

УДК 519.714.23

ДИАГНОСТИКА ЧАСТЕЙ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ*)

В. Н. Носков

Предлагается метод преобразования любой части произвольной схемы из функциональных элементов в подсхему, для которой возможна диагностика с хорошей локализацией возникающих в подсхеме неисправностей. Даются оценки сложности преобразованной схемы и длины диагностического теста. Строится тестовое множество. Класс допустимых неисправностей весьма широк. Полный элементный базис схем произвольный.

§ 1. Постановка задачи и формулировки основных результатов

Одним из наиболее перспективных направлений теории контроля неисправностей управляющих систем представляется поиск методов синтеза удобных для контроля систем. С. Редди [1], В. И. Шевченко [2], А. П. Горяшко [3], Н. П. Редькин [4] и др. предложили различные методы синтеза легкотестируемых схем из функциональных элементов. Авторы таких методов обычно рассматривают неисправности, связанные с неправильной работой базисных элементов схемы. При этом существенно ограничивается класс допустимых неисправностей (самым изученным оказался класс константных неисправностей на входах и выходах элементов схем). Кроме того, для построения схем используется полный элементный базис, подчиненный некоторым ограничениям.

В [5–8] автором предложены новые методы синтеза удобных для контроля комбинационных схем, в которых допускаются неисправности, более разнообразные, чем обычно предполагается, а элементный полный базис произвольный. Эти методы позволяют строить легко тестируемые схемы, реализующие булевы функции. При некоторых условиях для почти всех булевых функций удается строить схемы со

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-00198-а).

сложностью, асимптотически совпадающей со сложностью минимальных схем, к которым не предъявляется требований, связанных с удобством их тестирования.

В [5–8] изложены методы построения схем, допускающих простые проверяющие тесты (процедуры, позволяющие выяснить, правильно ли функционирует схема). В настоящей статье представлены способы построения схем, допускающих диагностические тесты (процедуры, позволяющие не только узнать о том, правильно ли работает заданная часть схемы, но и локализовать неисправности, т. е. указать фрагменты с неисправными элементами). Размеры фрагментов являются важными характеристиками качества тестовых процедур.

Отметим существенную особенность диагностики схем с малым числом выходов: эффективность тестового контроля зависит от функционирования частей схем, непосредственно примыкающих к выходам. Действительно, пусть в схеме имеется элемент β , выход которого является единственным для всей схемы. Если неисправность элемента β — это константа на его выходе (при появлении неисправности элемент реализует константную функцию), то при подаче любых наборов на входы схемы на ее выходе появляется одно и то же значение. В этой ситуации тестовыми проверками нельзя выяснить, имеются ли в схеме отличные от β неисправные элементы. Нетрудно привести соответствующие примеры для схем с несколькими выходами. Для того, чтобы при эксплуатации схемы не оказаться в подобных условиях, проектируемая схема должна обладать свойствами, обеспечивающими возможность ее эффективного контроля.

Схему S с фиксированной частью C называем *пригодной для C -диагностики*, если в C можно выделить небольшую по числу элементов часть (называем ее *особая часть*) со следующим свойством: можно указать множество T входных векторов для схемы S таких, что

- при подаче входных векторов из T на входы схемы S по реакции последней можно выяснить, является ли исправной особая часть;
- если особая часть исправна, то по реакции схемы S на входные векторы из T можно локализовать неисправности в C , т. е. найти неисправные элементы схемы C либо небольшие части, содержащие неисправные элементы.

Можно считать, что если схема S пригодна для C -диагностики, то в S хорошо локализуются неисправности, возникающие в ее подсхеме C .

Приведенное определение пригодной для C -диагностики схемы неформально, так как явно не указываются допустимые границы сложностей особой части и частей, в которых локализуются обнаруживаемые неисправности. Эти границы следует определять при конкретных постановках задачи контроля.

В данной статье предлагается способ преобразования произвольной схемы из функциональных элементов S в схему S' . При этом пре-

образовании произвольно заданная часть B схемы S превращается в схему C , а оставшаяся часть схемы S не изменяется. В схеме C выделяется особая часть. Схема S' имеет входов больше, чем схема S (число дополнительных входов будет указано в формулировке теоремы 1), и один дополнительный выход. Схема S' такова, что если зафиксированы подходящие значения на дополнительных входах, то на основных выходах схемы реализуются те же функции, что и на выходах исходной схемы. Гарантируется, что устранение выявленных в C неисправностей приводит к восстановлению правильной работы преобразованной части. После устранения неисправностей в C схема S' может работать неверно из-за неисправностей, возникших в ее элементах, находящихся вне C . При указанном преобразовании сложности особой части и каждой из частей, в которых локализуются неисправности схемы, не зависят от сложности схемы C и относительно малы по сравнению со сложностью всей схемы. Это позволяет характеризовать предлагаемый способ преобразования схемы как метод построения пригодных для C -диагностики схем. При наших рассуждениях предполагается, что класс допустимых неисправностей весьма широк.

Отметим, что мы рассматриваем диагностику неисправностей не во всей схеме, а лишь в некоторой выделенной ее части C , где неисправными могут быть не более $n/2 - 1$ элементов (n — число входов в схеме S). В некоторых практических задачах считается приемлемым подход, когда все внимание сосредоточено на контроле наиболее ответственной части схемы (такая ситуация возникает, например, в схемах с самокорректированием, где недопустимо игнорирование неисправностей в частях схем, обеспечивающих коррекцию неисправностей). При этом ослабляются требования к полноте контроля всей схемы: при тестировании схемы достаточно обнаружить и локализовать неисправности, возникшие не во всей схеме, а лишь в заданной ее части. При нашем подходе случай, когда B совпадает со схемой S , не исключается. Но схема B преобразуется в схему C , существенно более сложную, чем B . Если сложность схемы B составляет малую долю сложности всей схемы S , то преобразование схемы S в схему S' таково, что сложности схем S и S' асимптотически совпадают. Если же сложность схемы B сравнима со сложностью схемы S , то схема S' является существенно более сложной, чем схема S . Поэтому на практике наш метод может быть полезен прежде всего в случаях, когда сложность схемы B мала по сравнению со сложностью схемы S .

Перейдем к описанию класса допустимых неисправностей схемы.

Пусть S — произвольная схема из функциональных элементов, реализующая в некотором произвольном конечном полном базисе булевых функциональных элементов $\mathfrak{B} = \{\varphi_i\}$, $i = 1, \dots, g$, систему q произвольных булевых функций от переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Обозначим через a_1, \dots, a_q выходы схемы S . Выделим в S произвольное подмножество ее функциональных элементов и обозначим его через B . Мно-

жество оставшихся в S элементов обозначим через A . Обозначив схему S через $S(A, B, \tilde{x}_n)$, представим ее в виде соединения частей A и B так, как показано на рис. 1 (здесь и ниже полагаем $\tilde{x}_t = (x_1, \dots, x_t)$).

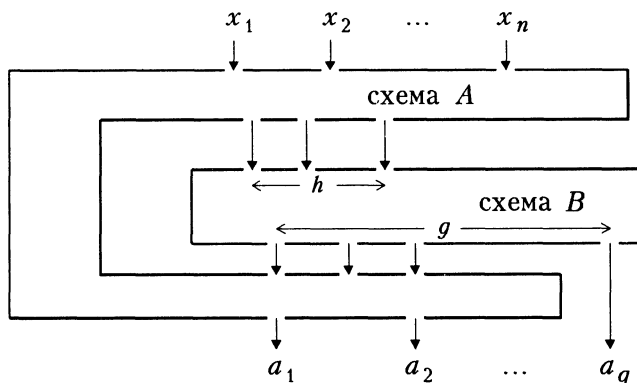


Рис. 1. Схема $S(A, B, \tilde{x}_n)$

Пусть схема B имеет h входов, g выходов, а C — некоторая схема из функциональных элементов с $h + n + l$ входами и $g + 1$ выходами. Заменяя в схеме $S(A, B, \tilde{x}_n)$ подсхему B на схему C , как показано на рис. 2, получим новую схему $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$.

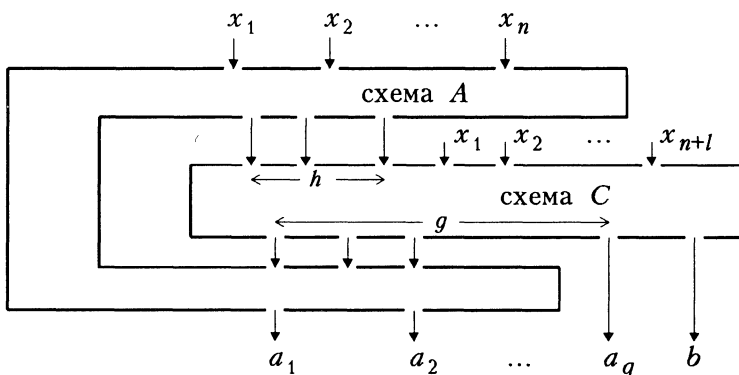


Рис. 2. Схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$

Обозначим через $S_a(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ и $S_a(A, B, \tilde{x}_n)$ вектор-функции, реализующиеся на выходах a_1, \dots, a_q схем $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ и $S(A, B, \tilde{x}_n)$ соответственно. Через $S_b(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ обозначим функцию, реализующуюся на дополнительном выходе b схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$.

Поясним, что мы понимаем под допустимыми неисправностями в схеме $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$. Полагаем, что в подсхеме A схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ могут появляться неисправности такие, что возникающая вместо A не-

исправная схема A' есть комбинационная схема с теми же входными и выходными полюсами, что и схема A . Пусть β — один из элементов схемы C с t входами и одним выходом, а v_1, \dots, v_t — входные полюсы элемента β , на которые могут поступать сигналы 0 и 1. Считаем v_1, \dots, v_t булевыми переменными. В схеме C на выходе элемента β реализуется булева функция $\beta(v_1, \dots, v_t)$, а при появлении в схеме C допустимых неисправностей элемент β может превратиться в элемент β^* , реализующий произвольную булеву функцию β^* от переменных v_1, \dots, v_t . Предположим, что в C могут быть неисправными одновременно не более m элементов. Описанные здесь неисправности схем A и C будем называть *допустимыми*.

Введем следующие обозначения:

A^* и C^* — схемы, в которые превращаются схемы A и C при появлении в них допустимых неисправностей;

$S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ — схема, в которую переходит схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$, когда ее подсхемы A и C превращаются в схемы A^* и C^* ;

$\mu = \max \mu(\beta)$, где $\mu(\beta)$ — число элементов схемы B , у которых хотя бы один вход соединен с выходом элемента β из B , а максимум берется по всем элементам β из B ;

$|T|$ — мощность множества T ;

$L(D)$ — сложность схемы D , т. е. число ее элементов;

$r(i)$ — число входов базисного элемента φ_i ;

$r = \max r(i)$, где максимум берется по всем элементам φ_i базиса;

$\pi(T)$ — последовательность всех векторов из T ;

$\langle S_b(A^*, C^*, \pi(T)) \rangle$ — последовательность значений, принимаемых функцией $S_b(A^*, C^*, \tilde{x})$, когда \tilde{x} последовательно принимает значения из $\pi(T)$;

$\log t$ — логарифм t по основанию 2.

Теорема 1. Пусть $S(A, B, \tilde{x}_n)$ — схема из функциональных элементов в конечном базисе, реализующая систему булевых функций от переменных x_1, \dots, x_n ; k — некоторое число, зависящее от базиса; m, k, r, l — параметры такие, что $2m+1 < n, r < n, l = \lceil \log m + \log(\mu+2) + \log(\lceil \log(kmL(B)) \rceil + 1) \rceil + 3$. Тогда существуют множество $T = T_1 \cup T_2 \subseteq \{0, 1\}^{n+l}$ мощности $m(\mu+2)(\lceil \log(kmL(B)) \rceil + 1)(2^{r+2} + 4) + 2^{2m+1}$ и схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ с выделенными в C особой частью \mathfrak{D}_0 и частями $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_s, s < kmL(B)$, такая, что справедливы следующие утверждения:

- (i) $L(C) < km^3 L(B), |\mathfrak{D}_0| < km, |\mathfrak{D}_i| < k, i = 1, \dots, s$;
- (ii) $S_a(A, B, \tilde{x}_n) = S_a(A, C, \tilde{x}_n, 0, \dots, 0)$;
- (iii) если $S_b(A^*, C^*, \tilde{\sigma}) \neq S_b(A, C, \tilde{\sigma})$ для некоторых схем A^*, C^* и $\tilde{\sigma} \in T_2$, то в \mathfrak{D}_0 есть по крайней мере один неисправный элемент;

(iv) если $S_b(A^*, C^*, \tilde{\alpha}_{n+1}) = S_b(A, C, \tilde{\alpha}_{n+1})$ для некоторых A^*, C^* при любом $\tilde{\alpha}_{n+1} \in T_2$ и $S_b(A^*, C^*, \tilde{\sigma}_{n+1}) \neq S_b(A, C, \tilde{\sigma}_{n+1})$ при некотором $\tilde{\sigma}_{n+1} \in T_1$, то для последовательности $\langle S_b(A^*, C^*, \pi(T_1)) \rangle$ можно указать множество $\{\mathfrak{D}_{i_1}, \mathfrak{D}_{i_2}, \dots, \mathfrak{D}_{i_p}\}$ частей схемы C такое, что каждая часть \mathfrak{D}_{i_k} ($k = 1, \dots, p$) схемы S , входящее в это множество, содержит неисправный элемент и при замене неисправных элементов на исправные схема C^* преобразуется в схему C^{**} такую, что

$$S_a(A', C^{**}, \tilde{x}_n, 0, \dots, 0) = S_a(A', B, \tilde{x}_n)$$

(здесь и в (v) A' — любая схема, в которую может превратиться схема A при появлении в ней допустимых неисправностей);

(v) если $S_b(A^*, C^*, \tilde{\alpha}_{n+1}) = S_b(A, C, \tilde{\alpha}_{n+1})$ при фиксированных схемах A^*, C^* и каждом $\tilde{\alpha}_{n+1} \in T_1 \cup T_2$, то

$$S_a(A', C^*, \tilde{x}_n, 0, \dots, 0) = S_a(A', B, \tilde{x}_n).$$

Свойство (i) ограничивает сложность схемы C и размеры окрестностей, характеризующих уровень локализации неисправностей. Свойство (ii) утверждает, что при фиксировании константами некоторых входов схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+1})$ схема C «моделирует» схему B , т. е. $S(A, C, \tilde{x}_{n+1})$ превращается в схему, эквивалентную по функционированию схеме $S(A, B, \tilde{x}_n)$. Свойства (iii), (iv) дают представление о полноте диагностики схемы. Мощность множества T является длиной диагностического теста, локализирующего неисправности в C .

