dots, y_m\} \cap V_1$. Ввиду симметрии V_1 и V_2 можно считать, что $|V_x| \geqslant |V_y|$.

Как отмечалось, множество $E(H(m,pm))$ можно разбить на p паросочетаний $\Pi_1, \dots, \Pi_p$, где Π_i состоит из ребер с номерами $(i-1)m + 1, \dots, im$. Если $|V_x| > |V_y|$, то в каждом из $\Pi_1, \dots, \Pi_p$ хотя бы одно ребро принадлежит R, а значит, $|R| \geqslant p$. Пусть $|V_x| = |V_y|$. Допустим, что при некотором i ребра из Π_i соединяют каждую вершину из V_x с какой-нибудь вершиной из V_y. Пусть для определенности $V_x = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_l}\}$, $V_y = \{y_{i_1+i}, \dots, y_{i_l+i}\}$.

Случай 1: в циклическом порядке $(x_1, \dots, x_m)$ элементы $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$ расположены подряд. Без ограничения общности можно считать, что $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_l}\} = \{x_1, \dots, x_l\}$. Тогда при любом $j \neq i + mh$ в Π_j найдутся ребро, соединяющее V_x с V_2, и ребро, соединяющее V_y с V_2. Следовательно, $|R| \geqslant 2(p - \lceil p/m \rceil)$. Неравенство $p > 2(p - \lceil p/m \rceil)$ справедливо лишь при $m \in \{1, 2\}$. Но $H(1,p)$ — это просто p-кратное ребро, а при $m = 2$ получаем $|R| \geqslant 2(p - \lceil p/2 \rceil) = 2\lfloor p/2 \rfloor$.

Случай 2: найдутся $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{i_1, \dots, i_l\}$ ($i_1 \neq i_2, i_3 \neq i_4$) такие, что $x_{i_1-1} \notin V_x$, $x_{i_2-1} \notin V_x$, $x_{i_3+1} \notin V_x$, $x_{i_4+1} \notin V_x$. Тогда ребра (x_{i_1}, y_{i_1+i-1}), (x_{i_2}, y_{i_2+i-1}), (x_{i_3+1+i}, y_{i_3+i}), (x_{i_4+1+i}, y_{i_4+i}) в Π_{i-1} и как минимум четыре ребра в Π_{i+1} принадлежат R. Следовательно, $|R| \geqslant 4\lfloor p/2 \rfloor > p$.

Таким образом, первые два утверждения леммы доказаны. Для доказательства третьего утверждения рассмотрим произвольный разрез $R = (V_1, V_2)$ в $H(m,pm,s)$. Множества V_x и V_y определим так же, как и выше. Если в V_x входят x' и x'' либо не входят ни x', ни x'', то разрез R есть и в $H(m,pm)$. Следовательно, $|R| \geqslant p$. Пусть $x' \in V_x$, $x'' \notin V_x$. Тогда число ребер, инцидентных V_x, равно $(|V_x| - 1)p + s$, а число ребер, инцидентных V_y, кратно p. Поэтому разность $|E(V_x, V_2)| - |E(V_y, V_2|$ равна по модулю p либо s, либо $p - s$. Лемма 4.1 доказана.

Замечание 4.1. Если k, t ($k > t \geqslant 0$) — натуральные числа, то $\alpha = \lfloor (k+t)/(k-t) \rfloor > (k+t)/(k-t) - 1 = 2t/(k-t)$. Следовательно, $\alpha \geqslant (2t+1)/(k-t)$, и справедливо неравенство