Доказательство теоремы 1 конструктивно: указывается последовательность преобразований, которые превращают схему $S(A, B, \tilde{x}_n)$ в схему $S(A, C, \tilde{x}_{n+1})$, обладающую свойствами, указанными в формулировке теоремы 1. Таким образом, описывается метод преобразования произвольной схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$ в схему $S(A, C, \tilde{x}_{n+1})$, пригодную для C -диагностики.

Преобразования начинаются с того, что в схеме B на линиях между внутренними полюсами добавляются пары специальных подсхем, которые играют роль коммутаторов, работающих в двух режимах. При работе в первом режиме коммутаторы проводят без изменения сигналы от некоторых своих входов к выходам. Этот режим работы коммутаторов используется при функционировании схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+1})$, когда она на своих основных выходах реализует систему функций, которую должна реализовать схема $S(A, B, \tilde{x}_n)$. Работая во втором режиме, коммутаторы позволяют передать значения с входных полюсов схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+1})$ на входы некоторых ее элементов. Этот режим работы коммутаторов используется при диагностике неисправностей схемы. Он позволяет добиться на выходах всех элементов схемы B слабой зависимости значений друг от друга, что обеспечивает должный уровень локализации неисправностей в контролируемой схеме.

Переключение режимов работы коммутаторов осуществляется подачей подходящих значений дополнительных переменных на их входы.

После введения в схему B коммутаторов полученная схема (в § 2 она обозначается через B_2) подвергается следующему преобразованию. К B_2 добавляется подсхема B_3 , которая вместе со схемой B_2 образует схему C . Схема B при тестовых испытаниях перерабатывает информацию, поступающую на ее входы с некоторых внутренних полюсов B_2 , в список номеров элементов схемы, в окрестностях которых есть неисправные элементы.

Преобразование схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$ в схему $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ изложено в § 2. В § 3 определено тестовое множество и описана процедура диагностики схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$.

§ 2. Схема C в $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$

Ниже предполагаем, что $2m + 1 < n$, $r < n$. Схема C состоит из схем B_2 и B_3 . Входы и выходы схемы B образуют подмножества множеств входов и выходов схемы B_2 , а полюсы схемы B_2 из множества \mathcal{A} — подмножество множества входов схемы B_3 . Соединение схем A , B_2 , B_3 показано на рис. 3.

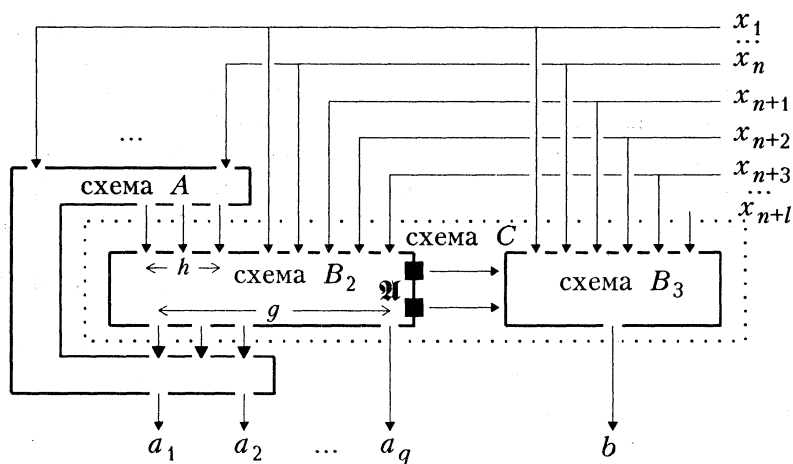


Рис. 3. Соединение схем

Ниже, в пп. 2.1–2.3, описаны схемы B_2 , B_3 и даны оценки их сложности в базисе $(\vee, \wedge, -)$. Выбор конкретного базиса не ограничивает общности рассуждений ввиду того, что при переходе к другому конечному базису в верхних оценках меняются лишь константы, определяемые по базису. Схему B_2 как часть схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ можно получить двумя последовательными преобразованиями схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$.

2.1. Первое преобразование схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$. Схема B преобразуется в схему B_1 следующим образом:

(а) если B совпадает с $S(A, B, \tilde{x}_n)$, то первое преобразование является тождественным, т. е. не меняет схему $S(A, B, \tilde{x}_n)$; в этом случае схема B_1 совпадает со схемой B , поэтому

$$L(B_1) = L(B); \quad (2.1)$$

(б) если B не совпадает с $S(A, B, \tilde{x}_n)$, то рассмотрим схему R , показанную на рис. 4, и опишем ее подсхемы Q и D . Если на первый, второй и третий входы схемы Q подаются значения u, v и w , то на выходе реализуется функция $\bar{u}v \vee uw$. Ясно, что в базисе $(\wedge, \vee, -)$ эту функцию можно реализовать схемой Q такой, что

$$L(Q) \leq 4. \quad (2.2)$$

Схема D осуществляет отображение $(a_1, \dots, a_{2m+1}) \rightarrow b$, где

$$b = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^{2m+1} a_i > m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Это отображение является симметрической булевой функцией от $2m+1$ переменных. Известно [9, теорема 8, с. 369], что в базисе $(\vee, \wedge, -)$ эту функцию можно реализовать схемой D такой, что

$$L(D) < C_0 m, \quad C_0 = \text{const}. \quad (2.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно описанию схемы R (см. рис. 4), если схема D исправна и в R неисправны не более m схем Q , то R самокорректирующаяся. Пусть u_{i_1}, \dots, u_{i_p} — полюсы схемы A , не являющиеся входными полюсами схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$ и при этом в $S(A, B, \tilde{x}_n)$ к полюсам u_{i_1}, \dots, u_{i_p} подключены входные полюсы схемы B .

Выполним следующие преобразования. Вход схемы B , подключенный к полюсу u_{i_1} , отключим и подключим к выходу схемы R , а к полюсу u_{i_1} подключим вход u схемы R . Аналогичные подключения проведем для полюсов u_{i_1}, \dots, u_{i_p} , используя каждый раз новый экземпляр схемы R . В результате между полюсами u_{i_1}, \dots, u_{i_p} и входными полюсами схемы B появятся p одинаковых схем R .

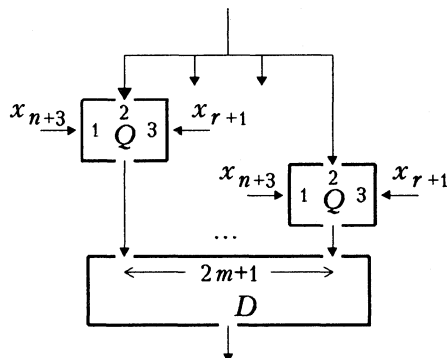


Рис. 4. Схема R

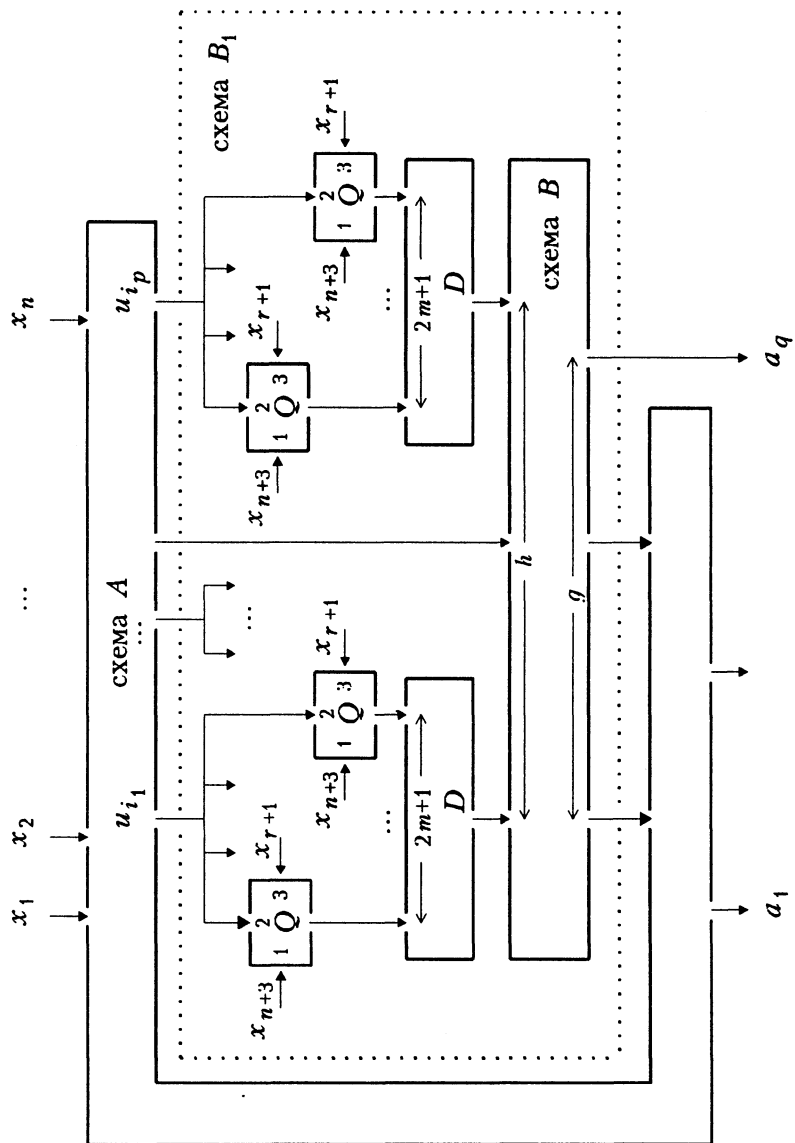


Рис. 5. Схема, полученная из $S(A, B, \tilde{x}_n)$ первым преобразованием

На рис. 5 показана схема, полученная в результате первого преобразования схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$. Пунктирной линией очерчена схема B_1 .

Оценим сложность схемы B_1 . Из рис. 5 видно, что верно неравенство $L(B_1) \leq L(B) + ((2m+1)L(Q) + L(D))h$, из которого в силу (2.2)–(2.4) получаем $L(B_1) \leq L(B) + (4(2m+1) + C_0m)h$. Поскольку $h \leq rL(B)$, имеем

$$L(B_1) < c_1 mL(B), \quad (2.5)$$

где c_1 — величина, зависящая лишь от базиса схемы.

2.2. Второе преобразование схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$ связано с добавлением схем K на линиях, соединяющих некоторые пары элементов в схеме B_1 . При этом схема B_1 преобразуется в схему B_2 . Некоторые подсхемы схемы B_2 получают метки, являющиеся трехразрядными векторами. Эти операции показаны на рис. 6.1, 6.2. Пусть U, V, W, Z — фрагменты схемы B_1 , а φ_i, φ_q — базисные элементы. Тогда U^1, V^1, W^1, Z^1 — схемы, в которые переходят U, V, W, Z . При этом для всех фрагментов схемы B_1 , указанных в левых частях рис. 6.1, 6.2, и в схемах, полученных из B_1 такими преобразованиями, проводятся аналогичные преобразования до тех пор, пока в полученной схеме не исчезнут фрагменты, показанные в левых частях рис. 6.1, 6.2. Преобразование 6.1, в, г проводится только в тех случаях, когда базисный элемент φ_i , изображенный в левой части рис. 6.1, находится вне Q и K .

Схема K имеет три входа и один выход. Пусть на ее входы с номерами 1, 2, 3 подаются значения x, y, z . Тогда на выходе реализуется функция $\bar{x}y \vee xz$.

Обозначим через B_2 схему, полученную из B_1 указанными преобразованиями. Элементы схемы B_2 , находящиеся вне схем K и Q будем называть выделенными. Всем схемам Q, K и выделенным элементам ставятся в соответствие трехразрядные векторы (метки) по следующему правилу (см. рис. 6.1, 6.2).

- Схемы Q получают метки $(Q, *, r+1)$.
- Выделенные элементы φ_i получают метки $(\varphi_i, K, *)$, $i = 1, \dots, g$.
- Схема K получает метку
 - (K, Q, i) , если ее вход подключен к выходу схемы Q , а выход — к i -му выходу выделенного элемента;
 - $(K, \varphi_i, r+1)$, если ее вход подключен к выходу базисного элемента φ_i , $i = 1, \dots, g$;
 - $(K, i, r+1)$, если ее вход подключен к полюсу x_i , $i \neq r+1$;
 - $(K, r+1, j)$, если ее вход подключен к полюсу x_{r+1} , а выход — к j -му входу выделенного элемента;
 - (K, K, j) , если ее вход подключен к полюсу с меткой $(K, i, r+1)$ или к полюсу с меткой $(K, \varphi_i, r+1)$, а выход — к j -му входу выделенного элемента.