$$k - t \geqslant \lceil (2t+1)/\alpha \rceil. \tag{4.1}$$

Для каждого $s \geqslant 2$ построим граф $G_1 = G_1(k,t,s)$ по следующим правилам. Пусть $V(G_1) = \bigcup_{i=1}^{s}(V_i \cup W_i) \cup \{w_{1,\alpha+1}, w_{s,\alpha+1}\}$, где $V_i = \{v_{ij} \mid j = 1,\dots,\alpha\}$ при $1 \leqslant i \leqslant s$, $W_i = \{w_{ij} \mid j = 1,\dots,\alpha\}$ при $1 \leqslant i \leqslant s$. Для $i = 1,\dots,s$ подграф мультиграфа G_1, порожденный множеством $V_i \cup W_i$, положим изоморфным графу $H(\alpha,(2t+1)\alpha)$ с долями V_i и W_i. Подграф, порожденный множеством $V_i \cup V_{i+1}$, положим при нечетных i, $1 \leqslant i \leqslant s-1$, изоморфным графу $H(\alpha, 2t+1)$ с долями V_i и V_{i+1}, а при четных i $(2 \leqslant i \leqslant s-1)$ — тому же графу с долями V_{i+1} и V_i. Наконец, пусть для каждого $j \in \{1,\dots,\alpha\}$ вершину v_{1j} соединяет с $w_{1,\alpha+1}$ столько же ребер, сколько и с V_2, а вершину v_{sj} соединяет с $w_{s,\alpha+1}$ столько же ребер, сколько и с V_{s-1}. На рис. 2 изображен граф $G_1(3,1,3)$ (в этом случае $\alpha = 2$).

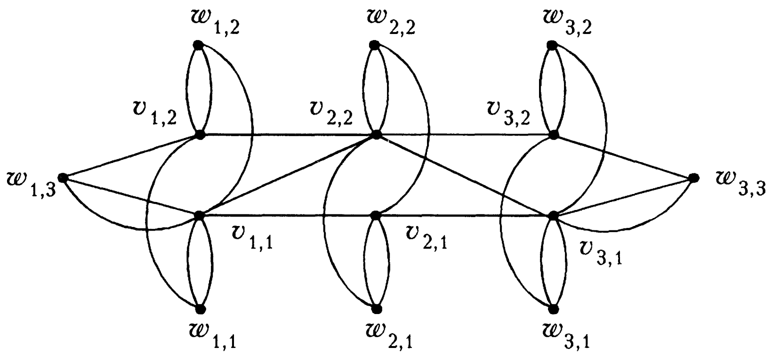

Рис. 2. Мультиграф $G(3,1,3)$

Введем новую величину $q(G)$ — наибольшую мощность 2-упаковки нечетных разрезов в G, т. е. наибольшую мощность такого семейства нечетных разрезов в G, что каждое ребро G принадлежит не более чем двум разрезам из этого семейства.

Утверждение 4.1. *При любых целых k,t,s $(k > t \geqslant 0,\ s \geqslant 2)$ граф $G_1 = G_1(k,t,s)$ обладает следующими свойствами:*

1) *G является $(2t+1)$-реберно-связным;*
2) *степень каждой вершины в G_1 не превосходит $2k+1$;*
3) *степени всех вершин в G_1 нечетны;*
4) *$\tau(G) = (\alpha+1)s+1$;*
5) *$r(G_1) = q(G_1) = 2(\alpha+1)s+2$.*

Доказательство. Допустим, что в графе G_1 есть разрез $R = (X, V\backslash X)$ такой, что $|R| \leqslant 2t$. Можно считать, что $v_{1,1} \in X$. При $\alpha \geqslant 3$ по лемме 4.1 подграф графа G_1 на множестве вершин $V_1 \cup W_1$ является $(2t+1)$-реберно-связным. Поэтому $V_1 \cup W_1 \subset X$. По той же

лемме граф $H(2, 2(2t+1))$ является $2t$-реберно-связным и вершины v_{11} и v_{12} соединяет также цепь (v_{11}, v_{22}, v_{12}), поскольку $2t+1 \geqslant 3$. Таким образом, при $\alpha = 2$ имеем $\{v_{11}, v_{12}, w_{11}, w_{12}\} \subset X$. Вершина $w_{1,\alpha+1}$ соединена ребрами лишь с V_1, поэтому $w_{1,\alpha+1} \in X$.

Аналогично получаем, что множество $V_2 \cup W_2$ полностью лежит либо в X, либо в $V(G_1)\backslash X$. Поскольку ровно $2t+1$ ребер соединяют $V_2 \cup W_2$ с V_1, множество $V_2 \cup W_2$ содержится в X. Точно так же устанавливаем, что $V_3 \cup W_3 \subset X$ и т. д. Следовательно, $X = V(G_1)$.