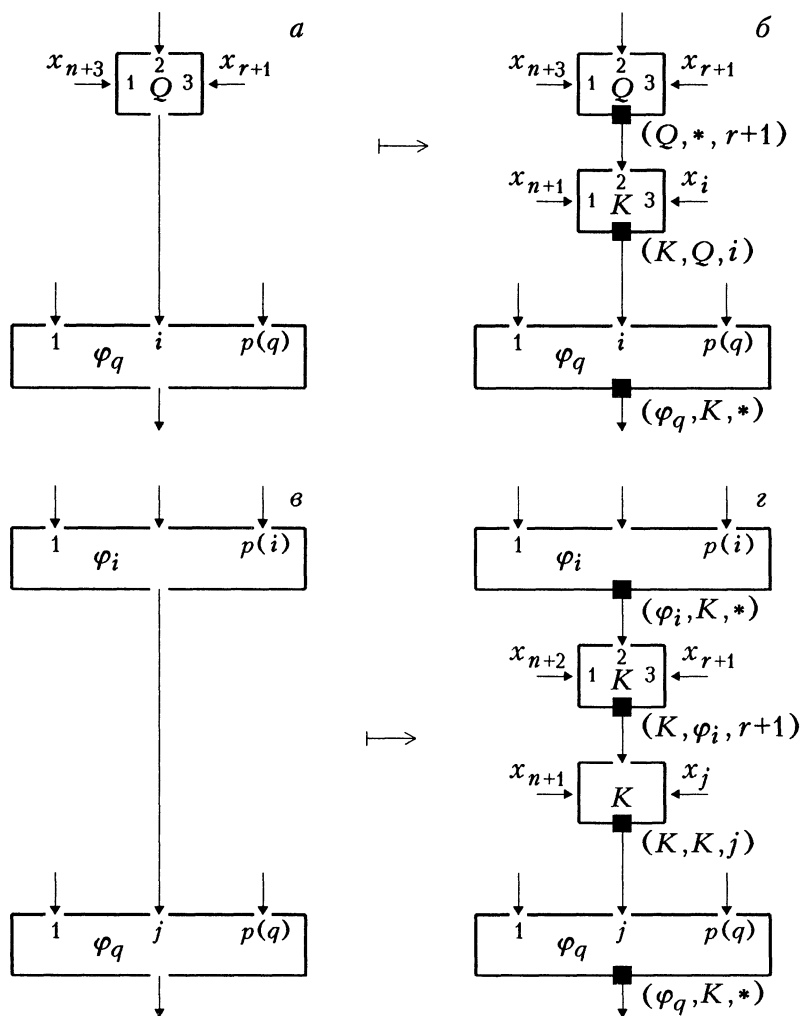


Рис. 6.1. Фрагменты второго преобразования:

a — схема U , *б* — схема U^1 , *в* — схема V , *з* — схема V^1

Будем считать блоками схемы C все ее части, отмеченные метками. Таким образом, блоками в C являются все схемы Q и K , а также отдельные функциональные элементы.

Множество полюсов \mathcal{A} образовано полюсами с векторами-метками. Оценим сложность схемы B_2 . Поскольку B_2 получается из B_1 добавлением не более чем $2rL(B)$ схем K сложности 4, из (2.1), (2.5) вытекают оценки

$$L(B_2) < c_2 L(S), \quad \text{если } B \text{ совпадает с } S(A, B, \tilde{x}_n); \quad (2.6)$$

$$L(B_2) < c_2 m L(B) \quad \text{в остальных случаях.} \quad (2.7)$$

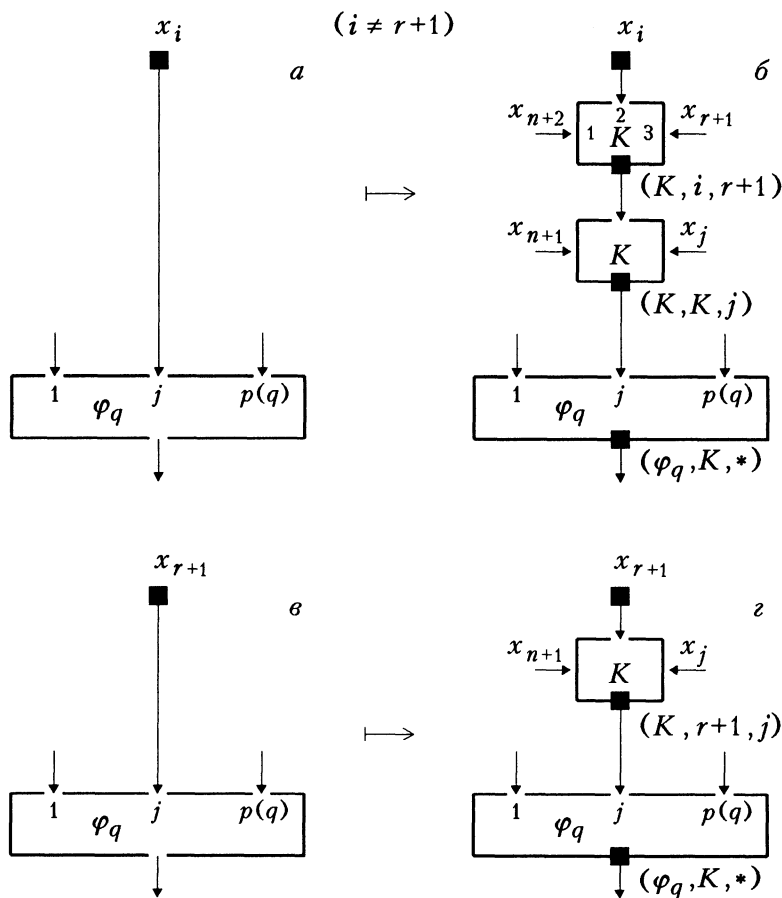
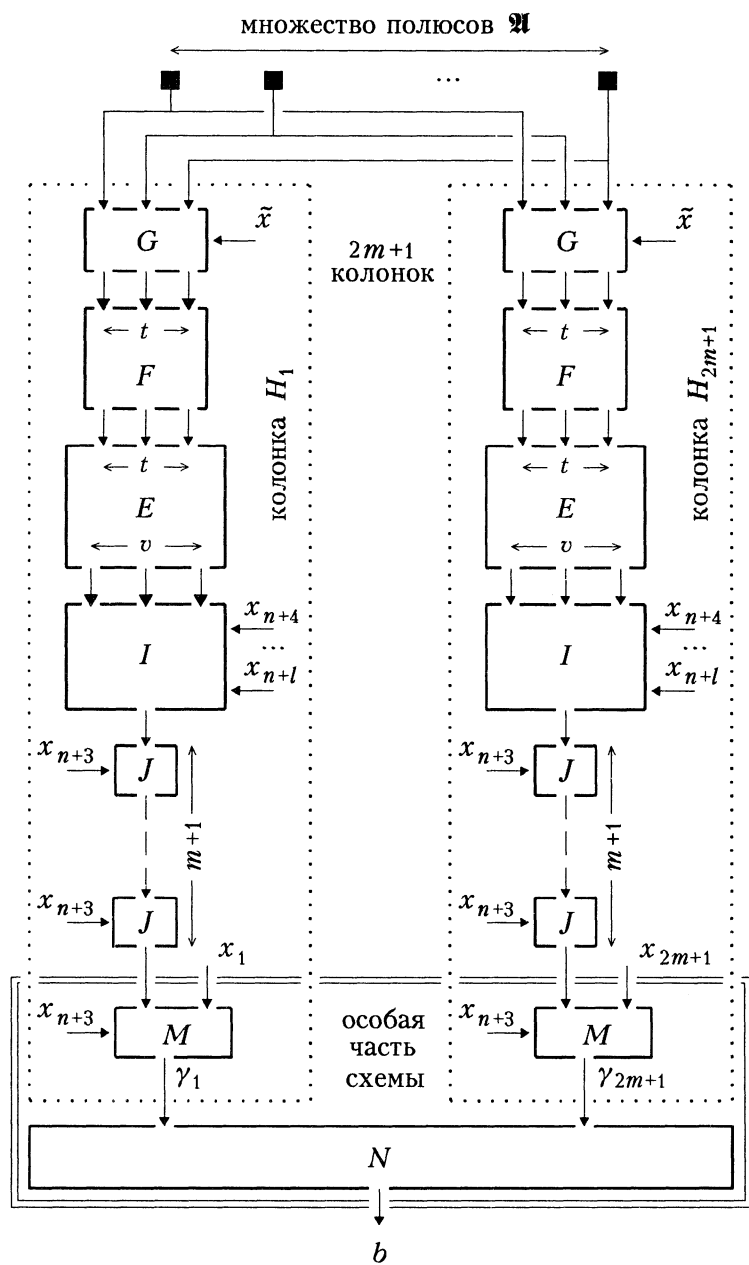


Рис. 6.2. Фрагменты второго преобразования:
a — схема W , *б* — схема W^1 , *в* — схема Z , *з* — схема Z^1

2.3. Структура схемы B_3 . Общий вид схемы B_3 представлен на рис. 7, где $t = |\mathcal{A}|$, $v = m(\mu + 2)(\lceil \log t \rceil + 1)$, $l = \lceil \log v \rceil + 3$. Схема B_3 является соединением схем типов G, F, E, I, J, M, N , описанных ниже. Части схемы B_3 , ограниченные на рис. 7 пунктирными линиями, называем колонками H_j , $j = 1, \dots, 2m + 1$, а часть схемы B_3 , ограниченную двойной рамкой, — особой частью схемы C . Входами схемы B_3 служат внешние полюсы x_1, \dots, x_{n+l} схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ и полюсы схемы B_2 , входящие в \mathcal{A} .

В основе сжатия снимаемой с полюсов из \mathcal{A} информации лежит работа схем G , которые являются индикаторами правильности значений

Рис. 7. Схема B_3

сигналов на некоторых внутренних полюсах схемы B_2 , появляющихся при тестировании.

Схема F на каждом своем выходе выдает сигналы, характеризующие работу некоторого блока β из B_2 (для каждого выхода схемы F это свой блок β) и работу некоторых других выделенных заранее блоков в B_2 , которые могут повлиять на функционирование блока β при проведении тестовых процедур.

На выходах схемы E формируются двоичные векторы-коды номеров блоков, которые либо сами неисправны, либо в их малой окрестности есть неисправные блоки.

Каждая схема I служит для организации поразрядного прочтения сигналов, поступающих на ее первые v входов. Это позволяет наблюдать реакцию схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ на тестовые воздействия, используя единственный выход b схемы B_3 . Части схемы B_3 , состоящие из J , M , используются для организации контроля схемы N ; последняя осуществляет процедуру выбора бинарного сигнала, который чаще других встречается среди компонент вектора, поданного на входы схемы N .

Особая часть схемы C — единственная в B_3 подсхема, которая подвергается контролю при диагностике схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$. Устойчивая работа схемы B_3 при допустимых неисправностях обеспечивается многократным дублированием ее частей.

Опишем схемы G , F , E , I , J , M , N и оценим сложность их реализации. Пусть B_2 состоит из t схем, отмеченных метками. Эти схемы занумеруем числами $1, 2, \dots, t$ так, чтобы всяким двум нумеруемым подсхемам сопоставлялись разные номера. Определим функцию: $\nu(i) = (U, V, W)$, где (U, V, W) — вектор-метка блока с номером i .

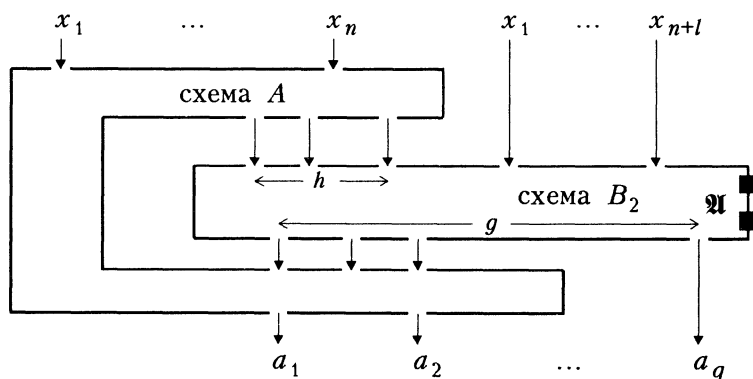


Рис. 8. Схема $S(A, B_2, x_{n+l})$

Схема $S(A, B_2, \tilde{x}_{n+l})$ (рис. 8) получена из схемы $S(A, B, \tilde{x}_{n+l})$ заменой схемы B на описанную выше схему B_2 . Пусть $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n+l})$,

$\beta \in \mathfrak{A}$ и $\beta(A, B_2, \tilde{x})$ — функция, реализуемая в схеме $S(A, B_2, \tilde{x}_{n+l})$ на полюсе β .

Функцию $d(A, B_2, \beta, U, V, W, \tilde{x})$ определим следующим образом:

$$d(A, B_2, \beta, Q, *, r+1, \tilde{x}) = \bigvee_{\gamma=0,1} x_{r+1}^\gamma \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}); \quad (2.8)$$

$$d(A, B_2, \beta, K, Q, j, \tilde{x}) = \{(\bigvee_{\gamma=0,1} x_j^\gamma \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x})) \vee \bar{x}_{n+1}\} \\ \wedge \{(\bigvee_{\gamma=0,1} x_{r+1}^\gamma \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x})) \vee x_{n+1}\}; \quad (2.9)$$

$$d(A, B_2, \beta, \varphi_i, K, *, \tilde{x}) \\ = \{ \bigvee_{\gamma=0,1} \varphi_i^\gamma(x_1, \dots, x_{p(i)}) \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}) \} \vee \bar{x}_{n+1}; \quad (2.10)$$

$$d(A, B_2, \beta, K, \varphi_i, r+1, \tilde{x}) = \{(\bigvee_{\gamma=0,1} x_{r+1}^\gamma \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x})) \vee \bar{x}_{n+2}\} \\ \wedge \{(\bigvee_{\gamma=0,1} \varphi_i^\gamma(x_1, \dots, x_{p(i)}) \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x})) \vee (\bar{x}_{n+1} \vee x_{n+2})\}; \quad (2.11)$$

$$d(A, B_2, \beta, K, K, j, \tilde{x}) = \{(\bigvee_{\gamma=0,1} x_j^\gamma \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x})) \vee \bar{x}_{n+1}\} \\ \wedge \{(\bigvee_{\gamma=0,1} x_{r+1}^\gamma \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x})) \vee (x_{n+1} \vee \bar{x}_{n+2})\}; \quad (2.12)$$

$$d(A, B_2, \beta, K, i, r+1, \tilde{x}) = \{(\bigvee_{\gamma=0,1} x_{r+1}^\gamma \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x})) \vee \bar{x}_{n+2}\} \\ \wedge \{(\bigvee_{\gamma=0,1} x_i^\gamma \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x})) \vee x_{n+2}\}; \quad (2.13)$$

$$d(A, B_2, \beta, K, r+1, j, \tilde{x}) = \{(\bigvee_{\gamma=0,1} x_j^\gamma \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x})) \vee \bar{x}_{n+1}\} \\ \wedge \{(\bigvee_{\gamma=0,1} x_{r+1}^\gamma \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x})) \vee x_{n+1}\}. \quad (2.14)$$

СХЕМА G имеет $t+n+3$ входов, подключенных в схеме C к полюсам из \mathfrak{A} и полюсам x_1, \dots, x_{n+3} . При каждом $i \in \{1, \dots, t\}$ на i -м выходе подсхемы G схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ реализуется функция $d(A, B_2, \beta, U, V, W, \tilde{x})$, определенная подходящим равенством из (2.8)–(2.14) и такая, что $(U, V, W) = \nu(i)$.

СХЕМА F . Введем понятие «окрестность блока» β в B_2 . Пусть β имеет вектор-метку (U, V, W) .

Окрестностью блока β называется

- блок β и блок Q , выход которого подключен ко входу блока β , если $(U, V, W) = (K, Q, j)$, $j = 1, \dots, r$;
- множество блоков в B_2 , состоящее из блока β и всех блоков K , выходы которых подсоединены к входам блока β , если $(U, V, W) = (\varphi_i, K, r + 1)$;
- множество блоков в B_2 , состоящее из блока β и блока φ_i , выход которого подключен к входу блока β , и всех блоков K , выходы которых подключены к входам рассматриваемого блока φ_i , если $(U, V, W) = (K, \varphi_i, r + 1)$;
- блок β и блок K , выход которого подключен к входу блока β , если $(U, V, W) = (K, K, j)$;
- блок β , если блок β имеет метку $(K, i, r + 1)$, $i = 1, \dots, n$, либо $(K, r + 1, j)$, $j = 1, \dots, r$, либо $(Q, *, r + 1)$.

В множестве векторов-меток определим следующие подмножества:

$$\mathfrak{M}_1 = \{(\varphi_i, K, *)\}, \quad i = 1, \dots, p;$$

$$\mathfrak{M}_2 = \{(K, K, j), (K, Q, j), (K, r + 1, j)\}, \quad 1 \leq j \leq r;$$

$$\mathfrak{M}_3 = \{(K, \varphi_i, r + 1), (K, j, r + 1)\}, \quad 1 \leq i \leq p, \quad j = 1, \dots, r, r + 2, \dots, n.$$

Схема F имеет $t + 2$ входов и t выходов. Пусть i — произвольное число из $\{1, \dots, t\}$ и окрестность блока β с номером i состоит из блоков с номерами i, i_1, \dots, i_q . Если на входы схемы F подается вектор (v_1, \dots, v_t) , то на ее i -м выходе ($1 \leq i \leq t$) реализуется функция $F_i(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$, определенная следующим образом:

$$F_i(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l}) = \begin{cases} g_i \bar{x}_{n+2} \vee x_{n+2}, & \text{если } (U, V, W) \in \mathfrak{M}_1; \\ g_i x_{n+2} \vee \bar{x}_{n+2}, & \text{если } (U, V, W) \in \mathfrak{M}_2; \\ g_i (x_{n+1} \bar{x}_{n+2} \vee \bar{x}_{n+1} x_{n+2}) \vee \bar{x}_{n+1} \bar{x}_{n+2} \vee x_{n+1} x_{n+2}, & \text{если } (U, V, W) \in \mathfrak{M}_3; \\ g_i, & \text{если } (U, V, W) = (Q, *, r + 1), \end{cases} \quad (2.15)$$

где $g_i = v_i v_{i_1} \dots v_{i_q}$.

СХЕМА E . Пусть $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_t)$ — произвольный булевый вектор и j_1, j_2, \dots, j_h — натуральные числа такие, что $j_1 < j_2 < \dots < j_h$, $y_{j_1} = y_{j_2} = \dots = y_{j_h} = 0$, $y_k = 1$ при любых $k \notin \{j_1, j_2, \dots, j_h\}$. Тогда будем говорить, что в j_i -м разряде вектора \tilde{y} находится его i -й нуль ($1 \leq i \leq h$). Пусть $v = m(\mu + 2)(\lceil \log t \rceil + 1)$, $q = \lceil \log t \rceil + 1$ и

схема E имеет t входов и v выходов. Если на входы схемы E подается вектор $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_t)$, то при $i \leq h$ на ее выходах с номерами $(i-1)q+1, (i-1)q+2, \dots, iq$ реализуется булевый вектор, являющийся $(\lceil \log t \rceil + 1)$ -разрядной двоичной записью числа j_i . Если $i > h$ или в \tilde{y} все компоненты равны единице, то на выходах схемы E с номерами $(i-1)q+1, (i-1)q+2, \dots, iq$ появляются нули.

СХЕМА I . Пусть $(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \{0, 1\}^s$. Схема I имеет $v+s$ входов, $v = m(\mu+2)(\lceil \log t \rceil + 1)$, $s = \lceil \log v \rceil$, и один выход. Если на ее входы подается вектор $y_1, y_2, \dots, y_v, x_{n+4}, x_{n+5}, \dots, x_{n+s+3}$, то на выходе реализуется функция

$$\bigvee_{0 \leq |\sigma_1, \dots, \sigma_s| \leq v-1} y_{|\sigma_1, \dots, \sigma_s|+1} (x_{n+4}^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{n+s+3}^{\sigma_s}); \quad (2.16)$$

здесь использовано следующее обозначение: $|\sigma_1, \dots, \sigma_s| = \sum_{j=1}^s \sigma_j 2^{s-j}$.

СХЕМА J . Если на входы схемы J подаются значения переменных x_{n+3} и y , то на ее выходе реализуется функция $x_{n+3}y$.

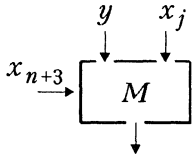


Рис. 9. Схема M

СХЕМА M . Если на входы схемы M подаются значения переменных x_{n+3}, y, x_j (см. рис. 9), то на ее выходе реализуется функция $x_{n+3}y \vee \bar{x}_{n+3}x_j$.

СХЕМА N имеет $2m+1$ входов и один выход. Если на ее входы подается набор (y_1, \dots, y_{2m+1}) , то на выходе реализуется функция

$$N(y_1, \dots, y_{2m+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^{2m+1} y_i > 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.17)$$

В схеме B_3 выделим полюс b (выход схемы N), который является выходом всей схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$. Пусть $\gamma_j(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ — функция, реализующаяся на полюсе γ_j ($j = 1, \dots, 2m+1$) схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$, который является выходом схемы M из колонки H_j .

2.4. Сложность схемы B_3 . Оценим сверху сложность $L(B_3)$ схемы B_3 . Для этого оценим сначала сложность реализации схем, составляющих схему B_3 .

СЛОЖНОСТЬ СХЕМЫ G . Если при реализации функции $d(A, B_2, \beta, U, V, W, \tilde{x})$ мы строим схему, моделируя соответствующую формулу из (2.8)–(2.14), то нам понадобится не более 17 базисных элементов.

Для реализации всех t функций, реализуемых одной схемой G , требуется не более $17t$ базисных элементов, т. е.

$$L(G) \leq 17t. \quad (2.18)$$

СЛОЖНОСТЬ СХЕМЫ F . Все функции $F_i(A^*, C^*, \tilde{x})$, $i = 1, \dots, t$, можно реализовать, моделируя формулы (2.15). Так как одна функция реализуется схемой, содержащей не более $10(r+1)$ базисных элементов (мы учитываем, что окрестность любого блока в B_2 содержит не более $r+2$ элементов), для реализации одной схемы типа схемы F требуется не более $10(r+1)t$ базисных элементов, т. е.

$$L(F) \leq 10(r+1)t. \quad (2.19)$$

СЛОЖНОСТЬ СХЕМЫ E . При построении схемы E используется схема U_i с 2^i входами и $i+1$ выходами. Приведем ее описание. Пусть на входы схемы U_i подается вектор $\tilde{v} = (v_1, \dots, v_{2^i})$. Тогда если среди компонент вектора \tilde{v} нет нулевых, то на выходе схемы U_i реализуется $(i+1)$ -разрядный вектор из нулевых компонент; если j — номер разряда, в котором содержится первый нуль вектора \tilde{v} , то на выходе схемы U_i реализуется вектор, являющийся двоичной $(i+1)$ -разрядной формой числа j .

Лемма 1. В базисе $(\wedge, \vee, -)$ можно построить схему U_i со сложностью $L(U_i)$ так, что

$$L(U_i) \leq 8,5 \cdot 2^i - 5i - 9. \quad (2.20)$$

Доказательство проведем индукцией по i . При $i = 1$ неравенство (2.20) имеет вид $L(U_1) \leq 3$. Схема U_1 имеет два входа и два выхода. Если на входы схемы U_1 подать значения переменных y_1, y_2 , то на ее выходах реализуются две функции $y_1 \bar{y}_2$ и \bar{y}_1 , при этом достаточно трех базисных элементов. Следовательно, при $i = 1$ утверждение леммы 1 справедливо.

Предположим, что неравенство (2.20) выполнено при $i = k$. Докажем его справедливость при $i = k+1$. Схема U_{k+1} (см. рис. 10) состоит из двух схем U_k , одной схемы $\&$ и $k+1$ схем W . Опишем схемы $\&$ и W .

Схема $\&$ имеет $k+1$ входов и реализует конъюнкцию $k+1$ значений, подаваемых на эти входы.

Схема W имеет три входа и один выход. Если на входы схемы W подается вектор (w_1, w_2, w_3) , то на ее выходе реализуется функция $\bar{w}_1 w_2 \vee w_1 w_3$.

Входы схем W подключены к выходам схем U_k следующим образом. Первые входы всех схем W подключены к выходу схемы $\&$. Второй вход i -й слева схемы W подключен к i -му выходу левой схемы U_k ,

$i = 1, \dots, k+1$. Третий вход i -й слева схемы W подключен к i -му выходу правой схемы U_k , $i = 1, \dots, k+1$.

Нетрудно убедиться, что на выходе схемы U_{k+1} реализуется вектор, представляющий собой двоичную форму номера разряда, в котором находится первый нуль 2^{k+1} -разрядного вектора $\tilde{v} = (v_1, \dots, v_{2k}, v_{2k+1}, \dots, v_{2k+1})$. Если \tilde{v} — вектор, состоящий из единиц, то на выходе схемы U_{k+1} реализуется нулевой вектор.

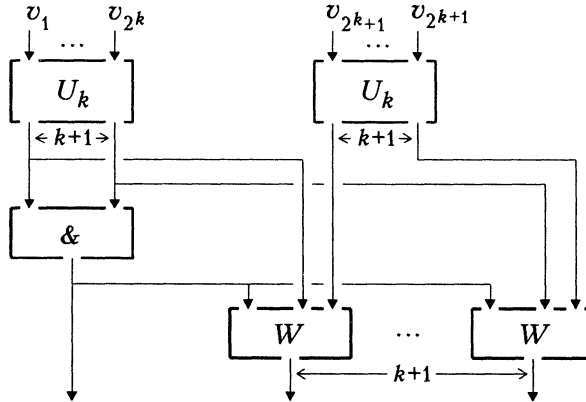


Рис. 10. Схема U_{k+1}

Из описания схемы U_{k+1} непосредственно следует, что $L(U_{k+1}) \leq 2L(U_k) + 5k + 4$. Поэтому в силу неравенства (2.20), выполненного по предположению индукции при $i = k$, получаем

$$L(U_{k+1}) \leq 2(8,5 \cdot 2^k - 5k - 9) + 5k + 4 = 8,5 \cdot 2^{k+1} - 5(k+1) - 9.$$

Лемма 1 доказана.

Рассмотрим способ синтеза схемы E , которая состоит из $m(\mu + 2)$ ярусов. Опишем схему $E^{(q)}$ — q -й ярус схемы E ($1 \leq q \leq m(\mu + 2)$) (см. рис. 11).

Схема $E^{(q)}$ имеет t входов и $t + \lceil \log t \rceil + 1$ выходов. Если $q > 1$, то схема $E^{(q)}$ подключена в E так, что на ее входы подается вектор $(y_1(q-1), \dots, y_t(q-1))$, реализующийся на выходах схемы $E^{(q-1)}$. Входы схемы $E^{(1)}$ являются входами всей схемы E . Схема $E^{(q)}$ состоит из схем $U_{\lceil \log t \rceil}$, V_p , Z и базисных элементов $\vee, -$. Схема U_i описана выше. Приведем описание схем V_p и Z .

Схема V_p имеет $p = \lceil \log t \rceil + 1$ входов и t выходов. Если на ее входы подается вектор (z_1, z_2, \dots, z_p) , то на i -м выходе схемы V_p , $1 \leq$

$i \leq t$, реализуется функция $z_1^{\sigma_1} z_2^{\sigma_2} \dots z_p^{\sigma_p}$, где $\sum_{j=1}^p \sigma_j 2^{p-j} = i$. Нетрудно

видеть, что на выходе схемы V_p реализуется вектор (v_1, v_2, \dots, v_t) , в котором не более чем одна компонента отлична от нуля. При этом номер ненулевой компоненты, представленный в двоичной форме, есть вектор (z_1, z_2, \dots, z_p) .