Для доказательства свойств 2, 3 заметим, что при $2 \leqslant i \leqslant s-1$, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$ вершина v_{ij} соединена $2t+1$ ребрами с W_i, не более чем $\lceil (2t+1)/\alpha \rceil$ ребрами с V_{i-1} и таким же числом ребер с V_{i+1}. Таким образом, степень v_{ij} нечетна и согласно (4.1) не превосходит величины $2t+1+2(k-t) = 2k+1$. Степень каждой вершины вида w_{ij} равна $2t+1$. Вершина v_{1j}, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, по построению соединена одинаковым числом ребер (не превосходящим $\lceil (2t+1)/\alpha \rceil$) с $w_{1,\alpha+1}$ и с V_2. Значит, степень вершины v_{1j} в G_1 нечетна и не превосходит $2k+1$. Аналогичное утверждение справедливо и для вершины v_{sj}.

Множество ребер

$$
\begin{aligned}
F = &\{(w_{ij}, v_{ij}) \mid 1 \leqslant i \leqslant s; 1 \leqslant j \leqslant \alpha\} \\
&\cup \{(v_{i1}, v_{i+1,1}) \mid 1 \leqslant i \leqslant s-1\} \cup \{(w_{1,\alpha+1}, v_{11}), (w_{s,\alpha+1}, v_{s,1})\}
\end{aligned}
$$

является джойном в G_1. Поэтому

$$\tau(G_1) \leqslant (\alpha+1)s + 1. \tag{4.2}$$

Рассмотрим разбиение $\mathcal{X} = \{V_1, \dots, V_s, Y_1, \dots, Y_{\alpha s+2}\}$ множества $V(G_1)$, где $V_i = \{v_{i1}, \dots, v_{i\alpha}\}$ $(i = 1, \dots, s)$, а $Y_1, \dots, Y_{\alpha s+2}$ содержат по одной вершине. Тогда $r(V_i, G_1) = \alpha + 2$ и $r(Y_j, G_1) = 1$ при всех $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, \alpha s + 2$. Следовательно, с одной стороны,

$$r(G_1) \geqslant r(G_1, \mathcal{X}) \geqslant 2(\alpha+1)s + 2,$$

а с другой стороны,

$$2\tau(G_1) \geqslant 2(\alpha+1)s + 2.$$

Ввиду (4.2) имеем $2\tau(G_1) = 2(\alpha+1)s + 2$. Поскольку $|E(G_1)| = (2t+1)(\alpha s+2) + (2t+1)(s-1)$ и граф G_1 является $(2t+1)$-реберно-связным, верно соотношение

$$q(G_1) \leqslant (2\,|E(G_1)|)/(2t+1) = 2(\alpha+1)s + 2.$$

Утверждение 4.1 доказано.

Пусть $(2k+1)$-однородный граф $G_2 = G_2(k,t,s)$ получен из графа $G_1(k,t,s)$ добавлением к каждой из вершин необходимого количества петель. Ясно, что граф G_2 является $(2t+1)$-реберно-связным, $\tau(G_2) = \tau(G_1)$ и $q(G_1) = q(G_2) = r(G_1) = r(G_2)$. Поэтому из теоремы I получаем

$$\tau(G_2) - |V(G_2)|/2 \leqslant \frac{0.5(2(\alpha+1)s+2)-1}{\alpha+2} = s.$$

Но одновременно верно равенство

$$\tau(G_2) - |V(G_2)|/2 = (\alpha+1)s + 1 - (2\alpha s+2)/2 = s.$$

Таким образом, верхняя оценка величины $\tau(G) - |v|/2$ из теоремы I (как и аналогичная оценка из теоремы I$'$) неулучшаема на графах $G_2(k,t,s)$.

Построим примеры графов без петель, на которых в оценках из теорем I и II достигаются равенства. Если $k=1$, то $t=0$ и примеры легко получить из графа $G_1(k,t,s)$, подвесив к его висячим вершинам m-вершинные блоки, в каждом из которых одна вершина (за которую подвешиваем) имеет степень два, а остальные — степень три. При $m \geqslant 5$ можно выбрать эти блоки без кратных ребер. Любой такой граф $G_3(1,0,s,m)$ имеет $m(s+2)+s$ вершин, при этом $r(G_3(1,0,s,m)) = s+2$ и $\tau(G_3(1,0,s,m)) = (ms+2m+s)/2 + s$. В случае $k \geqslant 2$ потребуется более сложная конструкция.