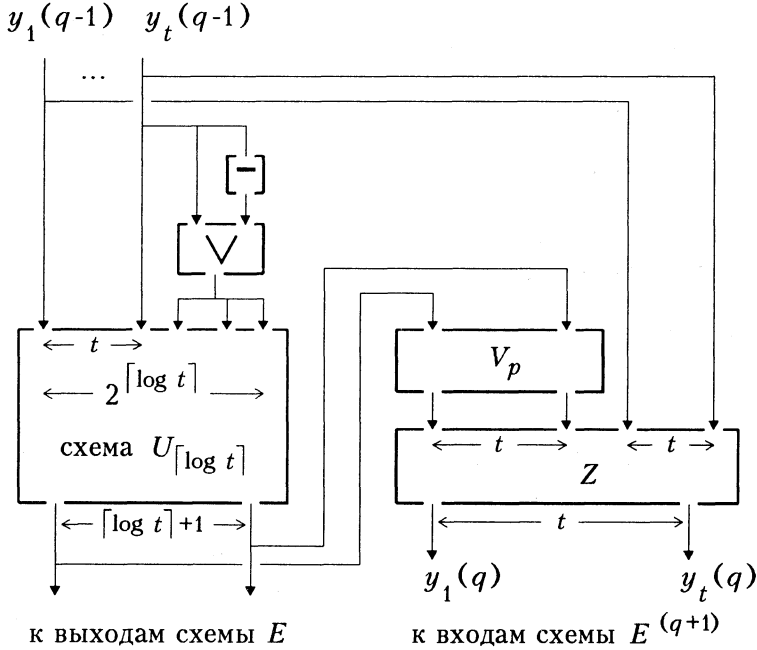


Рис. 11. Схема $E^{(q)}$ (q -й ярус схемы E)

Схема Z имеет $2t$ входов и t выходов. Если на входы схемы Z подается вектор $(v_1, v_2, \dots, v_{2t})$, то на ее i -м выходе реализуется функция $v_i \bar{v}_{t+i} \vee \bar{v}_i v_{t+i}$, $1 \leq i \leq t$. Иными словами, схема Z производит поразрядное сложение по mod 2 двух t -разрядных булевых векторов.

Нетрудно убедиться, что на первых $\lceil \log t \rceil + 1$ выходах схемы $E^{(q)}$ реализуется набор длины $\lceil \log t \rceil + 1$, являющийся двоичной формой номера первого нуля в векторе $(y_1(q-1), \dots, y_t(q-1))$. На последних t выходах схемы $E^{(q)}$ реализуется вектор $(y_1(q), \dots, y_t(q))$, отличающийся от вектора $(y_1(q-1), \dots, y_t(q-1))$ тем, что если j_1 — номер разряда, в котором находится первый нуль вектора $(y_1(q-1), \dots, y_t(q-1))$, то в j_1 -м разряде вектора $(y_1(q), \dots, y_t(q))$ находится единица.

Положим $(y_1(0), \dots, y_t(0)) = (y_1, \dots, y_t)$. Тогда на первых $\lceil \log t \rceil + 1$ выходах схемы $E^{(q)}$ реализуется вектор длины $\lceil \log t \rceil + 1$, являющийся

двоичной записью номера q -го нуля вектора (y_1, \dots, y_t) .

Первые $\lfloor \log t \rfloor + 1$ выходов схемы $E^{(1)}$ являются первыми выходами схемы E . Следующие $\lfloor \log t \rfloor + 1$ выходов схемы E — это первые $\lfloor \log t \rfloor + 1$ выходов схемы $E^{(2)}$ и т. д. Таким образом, построенная схема E имеет $m(\mu + 2)(\lfloor \log t \rfloor + 1)$ выходов. Булевый вектор длины $m(\mu + 2)(\lfloor \log t \rfloor + 1)$, появляющийся на выходе схемы E , разобьем на $m(\mu + 2)$ подслов длины $\lfloor \log t \rfloor + 1$, записанных друг за другом. Эти слова задают двоичные формы номеров всех нулевых компонент вектора (y_1, \dots, y_t) , подаваемого на входы схемы E , если число нулей в (y_1, \dots, y_t) не больше $m(\mu + 2)$.

Известно [9, с. 353], что систему всех конъюнкций p переменных можно реализовать схемой в базисе $(\wedge, \vee, -)$ так, что $L(V_p) \leq 2 \cdot 2^p + p + 4$. В описываемой конструкции мы берем схему V_p при $p = \lfloor \log t \rfloor + 1$ и используем ее первые t выходов для подключения к входам схемы Z (предположим, что выходы схемы V_p упорядочены так, что на i -м выходе реализуется конъюнкция $z_1^{\sigma_1} z_2^{\sigma_2} \dots z_p^{\sigma_p}$, причем, $1 + \sum_{j=1}^p \sigma_j 2^{p-j} = i$).

Тогда получим

$$L(V_p) \leq L(V_s) \leq 2 \cdot 2^p + p + 4 = 2^{\lfloor \log t \rfloor + 2} + \lfloor \log t \rfloor - 3 < 9t.$$

Очевидно, что для реализации схемы Z достаточно иметь $5t$ элементов базиса $(\wedge, \vee, -)$. Используя верхние оценки сложности схем V_p , Z , а также неравенство (2.19), получим, что для реализации схемы $E^{(q)}$ требуется не более $9t + 8, 5 \cdot 2t = 26t$ базисных элементов. Эта оценка не зависит от q (номера яруса в E). Поскольку в схеме E имеется $m(\mu + 2)$ ярусов, заключаем, что

$$L(E) \leq 26m(\mu + 2)t. \quad (2.21)$$

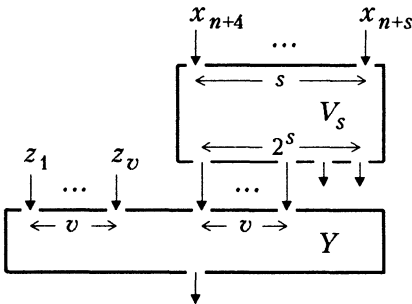


Рис. 12. Схема I

СЛОЖНОСТЬ СХЕМЫ I. Рассмотрим схему, изображенную на рис. 12. Схема V_s имеет s входов и 2^s выходов. Если на входы схемы V_s подается набор x_1, \dots, x_s , то на ее выходах реализуется система всех конъюнкций длины s от этих переменных. На выходе схемы Y реализуется функция

$$\bigvee_{0 \leq |\sigma_1, \dots, \sigma_s| \leq v-1} z_{|\sigma_1, \dots, \sigma_s|+1} (x_{n+4}^{\sigma_1} \dots x_{n+s+3}^{\sigma_s}),$$

если на входы подаются значения z_1, \dots, z_v и значения функций $x_{n+4}^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{n+3+s}^{\sigma_s}$, где $(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \{0, 1\}^s$. Поскольку для реализации схемы Y достаточно использовать $2v$ базисных элементов, а для реализации схемы V_s — $2^{s+2} + s + 4$ базисных элементов, имеем $L(I) \leq 2(2^{s+2} + s + 4) + 2v$. Поэтому ввиду равенств $v = m \lceil \log t \rceil + 1$, $s = \lceil \log v \rceil + 2$ получаем

$$L(I) \leq 20(m(\mu + 2) \lceil \log t \rceil + 1) + 10. \quad (2.22)$$

СЛОЖНОСТЬ СХЕМЫ J . Для реализации этой схемы нужен всего один базисный элемент, т. е.

$$L(J) = 1. \quad (2.23)$$

СЛОЖНОСТЬ СХЕМЫ M . Для реализации этой схемы достаточно четырех элементов базиса, т. е.

$$L(M) = 4. \quad (2.24)$$

СЛОЖНОСТЬ СХЕМЫ N . Соотношение (2.17) определяет симметрическую функцию от $2m + 1$ переменных. Известно [9, теорема 8, с. 369], что такую функцию можно реализовать схемой сложности ct , где c — некоторая константа, т. е.

$$L(N) = ct. \quad (2.25)$$

СЛОЖНОСТЬ СХЕМЫ B_3 . Схема B_3 состоит из $2m + 1$ колонок и схемы N (рис. 7). Одна колонка H_j схемы B_3 состоит из схем G, F, E, I, M , каждая из которых представлена в B_3 в одном экземпляре, и из $m + 1$ схем J . Следовательно, $L(B_3) \leq (2m + 1)(L(G) + L(F) + L(E) + L(I) + (m + 1)L(J) + L(M)) + L(N)$. В силу (2.18)–(2.25) заключаем

$$L(B_3) \leq c_4 \mu m^2 t. \quad (2.26)$$

2.5. Сложность схемы C . Схема C состоит из схем B_2 и B_3 . В силу (2.6), (2.7), (2.26) имеем оценку

$$L(C) \leq c_2 mL(B) + c_4 \mu m^2 t. \quad (2.27)$$

Из неравенства $t \leq L(B_2)$ и формул (2.6), (2.7) следует неравенство $t \leq c_2 mL(B)$, из которого в силу (2.27) получаем

$$L(C) \leq c_5 \mu m^3 L(B), \quad (2.28)$$

где c_5 — некоторая величина, зависящая лишь от базиса.

2.6. Отображения, реализуемые схемами $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ и $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+l})$. Из описания схемы B_2 видно, что

$$S_a(A, B_2, \tilde{x}_n, 0, \dots, 0) = S_a(A, B, \tilde{x}_n), \quad (2.29)$$

$$S_a(A^*, B_2, \tilde{x}_n, 0, \dots, 0) = S_a(A^*, B, \tilde{x}_n) \quad (2.30)$$

при любых $\tilde{x}_n \in \{0, 1\}^n$. Далее, из описания схемы B_3 видно, что

$$S_a(A, B_2, \tilde{x}_{n+l}) = S_a(A, C, \tilde{x}_{n+l}), \quad (2.31)$$

$$S_a(A^*, B_2, \tilde{x}_{n+l}) = S_a(A^*, C, \tilde{x}_{n+l}). \quad (2.32)$$

Из (2.29)–(2.32) следует, что при любых $\tilde{x}_n \in \{0, 1\}^n$

$$S_a(A, B, \tilde{x}_n) = S_a(A, C, \tilde{x}_n, 0, \dots, 0), \quad (2.33)$$

$$S_a(A^*, B, \tilde{x}_n) = S_a(A^*, C, \tilde{x}_n, 0, \dots, 0). \quad (2.34)$$

§ 3. Контроль схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$

Пусть β — произвольная подсхема схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$. Обозначим через β' схему, в которую превращается схема β при появлении в $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ допустимых неисправностей, т. е. при преобразовании схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ в схему $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$. Ниже используются одинаковые обозначения для схем β и β' ; например, обе схемы могут быть обозначены через β . Это не приведет к неоднозначности в рассуждениях, поскольку будет указано для какой из схем, $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ или $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$, схема β является подсхемой. Ввиду этого соглашения можно полагать, что в схеме $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ определены подсхемы B_2, B_3, K, Q, G, F и т. д. Условимся считать, что если схема β из $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ является блоком, то β из $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ тоже является блоком. Если блок δ входит в окрестность блока β из $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$, то в этом и только в этом случае соответствующий блок δ из $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ входит в окрестность блока β из $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$.

Допустим, что \mathcal{J} — некоторое множество из $\{0, 1\}^{n+l}$. Схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ называется \mathcal{J} -правильной относительно блока β , если в схемах $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ и $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ на выходе любого блока δ из окрестности блока β реализуются вектор-функции, которые не различаются на множестве \mathcal{J} .

Пусть β — блок из C^* с p входами. Обозначим через S_β совокупность наборов из $\{0, 1\}^p$, появляющихся на выходах блока β , когда на вход схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ подаются все наборы из $\{0, 1\}^{n+l}$. Множество $\mathcal{J} \in \{0, 1\}^{n+l}$ назовем *полным относительно блока β* , если при подаче на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ всех наборов из \mathcal{J} на входах блока β появляются все наборы из S_β .

Обозначим через $B'(C^*)$ совокупность блоков в C^* , не являющихся блоками типа Q .

Множество \mathcal{P} имеет следующее полезное для тестирования свойство: если схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является \mathcal{P} -правильной относительно каждого блока $\beta \in C^*$, то \mathcal{P} полно относительно любого блока $\beta \in B'(C^*)$.

Представим \mathcal{P} в виде $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$, где множества $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ описаны в таблице.

Таблица

	\mathcal{P}_1	\mathcal{P}_2	\mathcal{P}_3
x_1	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$
x_2	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	x_1
\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	x_1
x_{r+1}	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$
x_{r+2}	x_1	x_1	x_1
\dots	\dots	\dots	\dots
x_n	x_1	x_1	x_1
x_{n+1}	1	0	1
x_{n+2}	0	1	1
x_{n+3}	1	1	1
x_{n+4}	0	0	0
\dots	\dots	\dots	\dots
x_{n+l}	0	0	0

Таблица определяет множество \mathcal{P} , элементами которого являются векторы \tilde{x} из $\{0, 1\}^{n+l}$. Первый столбец задает множество \mathcal{P}_1 векторов из $\{0, 1\}^{n+l}$ таких, что

- компоненты с номерами $r+2, \dots, n$ равны значению x_1 ;
- компоненты x_{n+1} и x_{n+3} равны единице;
- компоненты x_{n+2} и $x_{n+4}, x_{n+5}, \dots, x_{n+l}$ равны нулю;
- остальные компоненты принимают произвольные значения.

Аналогично определяются множества \mathcal{P}_2 и \mathcal{P}_3 . Множества \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 содержат по 2^{r+1} векторов, а множество \mathcal{P}_3 — четыре вектора. Таблица определяет множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$, состоящее из $4 + 2^{r+2}$ векторов.

Пусть $\mathcal{P}(U, V, W)$ равно

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{P}_1, & \text{если } (U, V, W) \in \{(\varphi_i, K, *)\}, \\ & i = 1, \dots, p; \\ \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3, & \text{если } (U, V, W) \in \{(K, K, j), (K, Q, j), (K, r+1, j)\}, \\ & j = 1, \dots, r; \\ \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, & \text{если } (U, V, W) \in \{(K, \varphi_i, r+1), (K, j, r+1)\}, \\ & i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, r, r+2, \dots, n; \\ \mathcal{P}, & \text{если } (U, V, W) = (Q, *, r+1). \end{array} \right.$$

Пусть (U, V, W) — метка блока $\beta \in B'(C^*)$. Схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ называется \mathcal{P} -совершенной относительно блока β , если $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является $\mathcal{P}(U, V, W)$ -правильной относительно β .

Лемма 2. Пусть $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является \mathcal{P} -совершенной схемой относительно блока β из $B'(C^*)$ и β имеет метку (U, V, W) . Тогда $\mathcal{P}(U, V, W)$ полно относительно β .

Доказательство. Пусть β — произвольный блок из $B'(C^*)$ с меткой (U, V, W) и $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ — $\mathcal{P}(U, V, W)$ -правильная схема относительно β . Рассмотрим все возможные случаи выбора метки блока $\beta \in B'(C^*)$.

Случай 1: $(U, V, W) = (K, Q, i)$. Тогда $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ и β является блоком типа K , которому в схеме непосредственно предшествует блок типа Q . Пусть \tilde{x}_{n+l} из $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ подается на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$. Если $\tilde{x}_{n+l} \in \mathcal{P}$, то $x_{n+3} = 1$, и в силу $(\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3)$ -правильности схемы относительно β на входы блока β с номерами 1, 2, 3 подаются значения переменных x_{n+1} , x_{r+1} , x_i ($i \leq r$) соответственно. Из таблицы видно, что если \tilde{x}_{n+l} принимает всевозможные значения из множества $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$, то вектор (x_{n+1}, x_{r+1}, x_i) принимает все восемь значений. Следовательно, $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ полно относительно β .

Случай 2: $(U, V, W) = (\varphi_i, K, *)$. Тогда $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_1$ и β есть базисный элемент φ_i , имеющий $p = p(i)$ входов. Если $\tilde{x}_{n+l} \in \mathcal{P}_1$ подается на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$, то в силу равенства $x_{n+1} = 1$ и \mathcal{P}_1 -правильности схемы относительно β на входы блока β с номерами 1, 2, ..., p подаются значения x_1, \dots, x_p ($p \leq r$) соответственно. Из таблицы видно, что когда \tilde{x}_{n+l} принимает всевозможные значения из \mathcal{P}_1 , набор x_1, \dots, x_p принимает все 2^p значений. Это означает, что множество \mathcal{P}_1 полно относительно β .

Случай 3: $(U, V, W) = (K, \varphi_i, r+1)$. Тогда $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ и β есть блок типа K ; в рассматриваемой схеме ему непосредственно

предшествует блок φ_i . Пусть $\tilde{x}_{n+l} \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ подается на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$. При $\tilde{x}_{n+l} \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ его компонента x_{n+1} равна единице. В силу $(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$ -правильности схемы относительно β на входы блока β с номерами 1, 2, 3 подаются значения x_{n+2} , $\varphi_i(x_1, \dots, x_{p(i)})$, x_{r+1} соответственно. Из таблицы видно, что когда \tilde{x} принимает всевозможные значения из $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, набор $(x_{n+2}, \varphi_i(x_1, \dots, x_{p(i)}), x_{r+1})$ принимает все значения из S_β . Это означает, что $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ полно относительно β .

Случай 4: $(U, V, W) = (K, i, r+1)$, $i \neq r+1$. Тогда $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ и β является блоком типа K , на входы которого подаются значения переменных x_{n+2} , x_i , x_{r+1} . Если \tilde{x}_{n+l} принимает все значения из множества $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, то тройка его компонент x_{n+2} , x_i , x_{r+1} принимает все восемь значений, что свидетельствует о полноте множества $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ относительно β .

Случай 5: $(U, V, W) = (K, r+1, j)$, $j \leq r$. Тогда $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ и β является блоком типа K , на входы которого подаются значения переменных x_{n+1} , x_{r+1} , x_j . Когда \tilde{x}_{n+l} принимает всевозможные значения из множества $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$, тройка переменных x_{n+1} , x_{r+1} , x_j принимает все восемь значений. Следовательно, $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ полно относительно β .

Случай 6: $(U, V, W) = (K, K, j)$. Тогда $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ и β является блоком типа K , а ему в схеме B_2 предшествует блок типа K с метками $(K, i, r+1)$ либо $(K, \varphi_i, r+1)$, где $i \in \{1, \dots, n\}$, $t \in \{1, \dots, p\}$. При $x_{n+2} = 1$ в силу $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ -правильности схемы относительно β на входы блока β подаются значения переменных x_{n+1} , x_{r+1} , x_j . Если \tilde{x}_{n+l} принимает все значения из $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$, то $x_{n+2} = 1$, а тройка переменных x_{n+1} , x_{r+1} , x_j принимает все восемь значений. Это означает, что $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ полно относительно β .

Таким образом, во всех случаях множество $\mathcal{P}(U, V, W)$ полно относительно блока β . Лемма 2 доказана.

Если при подаче на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ некоторого набора $\tilde{x} \in \{0, 1\}^{n+l}$ на выходе блока появляется значение, отличное от появляющегося значения на выходе соответствующего блока в схеме $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$, то этого еще не достаточно, чтобы считать блок β неисправным. На выходе блока β неверное значение может появиться как результат ошибочной работы других блоков схемы.

Лемма 3 утверждает, что по наблюдаемой на выходе блока β реакции схемы на наборы из \mathcal{P} , подаваемые на входы схемы, можно сделать заключение есть ли в окрестности блока β неисправные блоки.

Лемма 3. Если $\beta \in B^l(C^*)$ и $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ не является \mathcal{P} -совершенной схемой относительно β , то в окрестности β найдется неисправный блок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ не является \mathcal{P} -совершенной схемой относительно β , $\beta \in B'(C^*)$, и (U, V, W) — метка блока β . Тогда найдутся вектор $\tilde{z} \in \mathcal{P}(U, V, W)$ и блок δ из окрестности блока β такие, что

$$\delta(A^*, C^*, \tilde{z}) \neq \delta(A, C, \tilde{z}). \quad (3.1)$$

Рассмотрим все возможные варианты выбора метки (U, V, W) , когда δ и β различны (вариант А) и когда δ и β совпадают (вариант В).

ВАРИАНТ А: δ — отличный от β блок из окрестности β .

ВАРИАНТ А.1: $(U, V, W) = (K, Q, j)$. Тогда δ есть блок типа Q , $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$. Если на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ подается любой вектор \tilde{z} из $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$, то $z_{n+3} = 1$. Если блок δ исправный, то независимо от значения, подаваемого на второй вход блока δ , на выходе должно появиться значение z_{r+1} . Если блок δ удовлетворяет (3.1), то, очевидно, он неисправен.

ВАРИАНТ А.2: $(U, V, W) = (\varphi_i, K, *)$. Тогда $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_1$ и δ — блок типа K , выход которого соединен в схеме с некоторым j -м входом блока φ_i . Если на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ подается вектор $\tilde{z} \in \mathcal{P}_1$, то на первый вход блока δ подается значение $z_{n+1} = 1$. Если блок δ исправный, то независимо от значения, подаваемого на его второй вход, на выходе должно появиться значение z_j . Поскольку имеет место соотношение (3.1), блок δ неисправный.

ВАРИАНТ А.3: $(U, V, W) = (K, \varphi_i, r+1)$. Тогда $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_1$. В окрестности блока β находятся блок φ_i и $p(i)$ блоков типа K , где $p(i)$ — число входов блока φ_i (см. рис. 6.1). Блок δ может быть одним из этих $p(i)$ блоков либо блоком φ_i . Рассмотрим эти варианты.

ВАРИАНТ А.3.1: пусть δ — блок типа K и его выход подключен к j -му входу блока φ_i . Если на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ подается вектор $\tilde{z} \in \mathcal{P}_1$, то $z_{n+1} = 1$ и это значение подается на первый вход блока δ . Если блок δ исправный, то на его выходе должно реализоваться значение z_j , не зависящее от значения, подаваемого на его второй вход. Если выполняется (3.1), то блок δ неисправен.

ВАРИАНТ А.3.2: $K_1, \dots, K_{p(i)}$ — блоки из окрестности блока β , выходы которых подключены ко входам блока φ_i , являющегося тоже блоком из окрестности блока β . Предположим, что при подаче вектора $\tilde{z} \in \mathcal{P}_1$ на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ на выходах упомянутых блоков типа K появились правильные значения (вариант, когда неверные значения появляются на выходах этих блоков уже рассмотрен). Тогда можно утверждать, что неисправен блок φ_i . Действительно, с одной стороны, для него имеет место соотношение (3.1). С другой стороны, когда на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ подается вектор \tilde{z} , на выходе блока δ должно реализоваться значение $\varphi(z_1, \dots, z_{p(i)})$, которое не зависит от значений, появляющихся на выходах блоков, отличных от блоков окрестности β . Следовательно, δ — неисправный блок.

ВАРИАНТ А.4: $(U, V, W) = (K, K, j)$. Тогда $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ и δ есть блок типа K . Если на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ подается $\tilde{z} \in \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$, то значение $z_{n+2} = 1$ подается на первый вход блока K . Тогда на выходе этого блока должно появиться значение z_{r+1} независимо от того, какие значения появляются при этом на втором входе блока δ . Ввиду (3.1) следует, что δ — неисправный блок.

ВАРИАНТ А.5: если $(U, V, W) = \{(K, i, r+1), (K, r+1, j)\}$, где $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, r$, то в окрестности блока β нет блоков, отличных от него самого.

Мы рассмотрели все варианты, когда в окрестности блока β есть отличный от β блок δ , для которого выполняется соотношение (3.1).

ВАРИАНТ В: схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ не является $\mathcal{P}(U, V, W)$ -правильной относительно β и в то же время является $\mathcal{P}(U, V, W)$ -правильной относительно всех остальных блоков из окрестности β . Соотношение (3.1) можно переписать так:

$$\beta(A^*, C^*, \tilde{z}) \neq \beta(A, C, \tilde{z}). \quad (3.2)$$

Рассмотрим варианты, связанные со значениями (U, V, W) .

ВАРИАНТ В.1: $(U, V, W) = (K, Q, j)$, $j = 1, \dots, r$. В этом случае $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$. Схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ -правильной относительно каждого отличного от β блока δ из окрестности β . Поэтому, если на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ подается вектор $\tilde{z} \in (\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3)$, то на входах блока β появляется тройка значений переменных z_{n+1}, z_{r+1}, z_j , не зависящих от того, есть ли в C^* вне окрестности β неисправные блоки. Отсюда и в силу (3.2) следует, что β — неисправный блок.

ВАРИАНТ В.2: $(U, V, W) = (\varphi_i, K, *)$, $i = 1, \dots, p$. В этом случае $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_1$. Схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является \mathcal{P}_1 -правильной относительно каждого отличного от β блока δ из окрестности блока β . Поэтому если на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ подается вектор $\tilde{z} \in \mathcal{P}_1$, то на входах блока β появляется набор значений переменных $z_1, \dots, z_{p(i)}$, не зависящих от того, есть ли в C^* вне окрестности β неисправные блоки. Следовательно, в силу (3.2), β — неисправный блок.

ВАРИАНТ В.3: $(U, V, W) = (K, \varphi_i, r+1)$, $i = 1, \dots, p$. В этом случае $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является $(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$ -правильной относительно каждого отличного от β блока δ из окрестности β . Поэтому если на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ подается вектор $\tilde{z} \in \mathcal{P}_1$, то на входах блока β появляется набор значений переменных $z_{n+2}, \varphi_i(z_1, \dots, z_{p(i)}), z_{r+1}$, не зависящих от того, есть ли в C^* вне окрестности β неисправные блоки. Следовательно, ввиду (3.2) β — неисправный блок.

ВАРИАНТ В.4: $(U, V, W) = (K, i, r+1)$, $i = 1, \dots, r, r+2, \dots, n$. Тогда $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является $(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$ -правильной относительно каждого отличного от β блока δ из окрестности β . Поэтому если на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ подается вектор $\tilde{z} \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, то на входах блока β появляется набор значений переменных z_{n+1}, z_i, z_{r+1} , не зависящих от того, есть ли в C^* вне окрестности β неисправные блоки. Ввиду (3.2) заключаем, что β — неисправный блок.

ВАРИАНТ В.5: $(U, V, W) = (K, r+1, j)$, $j = 1, \dots, r$. Тогда $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$. Схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является $(\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3)$ -правильной относительно каждого отличного от β блока δ из окрестности β . Поэтому если на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ подается $\tilde{z} \in \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$, то на входах блока β появляется набор значений переменных z_{n+1}, z_{r+1}, z_j , не зависящих от того, есть ли в C^* вне окрестности β неисправные блоки. Ввиду (3.2) β — неисправный блок.

ВАРИАНТ В.6: $(U, V, W) = (K, K, j)$, $j = 1, \dots, r$. Тогда $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$. Если вектор $\tilde{z} \in \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ подается на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$, то на входах блока β появляется набор значений z_{n+1}, z_{r+1}, z_j , не зависящих от того, есть ли в C^* неисправные блоки. Ввиду (3.2) заключаем, что β — неисправный блок.

Во всех рассмотренных вариантах существует неисправный блок в окрестности блока β . Лемма 3 доказана.