Известно, что если m, i, j ($m \geqslant 3$, $i \geqslant 3$, $0 \leqslant j < m$) — целые числа и число $mi + j$ четно, то существует m-вершинный граф $J = J(m,i,j)$, обладающий следующими свойствами:

(J1) j вершин графа J имеют степень $i+1$, остальные — степень i;

(J2) граф J является i-реберно-связным и любой нетривиальный разрез (т. е. разрез $R = (X,Y)$ с $|X| \geqslant 2$, $|Y| \geqslant 2$) содержит не менее $i+1$ ребер;

(J3) в графе J нет петель;

(J4) при $mi + j \leqslant m(m-1)/2$ граф J является обыкновенным графом.

Имеется много конструкций со свойствами (J1)–(J4). Некоторые примеры можно извлечь из [5].

Для нечетных m ($m \geqslant 3$) и целых k,t,s ($k \geqslant 2$, $0 \leqslant t < k$, $s \geqslant 2$) построим граф $G_3 = G_3(k,t,s,m)$ из графа $G_1(k,t,s)$ по следующим правилам. Пусть $\gamma = \lceil (2t+1)/m \rceil$, $\delta = \gamma m - (2t+1)$. Каждую вершину

$$w_{ij} \in \bigcup_{i=1}^{s} W_i \cup \{w_{1,\alpha+1}, w_{s,\alpha+1}\}$$

«расщепим» так, что получим множество $W_{ij} = \{w_{ij}(1), \dots, w_{ij}(m)\}$ вершин, обладающее следующими свойствами:

— степень каждой вершины из W_{ij} равняется γ или $\gamma - 1$;

— для каждой вершины v_{ih} $(1 \leqslant h \leqslant \alpha)$ количества ребер, соединяющих v_{ih} с различными вершинами из W_{ij}, отличаются не более чем на единицу.

Наконец, к полученному графу добавим ребра так, чтобы подграф, порожденный W_{ij}, стал изоморфен $J(m, 2k+1-\gamma, m-d)$, а вершины из W_{ij}, соединенные с V_i ровно γ ребрами, имели в $J(m, 2k+1-\gamma, m-\delta)$ степень $2k+1-\gamma$. Заметим, что при $k \geqslant 2$, $m \geqslant 3$, $0 \leqslant t < k$ справедливы неравенства

$$2k + 1 - \lceil (2t+1)/m \rceil \geqslant 2k + 1 - \lceil (2k-1)/3 \rceil \geqslant 4$$

и граф $J(m, 2k+1-\gamma, m-\delta)$ существует.

Утверждение 4.2. *Граф $G_3 = G_3(k,t,s,m)$ при нечетных $m \geqslant 3$ обладает следующими свойствами:*

(а) *степень каждой вершины из $V(G_3) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} V_i$ равна $2k+1$, степень каждой вершины из $\bigcup_{i=1}^{s} V_i$ равна $2t+1+2\lceil (2t+1)/\alpha \rceil$ или $2t-1+2\lceil (2t+1)/\alpha \rceil$;*

(б) *граф G_3 является $(2t+1)$-реберно-связным;*

(в) $r(G_3) = r(G_1)$;

(г) *граф G_3 является m-атомным.*

Доказательство. Свойство (а) непосредственно следует из определений графов G_1 и G_3. Для доказательства свойств (б)–(г) достаточно проверить, что для любых малого разреза $R = (X, V(G_3) \setminus X)$ и пары (i,j) все вершины из W_{ij} лежат либо в X, либо в $V(G_3) \setminus X$.

Допустим, что для некоторых разреза $R = (X, V(G_3) \setminus X)$ и индексов i, j имеем $w_{ij}(1) \in X$, $w_{ij}(m) \notin X$. Можно считать, что $|X \cap W_{ij}| \leqslant |W_{ij}|/2$. Обозначим $X_{ij} = X \cap W_{ij}$.

Случай 1: $X_{ij} = \{w_{ij}(1)\}$. Пусть $w_{ij}(1)$ соединяют с V_i точно x ребер. В этом случае оставшиеся $2k+1-x$ ребер, инцидентных $w_{ij}(1)$, принадлежат R. Кроме того, по лемме 4.1 дополнительно x ребер, соединяющих W_i с V_i, принадлежат R.