Лемма 4. 1. Если $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является \mathcal{P} -совершенной схемой относительно $\beta \in B'(C^*)$, то блок β исправен.

2. Если $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является \mathcal{P} -совершенной схемой относительно каждого блока $\beta \in B'(C^*)$, то $S_a(A', C^*, \tilde{x}_{n+l}) = S_a(A', C, \tilde{x}_{n+l})$ при любых $\tilde{x}_{n+l} \in \{0, 1\}^{n+l}$; здесь A' — произвольная схема, в которую может превратиться схема A при появлении в ней допустимых неисправностей.

Доказательство. Утверждение 1 легко следует из леммы 2 и определения \mathcal{P} -совершенной схемы. Докажем утверждение 2. В подсхеме $B'(C^*)$ \mathcal{P} -совершенной схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ все блоки работают правильно. Неправильно работать могут лишь некоторые блоки Q , причем их число не превышает m . Поэтому при любом \tilde{x}_{n+l} из $\{0, 1\}^{n+l}$ в схемах $S(A', C^*, \tilde{x}_{n+l})$ и $S(A', C, \tilde{x}_{n+l})$ на входы соответствующих схем типа D подаются векторы, отличающиеся друг от друга не более чем в m разрядах. Правильно работающие схемы D исправляют в C^* все ошибки, связанные с неправильной работой блоков типа Q (см. замечание 1). Поскольку в $B'(C^*)$ правильно работают все блоки, верно утверждение 2 доказываемой леммы. Лемма 4 доказана.

Опишем функцию $d(A^*, B_2^*, \beta, U, V, W, \tilde{x})$. Пусть (A^*, B_2^*, \tilde{x}) — функция, реализующаяся в схеме $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ на выходе блока β из C^* .

Функция $d(A^*, B_2^*, \beta, U, V, W, \tilde{x})$ определяется формулами (2.8)–(2.14) с предварительными заменами в них аргументов A и B_2 на A^* и B_2^* соответственно. Ясно, что $d(A^*, B_2^*, \beta, U, V, W, \tilde{x})$ — это функция, реализующаяся на выходе исправной подсхемы G в схеме $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+1})$.

Лемма 5. Пусть блок β из C^* имеет метку (U, V, W) и \tilde{z} — произвольный вектор из \mathcal{P} . Тогда

- если $\beta(A, B_2, \tilde{z}) \neq \beta(A^*, B_2^*, \tilde{z})$, то $d(A^*, B_2^*, \beta, U, V, W, \tilde{x}) = 0$;
- если $\beta(A, B_2, \tilde{z}) = \beta(A^*, B_2^*, \tilde{z})$, то $d(A^*, B_2^*, \beta, U, V, W, \tilde{x}) = 1$.

Доказательство. Рассмотрим случай $(U, V, W) = (K, Q, j)$. При других значениях метки (U, V, W) доказательство аналогично. В случае $(U, V, W) = (K, Q, j)$ блок β есть блок K , входы которого подключены к выходу схемы Q . Формула (2.9) при замене аргументов A, B_2 на A^*, B_2^* принимает вид

$$d(A^*, B_2^*, \beta, K, Q, j, \tilde{x}) = \{(\bigvee_{\gamma=0,1} x_j^\gamma \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{x})) \vee \bar{x}_{n+1}\} \\ \wedge \{(\bigvee_{\gamma=0,1} x_{r+1}^\gamma \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{x})) \vee x_{n+1}\}.$$

Докажем первое утверждение леммы при $(U, V, W) = (K, Q, j)$. Допустим, что при некотором $\tilde{z} \in \mathcal{P}$ справедливо соотношение

$$\beta(A^*, B_2^*, \tilde{z}) \neq (A, B_2, \tilde{z}). \quad (3.4)$$

Для любого вектора $\tilde{z} \in \mathcal{P}$ выполняется $z_{n+3} = 1$. Возможны два случая.

СЛУЧАЙ 1: $z_{n+1} = 1$. Тогда (3.4) принимает вид $\beta(A^*, B_2^*, \tilde{z}) \neq z_j$, следовательно, $\bigvee_{\gamma=0,1} z_j^\gamma \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{z}) = 0$ и $d(A^*, B_2^*, \beta, K, Q, j, \tilde{z}) = 0$ в соответствии с формулой (3.3).

СЛУЧАЙ 2: $z_{n+1} = 0$. Тогда из (3.4) ввиду условия $z_{n+3} = 1$ справедливо равенство $\bigvee_{\gamma=0,1} z_{r+1}^\gamma \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{z}) = 0$, из которого в силу (3.3) следует $d(A^*, B_2^*, \beta, K, Q, j, \tilde{z}) = 0$. Первое утверждение леммы доказано. Для доказательства второго утверждения леммы допустим, что

$$\beta(A^*, B_2^*, \tilde{z}) = (A, B_2, \tilde{z}). \quad (3.5)$$

Возможны два случая.

СЛУЧАЙ 1: $z_{n+1} = 0$. Учитывая, что $z_{n+3} = 1$ при $\tilde{z} \in \mathcal{P}$, из (3.4) получим равенство $\bigvee_{\gamma=0,1} z_{r+1}^\gamma \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{z}) = 1$, из которого в силу (3.3) следует $d(A^*, B_2^*, \beta, K, Q, j, \tilde{z}) = 1$.

СЛУЧАЙ 2: $z_{n+1} = 1$. Тогда $\beta(A^*, B_2^*, \tilde{z}) = z_j$ и в силу (3.5) справедливо равенство $\bigvee_{\gamma=0,1} z_j^\gamma \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{z}) = 1$, пользуясь которым из (3.3) получаем $d(A^*, B_2^*, \beta, K, Q, j, \tilde{z}) = 1$. Второе утверждение леммы 5 доказано.

Таким образом, лемма 5 доказана.

Пусть G и F — схемы из $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ такие, что входы схемы F подключены к выходам схемы G . Такую пару схем назовем GF -связкой. Пусть, как и выше, $F_i(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ — функция, которая реализуется на i -м выходе схемы F .

Лемма 6. Пусть F — схема из исправной GF -связки и блок β из подсхемы C^* в $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ имеет номер i и метку (U, V, W) . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является \mathcal{P} -совершенной относительно блока β , если $F_i(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l}) = 1$ при любом \tilde{x}_{n+l} из \mathcal{P} .
2. Схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ не является \mathcal{P} -совершенной относительно блока β , если $F_i(A^*, C^*, \tilde{z}) = 0$ при некотором $\tilde{z} \in \mathcal{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F_i(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l}) = 1$ при любом $\tilde{x}_{n+l} \in \mathcal{P}$. Предположим, что $(U, V, W) \in \mathfrak{M}_1$. Тогда для доказательства первого утверждения достаточно показать, что схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является \mathcal{P}_1 -правильной относительно β , т. е. при любом $\tilde{z} \in \mathcal{P}_1$ на выходе любого блока δ из окрестности блока β реализуется функция $\delta(A^*, C^*, \tilde{x})$, для которой выполняется равенство $\delta(A^*, C^*, \tilde{x}) = \delta(A, C, \tilde{x})$. Так как в GF -связке оба блока исправны и $z_{n+2} = 0$ при $\tilde{z} \in \mathcal{P}_1$, согласно определению функции $F_i(A^*, C^*, \tilde{x})$ (см. (2.15)) имеем $v_i(\tilde{z}) \cdot v_{i_1}(\tilde{z}) \cdot v_{i_2}(\tilde{z}) \cdot \dots \cdot v_{i_q}(\tilde{z}) = 1$; здесь $v_i(\tilde{z}), v_{i_1}(\tilde{z}), v_{i_2}(\tilde{z}), \dots, v_{i_q}(\tilde{z})$ — значения, появляющиеся на входах схемы F , когда на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ подается вектор \tilde{z} . Ввиду леммы 5 для любого блока δ из окрестности блока β выполняется равенство $\delta(A^*, C^*, \tilde{x}) = \delta(A, C, \tilde{x})$.

Случаи $(U, V, W) \in \mathfrak{M}_2$ и $(U, V, W) \in \mathfrak{M}_3$ рассматриваются аналогично. Заметим, что и в этих случаях $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ оказывается $\mathcal{P}(U, V, W)$ -правильной схемой.

Пусть $(U, V, W) = (Q, *, r + 1)$. Учитывая (2.15) и предположение $F_i(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l}) = 1$, получим $v_i(\tilde{z}_{n+l}) = 1$. Следовательно,

$$\delta(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l}) = \delta(A, C, \tilde{x}_{n+l}).$$

Докажем второе утверждение леммы. Пусть $F_i(A^*, C^*, \tilde{z}) = 0$ и $(U, V, W) = \mathfrak{M}_1$ при некотором $\tilde{z} \in \mathcal{P}_1$. Тогда $F_i(A^*, C^*, \tilde{z}) = 0$. Следовательно, имеет место равенство

$$v_i(\tilde{z}) \cdot v_{i_1}(\tilde{z}) \cdot v_{i_2}(\tilde{z}) \cdot \dots \cdot v_{i_q}(\tilde{z}) \cdot \bar{z}_{n+2} \vee z_{n+2} = 0, \quad (3.6)$$

которое влечет $z_{n+2} = 0$. Поэтому из $\tilde{z} \in \mathcal{P}$ следует $\tilde{z} \in \mathcal{P}_1$. Учитывая (3.6) и равенство $\mathcal{P}(U, V, W) = \mathcal{P}_1$, справедливое при $(U, V, W) \in \mathcal{M}_1$, заключаем, что имеются $\tilde{z} \in \mathcal{P}(U, V, W)$ и $j \in \{i, i_1, \dots, i_q\}$ такие, что $v_j(\tilde{z}) = 0$. Последнее равенство означает, что если на входы схем $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ и $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ подается набор \tilde{z}_{n+l} , то значения функций $\delta(A, C, \tilde{z}_{n+l})$ и $\delta(A^*, C^*, \tilde{z}_{n+l})$, реализующихся в указанных схемах на выходе блока δ из окрестности блока β , не совпадают. Поэтому схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ не является \mathcal{P} -совершенной относительно блока β .

При $(U, V, W) \in \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3$ аналогичные рассуждения приводят к тому же заключению. Лемма 6 доказана.

В следующих теоремах A' обозначает произвольную схему, в которую может превратиться схема A при появлении в ней допустимых неисправностей.

Теорема 2. Пусть F — схема из исправной GF -связки и β — блок с номером i из подсхемы C^* в $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$. Тогда верны следующие утверждения.

1. Если $F_i(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l}) = 1$ при любых $\tilde{x}_{n+l} \in \mathcal{P}$ и $i \in \{1, \dots, t\}$, то $S_a(A', C^*, \tilde{x}_{n+l}) = S_a(A', C, \tilde{x}_{n+l})$ при любых $\tilde{x}_{n+l} \in \{0, 1\}^{n+l}$.
2. Если $F_i(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l}) = 0$ при некотором $\tilde{x}_{n+l} \in \mathcal{P}$, то блок β неисправен либо в его окрестности есть неисправный блок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из лемм 3, 4, 6.

Допустим, что на входы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ подается вектор $\tilde{x}_{n+l} \in \{0, 1\}^{n+l}$. Обозначим через $E(k, A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ и $F(k, A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ векторы, возникающие при этом на выходах соответственно схем E и F из колонки H_k в схеме $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$.

Теорема 3. Пусть H_k — колонка в $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$, состоящая из исправных схем. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если при любых $\tilde{x}_{n+l} \in \mathcal{P}$ вектор $E(k, A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ состоит только из нулевых компонент, то $S_a(A', C^*, \tilde{x}_n, 0, \dots, 0) = S_a(A', B, \tilde{x}_n)$ при любых $\tilde{x}_{n+l} \in \{0, 1\}^{n+l}$.
2. Пусть при некотором $\tilde{x} \in \mathcal{P}$ среди компонент вектора $E(k, A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ имеются единичные компоненты, и пусть слово длины $m(\mu + 2)(\lceil \log t \rceil + 1)$, разбитое на $m(\mu + 2)$ непересекающихся подслов длины $\lceil \log t \rceil + 1$, является координатной записью вектора $E(k, A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$. Тогда эти подслова образуют список \mathcal{C} , состоящий из номеров тех блоков, в окрестностях которых есть неисправные блоки.
3. Если в окрестности каждого блока β с номером из \mathcal{C} все неисправные блоки заменить на исправные, то схема C преобразуется в схему C^{**} такую, что $S(A', C^{**}, \tilde{x}_n, 0, \dots, 0) = S(A', B, \tilde{x}_n)$ при всех $\tilde{x}_n \in \{0, 1\}^n$.

Доказательство непосредственно следует из лемм 4, 6, теоремы 2 и того факта, что при любом $\tilde{x}_n \in \mathcal{P}$ число нулевых компонент вектора $F(k, A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ не превышает $m(\mu + 2)$.

Введем множества $T(\tilde{w}_{n+l})$, T_1 и $\pi(T(\tilde{w}_{n+l}))$. Возьмем произвольный вектор $\tilde{w}_{n+l} = (w_1, \dots, w_{n+3}, 0, \dots, 0)$ из \mathcal{P} . Обозначим через $T(\tilde{w}_{n+l})$ множество векторов из $\{0, 1\}^{n+l}$ вида $(w_1, \dots, w_{n+3}, \hat{i})$, где \hat{i} — двоичная $(l-3)$ -разрядная запись числа i , $i = 0, \dots, v-1$. Положим $T_1 = \cup T(\tilde{w}_{n+l})$, где объединение множеств $T(\tilde{w}_{n+l})$ берется по всем $\tilde{w}_{n+l} \in \mathcal{P}$. Последовательность $((w_1, \dots, w_{n+3}, \hat{0}), (w_1, \dots, w_{n+3}, \hat{1}), \dots, (w_1, \dots, w_{n+3}, \widehat{v-1}))$ обозначим через $\pi(T(\tilde{w}_{n+l}))$.

Допустим, что $E_j(k, A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ — функция, реализующаяся в схеме $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ на j -м выходе блока E из колонки H_k .

Лемма 7. Пусть \tilde{w} — произвольный вектор из \mathcal{P} . Тогда при любых $j \in \{1, \dots, v\}$, $k \in \{1, \dots, 2m+1\}$, $\tilde{u}_{n+l} \in T(\tilde{w})$ выполняется равенство $E_j(k, A^*, C^*, \tilde{u}_{n+l}) = E_j(k, A^*, C^*, \tilde{w}_{n+l})$.

Доказательство следует из того, что $E_j(k, A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ не зависит существенно от переменных $x_{n+4}, x_{n+5}, \dots, x_{n+s+3}$.

Обозначим через T_2 множество векторов \tilde{z}_{n+l} из $\{0, 1\}^{n+l}$, для которых $z_{2m+2} = z_{2m+3} = z_{n+l} = 0$. Ясно, что T_2 состоит из 2^{2m+1} векторов.

Схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ называется T_2 -нормальной, если $S_b(A^*, C^*, \tilde{z}_{n+l}) = S_b(A, C, \tilde{z}_{n+l})$ при любом $\tilde{z}_{n+l} \in T_2$.

Лемма 8. Если $S_b(A^*, C^*, \tilde{\delta}_{n+l}) \neq S_b(A^*, C, \tilde{\delta}_{n+l})$ при некотором $\tilde{\delta}_{n+l} \in T_2$, то в $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ неисправна особая часть схемы.

Доказательство. Если особая часть схемы в $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ исправна, то при любых $\tilde{\delta}_{n+l} \in T_2$ имеем

$$S_b(A^*, C^*, \tilde{\delta}_{n+l}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{j=1}^{2m+1} \delta_j > m; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция $S_b(A^*, C^*, \tilde{\delta}_{n+l})$ не зависит от того, есть ли неисправные элементы вне особой части схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$. Следовательно, при любых $\tilde{\delta}_{n+l} \in T_2$ должно выполняться равенство $S_b(A^*, C^*, \tilde{\delta}_{n+l}) = S_b(A^*, C, \tilde{\delta}_{n+l})$. В противном случае в особой части схемы имеется неисправность. Лемма 8 доказана.

Пусть $\gamma_j(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ — функция, реализующаяся на выходе схемы M из колонки H_j в схеме $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$.

Лемма 9. Если $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является T_2 -нормальной схемой, то при $\tilde{x} \in T_2$ функция $\gamma_j(A^*, C^*, \tilde{x})$ — это одна из функций x_j или \bar{x}_j .

Доказательство. В колонке H_j , $1 \leq j \leq 2m+1$, схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ среди $m+1$ схем J есть по крайней мере одна исправная схема. При $x_{n+3} \equiv 0$ на ее выходе реализуется функция, тождественно равная нулю. Ввиду способа соединения схем $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ при $x_{n+3} \equiv 0$ на входы всех схем в H_j , следующих за упомянутой исправной схемой, подаются значения, не зависящие от $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+3}$. Поэтому при $x_{n+3} \equiv 0$ функция $\gamma_j(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ может существенно зависеть только от x_j .

Предположим, что при $x_{n+3} \equiv 0$ функция $\gamma_j(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ существенно не зависит от x_j . В этом случае на множестве T_2 функция $S_b(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ существенно зависит менее чем от $2m+1$ переменных. Покажем, что это противоречит предположению, что схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является T_2 -нормальной. Если схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является T_2 -нормальной, то при $\tilde{x}_{n+l} \in T_2$ выполняется равенство

$$S_b(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l}) = S_b(A, C, \tilde{x}_{n+l}).$$

Следовательно, функция, определенная соотношением

$$S_b(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{j=1}^{2m+1} x_i > m, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

как функция переменных x_1, \dots, x_{n+l} над множеством T_2 является симметрической и существенно зависящей от $2m+1$ переменных x_1, \dots, x_{2m+1} ; противоречие. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. Если схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является T_2 -нормальной, то для любого вектора $\tilde{\beta}_{2m+1} \in \{0, 1\}^{2m+1}$ найдется вектор $\tilde{\alpha} \in T_2$ такой, что

$$\gamma_j(A^*, C^*, \tilde{\alpha}) = \beta_j, \quad j = 1, \dots, 2m+1. \quad (3.7)$$

Доказательство. По лемме 9 найдутся константы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2m+1}$ из $\{0, 1\}$ такие, что если на входы T_2 -нормальной схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ подается вектор $\tilde{x} \in T_2$, то на полюсах $\gamma_1, \dots, \gamma_{2m+1}$ реализуются функции $x_1^{\varepsilon_1}, \dots, x_{2m+1}^{\varepsilon_{2m+1}}$. Пусть задан произвольный вектор $\tilde{\beta}_{2m+1} \in \{0, 1\}^{2m+1}$. Определим вектор $\tilde{\alpha}$ следующим образом:

$$\alpha_i = \begin{cases} \beta_i, & \text{если } \varepsilon_i = 1, \quad 1 \leq i \leq 2m+1; \\ \bar{\beta}_i, & \text{если } \varepsilon_i = 0, \quad 1 \leq i \leq 2m+1; \\ 0, & \text{если } 2m+2 \leq i \leq n+l. \end{cases}$$

Вектор $\tilde{\alpha}$ принадлежит T_2 и удовлетворяет соотношению (3.7). Лемма 10 доказана.

Пусть $I(j, A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ — функция, реализующаяся на выходе схемы I , находящейся в колонке H_j схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$.

Лемма 11. Если схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является T_2 -нормальной, то при любом $\tilde{\delta}_{n+l} \in T_1$

$$S_b(A^*, C^*, \tilde{\delta}_{n+l}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{j=1}^{2m+1} I(j, A^*, C^*, \tilde{\delta}_{n+l}) > m; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. В схеме $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ среди колонок H_j , $j = 1, \dots, 2m+1$, найдутся $m+1$ исправных колонок (т. е. колонок, состоящих только из исправных схем). Пусть такими колонками являются $H_{j_1}, \dots, H_{j_{m+1}}$. Тогда если $\tilde{\delta}_{n+l} \in \mathcal{P}$, то при любых $i \in \{1, \dots, m+1\}$ выполняются равенства $\gamma_{j_i}(A^*, C^*, \tilde{\delta}_{n+l}) = I(j_i, A^*, C^*, \tilde{\delta}_{n+l})$, а вектор $(\gamma_1(A^*, C^*, \tilde{\delta}_{n+l}), \dots, \gamma_{2m+1}(A^*, C^*, \tilde{\delta}_{n+l}))$ содержит не менее $m+1$ компонент, равных $I(j_1, A^*, C^*, \tilde{\delta}_{n+l})$.

Пусть $\tilde{\alpha}_{n+l}$ — вектор из T_2 такой, что $\gamma_j(A^*, C^*, \tilde{\delta}_{n+l}) = \gamma_j(A^*, C^*, \tilde{\alpha}_{n+l})$ при $j = 1, \dots, 2m+1$ (по лемме 10 такой вектор $\tilde{\alpha}$ найдется). Поскольку колонки H_{j_i} , $i = 1, \dots, m+1$, исправны, верно условие $\alpha_{j_i} = \gamma_{j_i}(A^*, C^*, \tilde{\alpha}_{n+l})$, $i = 1, \dots, m+1$, которое означает, что среди чисел α_j , $j = 1, \dots, 2m+1$, найдутся $m+1$ чисел, равных $I(j_1, A^*, C^*, \tilde{\delta}_{n+l})$. Так как схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является T_2 -нормальной, получаем утверждение леммы 11.

Лемма 12. Пусть \tilde{w}_{n+l} — произвольный вектор из \mathcal{P} и H_k — колонка в $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$, состоящая только из исправных схем. Тогда

$$\begin{aligned} & S_b(A^*, C^*, \pi(T(\tilde{w}_{n+l}))) \\ &= (E_1(k, A^*, C^*, \tilde{w}_{n+l}), E_2(k, A^*, C^*, \tilde{w}_{n+l}), \dots, E_v(k, A^*, C^*, \tilde{w}_{n+l})). \end{aligned}$$

Доказательство. Среди колонок H_j , $j = 1, \dots, 2m+1$, найдутся $m+1$ колонок, состоящих только из исправных схем. Пусть это будут колонки $H_k, H_{k_1}, H_{k_2}, \dots, H_{k_m}$. Тогда при $j = 1, \dots, m$ выполняются равенства $E_i(k_j, A^*, C^*, \tilde{w}_{n+l}) = E_i(k, A^*, C^*, \tilde{w}_{n+l})$.

Пусть $\tilde{w} = (w_1, \dots, w_{n+3}, 0, \dots, 0)$ и $\tilde{u} = (w_1, \dots, w_{n+3}, \sigma_1, \dots, \sigma_s)$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ — набор из $\{0, 1\}^s$, для которого выполняется равенство $1 + \sum_{j=1}^s \sigma_j 2^{s-j} = i$. Заметим, что $\tilde{w}_{n+l} \in T(\tilde{w}_{n+l})$ по определению множества $T(\tilde{w}_{n+l})$, при этом вектор \tilde{u}_{n+l} является i -м членом

в последовательности $\pi(T(\tilde{w}_{n+l}))$. Из определения схемы I и предположения, что все схемы в колонках $H_k, H_{k_1}, H_{k_2}, \dots, H_{k_m}$ исправны, следует $I(k_j, A^*, C^*, \tilde{w}) = E_i(k, A^*, C^*, \tilde{w}_{n+l})$ при любых $j = 1, \dots, m$. По лемме 11

$$S_b(A^*, C^*, \tilde{w}_{n+l}) = E_i(k, A^*, C^*, \tilde{w}_{n+l}).$$

Повторяя подобные рассуждения для других значений \tilde{w}_{n+l} из $T(\tilde{w}_{n+l})$, получим

$$S_b(A^*, C^*, \pi(T(\tilde{w}))) = (E_1(k, A^*, C^*, \tilde{w}), E_2(k, A^*, C^*, \tilde{w}), \dots, E_v(k, A^*, C^*, \tilde{w})).$$

Пусть $\pi(T_1)$ — последовательность всех векторов из T_1 .

Теорема 4. Если $S_b(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l}) = S_b(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ при любых $\tilde{x}_{n+l} \in T_2$ и $S_b(A^*, C^*, \tilde{\delta}_{n+l}) \neq S_b(A, C, \tilde{\delta})$ при некотором $\tilde{\delta}_{n+l} \in T_1$, то по последовательности $\langle S_b(A^*, C^*, \pi(T_1)) \rangle$ можно указать множество блоков \mathfrak{C} такое, что

- в окрестности каждого блока из \mathfrak{C} есть неисправные блоки;
- если в окрестности каждого блока из \mathfrak{C} все неисправные блоки заменить исправными, то схема C^* превратится в схему C^{**} , для которой при любых $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ будет выполняться

$$S_a(A', C^{**}, \tilde{x}_n, 0, \dots, 0) = S_a(A', B, \tilde{x}_n).$$

Доказательство следует из леммы 12 и теоремы 3.

Подводя итог сказанному, покажем, что определенная в § 2 схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ обладает свойствами, перечисленными в формулировке теоремы 1.

Пусть выполнены следующие условия:

- T_1 и T_2 — множества из § 3 (отметим, что мощность множества $T_1 \cup T_2$ равна $m(\mu + 2)(\lceil \log(kmL(B)) \rceil + 1)(2^{r+2} + 4) + 2^{2m+1}$);
- $\{\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_s\}$ из формулировки теоремы 1 есть множество окрестностей блоков из C , определенное в § 3;
- $k = \max(c_1, \dots, c_5, 4(r + 2))$, где c_i — константы, фигурирующие в соотношениях (2.5)–(2.7), (2.25)–(2.28).

Тогда

- неравенства (i) теоремы 1 следуют из неравенства (2.28), определения особой части схемы и того факта, что окрестность каждого блока из C содержит не больше $r + 2$ блоков, а сложность каждого из них при реализации схемой в базисе $(\wedge, \vee, -)$ не больше четырех;
- равенство (ii) теоремы 1 следует из равенства (2.33);
- утверждение (iii) теоремы 1 непосредственно следует из леммы 8;

- утверждение (iv) теоремы 1 следует из теоремы 4;
- утверждение (v) теоремы 1 следует из утверждения 1 теоремы 3, а также леммы 12.

Вышесказанное означает, что множество T и схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ обладают всеми перечисленными в формулировке теоремы 1 свойствами. Теорема 1 доказана.

Автор благодарит А. Д. Коршунова за помощь в редактировании этой статьи, а также рецензента за ряд критических замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Reddy S. M. Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. 1972. V. 21, N 1. P. 124–141.
2. Шевченко В. И. О синтезе самокорректирующихся схем с малой трудоемкостью тестирования // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Горьк. ун-т, 1985. С. 133–143.
3. Горяшко А. П. Синтез диагностируемых схем вычислительных устройств. М.: Наука, 1987.
4. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискретная математика. 1989. Т. 1, вып. 3. С. 71–76.
5. Носков В. Н. Метод синтеза контролепригодных схем из функциональных элементов // Методы дискретного анализа в изучении булевых функций и графов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. Вып. 48. С. 52–69.
6. Носков В. Н. Самокорректирующиеся комбинационные схемы, допускающие простой контроль // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. Вып. 49. С. 42–59.
7. Носков В. Н. Метод синтеза удобных для контроля комбинационных схем // Дискретная математика. 1993. Т. 5, вып. 4. С. 3–23.
8. Носков В. Н. Преобразование схем из функциональных элементов к виду, удобному для контроля // Тр. ин-та мат. СО РАН. 1994. Т. 27. С. 142–165.
9. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

Адрес автора:

Статья поступила

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4
Институт математики СО РАН

1 марта 1994 г.