Случай 2: $|X_{ij}| \geqslant 2$. По свойству (J2) не менее $2k+2-\gamma$ ребер из R соединяет X_{ij} с $W_{ij} \setminus X_{ij}$. Кроме того, по лемме 4.1 дополнительно не менее $\gamma - 1$ ребер, соединяющих W_i с V_i, принадлежат R. Утверждение 4.2 доказано.

Чтобы достроить граф G_3 до $(2k+1)$-однородного графа с требуемыми свойствами, используем следующее

Замечание 4.2. Пусть в графе H выделены ребро e, соединяющее вершины v и u, и вершина $w \notin \{v, u\}$. Обозначим через $H(e, w)$ граф, полученный из H удалением ребра e и добавлением двух новых ребер e_1 и e_2, соединяющих w с v и u соответственно. Тогда для любого разбиения $(X, V(H)\backslash X)$ мощность разреза в $H(e, w)$, определяемого этим разбиением, не меньше мощности соответствующего разреза в H, и их четности одинаковы.

Обозначим $H_0 = G_3(k, t, s, m)$ и положим $\lambda = 1$. Затем выполним следующую процедуру.

Шаг λ. Если граф H_λ является $(2k+1)$-однородным, то положим $G_4(k, t, s, m) = H_\lambda$. Если найдется вершина v_{ij}, степень которой меньше $2k+1$, то выберем в подграфе графа H_λ, порожденном множеством W_i, произвольное ребро e, положим $H_{\lambda+1} = H_\lambda(e, v_{ij})$ и перейдем к шагу $l+1$. Наличие нужного ребра e обеспечено соотношениями

$$|W_i| = m|V_i| \geqslant 3|V_i|.$$

Таким образом, через конечное число шагов мы построим граф $G_4 = G_4(k, t, s, m)$. Граф G_4 является $(2k+1)$-однородным по построению, а по утверждению 4.2 и замечанию 4.2 он $(2t+1)$-реберно-связный и m-атомный, $r(G_4) = r(G_3) = r(G_1) = 2(\alpha+1)s + 2$. Понятно, что $|V(G_4)| = \alpha s + (s\alpha + 2)m$.

В разбиении $\mathcal{X} = \{V_1, \ldots, V_s, X_1, \ldots, X_{m(s\alpha+2)}\}$ множества $V(G_4)$ все X_i являются одноэлементными, поэтому

$$2\tau(G_4) \geqslant (\alpha+2)s + m(\alpha s + 2) = |V(G_4)| + s,$$

т. е. $\tau(G_4) - |V(G_4)|/2 \geqslant s$. По теореме I

$$\tau(G_4) - |V(G_4)|/2 \leqslant \frac{(2(\alpha+1)s+2)/2 - 1}{(\alpha+1)} = s.$$

По теореме II

$$\tau(G_4) - |V(G_4)|/2 \leqslant \frac{\alpha s + (s\alpha+2)m - 2m}{\alpha(m+1)} = s.$$

Таким образом, верхние оценки величин $\tau(G_4)$ из теорем I и II точны. Величина $\tau(G_4(k, t, s, 3))$ равна величине (0.2), что завершает доказательство следствия 1. Если $\alpha^2 \geqslant 2t+1$ и $m \geqslant 2k+3$, то при построении H_λ пары (e, v_{ij}) можно выбрать так, что G_4 будет обыкновенным графом. Тогда оценка из следствия 2 для $\tau(G_4)$ тоже точна.

Заметим (без доказательства), что при $\alpha^2 < 2t+1$ и $m \geqslant 2k+3$ из графа G_4 можно построить обыкновенный граф, для которого оценка из теоремы I точна. Но оценка из теоремы II в этих условиях уже не является точной для обыкновенных графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Raspaud A.** Postman tours and cycle covers // Discrete Math. 1993. V. 111, N 3. P. 447–454.
2. **Тулай Н.** Экстремальные графы для задачи китайского почтальона // Методы дискретного анализа в теории графов и сложности. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1992. Вып. 52. С. 102–111.
3. **Frank A., Sebő A., Tardos É.** Covering directed and odd cuts // Math. Programming Stud. 1984. V. 22, N 1. P. 99–112.
4. **Косточка А. В.** Одно уточнение теоремы Франка — Шебо — Тардош и его применения // Сиб. журн. исследования операций. 1994. Т. 1, № 3. С. 3–19.
5. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987.

Адрес авторов:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4
Институт математики СО РАН

Статья поступила

17 мая 1994 г.