СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь – декабрь 1994. Том 1, № 4, 7–21

УДК 519.17

О НАИМЕНЬШИХ НЕЗАВИСИМЫХ ДОМИНИРУЮЩИХ МНОЖЕСТВАХ В ГРАФАХ*)

Н. И. Глебов, А. В. Косточка

Изучается вопрос о том, насколько сильно величина $\mathrm{id}(G)$ наименьшего независимого доминирующего множества в графе G может отличаться от величины $\mathrm{d}(G)$ наименьшего доминирующего множества в графе G при ограничениях на степени вершин в G. Получены верхние оценки отношения $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G)$ для графов с заданной максимальной степенью вершин и для однородных графов заданной степени.

В работах [1–3] при некоторых ограничениях на структуру графа G рассматривался вопрос о соотношении между величиной $\mathrm{id}(G)$ — числом вершин наименьшего независимого доминирующего множества графа G и величиной $\mathrm{d}(G)$ — числом вершин наименьшего доминирующего множества графа G. Так, Р. Аллан и Р. Ласкар [1] показали, что $\mathrm{id}(G) = \mathrm{d}(G)$ для любого графа G, не содержащего подграфов, изоморфных графу $K_{1,3}$. С другой стороны, в [3] построена бесконечная серия кубических 3-связных графов G таких, что $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G) \geqslant 37/34$. В данной работе проводится более детальное исследование отношения $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G)$. Обозначим через $\mathcal{H}_k$ класс графов с максимальной степенью, не превосходящей k.

Из вышеупомянутого результата [1] следует, что $\mathrm{id}(G) = \mathrm{d}(G)$ для любого графа $G \in \mathcal{H}_2$. В связи с этим в работе основное внимание уделено графам из пограничного класса $\mathcal{H}_3$. Очевидно, что $\mathrm{d}(K_{3,3}) = 2$, $\mathrm{id}(K_{3,3}) = 3$. Поэтому для любого графа G, состоящего из нескольких копий графа $K_{3,3}$, имеем $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G) = 3/2$. Оказалось, что для связных графов $G \in \mathcal{H}_3$ с числом вершин больше 6 величина $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G)$ всегда меньше $3/2$. В теореме 1 доказано, что отношение $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G)$ для таких графов не превосходит $7/5$, и эта оценка, как показано далее, достижима на бесконечном семействе графов. В теореме 2 установлено, что максимум рассматриваемого отношения в классе связных

*) Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-012-489), работа второго автора — при финансовой поддержке Международного научного фонда (код проекта RPY000) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-1486).

кубических графов, отличных от $K_{3,3}$, не превосходит $4/3$. Эта оценка достигается на 5-угольной призме. Построена также бесконечная серия 2-связных кубических графов G с $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G) \geqslant 5/4$.

При больших k условие связности становится менее обременительным. Мы покажем, что $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G) \leqslant k+2-2\sqrt{k}$ для любого графа $G \in \mathcal{H}_k$ (теорема 3), и для k, являющихся полными квадратами, построим бесконечные серии связных графов $G \in \mathcal{H}_k$ с $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G) = k+2-2\sqrt{k} - O(k^{-0.5})$ (пример 2). Далее, мы покажем, что $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G) \leqslant k/2$ для любого k-однородного графа G (теорема 4), и для четных k укажем бесконечные серии k-однородных k-связных графов G с $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G) \geqslant (k-3)/2$ (пример 4). В заключение мы найдем максимум отношения $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G)$ на множестве n-вершинных графов (теорема 5).

В § 1 вводятся обозначения и доказываются вспомогательные утверждения о структуре доминирующих множеств в графах с максимальной степенью 3. В § 2, 3 получены верхние и нижние оценки для величины $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G)$ в графах из $\mathcal{H}_3$ и в § 4 рассмотрены графы из $\mathcal{H}_k$ при $k > 3$.

§ 1. Обозначения и предварительные результаты

Подграф графа G, порожденный множеством $X \subset V(G)$, обозначается через $G(X)$.

Расстоянием $\rho_G(u,v)$ *между вершинами* u, v *графа* G называется длина кратчайшего пути между ними. Индекс G в обозначении расстояния часто будем опускать. Для $X \subseteq V(G)$, $v \in V(G)$ положим

$$
\begin{aligned}
&\rho(v,X) = \min\{\rho(v,u) | u \in X\},\\
&N(X) = \{v \in V(G) | \rho(v,X) = 1\},\\
&\widetilde{N}(X) = N(X) \cup X,\\
&N(v) = N(\{v\}), \quad \deg(v) = |N(v)|.
\end{aligned}
$$

Будем говорить, что *множество* $X \subseteq V(G)$ *покрывает множество* $Y \subseteq V(G)$ (*вершину* v), если $Y \subseteq \widetilde{N}(X)$ ($v \in \widetilde{N}(X)$).

Согласно общепринятой терминологии множество $D \subseteq V(G)$ называется *доминирующим* в графе G, если D покрывает $V(G)$. Доминирующее множество D в графе G назовем 2-*множеством*, если каждая компонента графа $G(D)$ содержит не более двух вершин; при этом пары смежных вершин множества D будем называть *связками*.

Лемма 1. *Пусть $H \in \mathcal{H}_3$, I — независимое множество в H такое, что $\rho(v,I) \leqslant 2$ для всех $v \in V(H)$. Тогда в графе H существует независимое доминирующее множество I^*, мощность которого не превосходит $3|I|$.*

Доказательство. Пусть $V(H) = I \cup P_1 \cup P_2$, где

$$P_r = \{v \in V(H) \mid \rho(v, I) = r\}, \quad r = 1, 2.$$

Если $P_2 = \varnothing$, то утверждение леммы тривиально.

Пусть $P_2 \neq \varnothing$. Определим множество $D_1 = \{v \in P_1 \mid N(v) \cap P_2 \neq \varnothing\}$. Заметим, что все вершины v из I, для которых $N(v) \cap D_1 = \varnothing$, могут быть сразу включены в I^* и исключены вместе с $N(v)$ из дальнейшего рассмотрения. Поэтому будем считать, что $N(v) \cap D_1 \neq \varnothing$ для любой вершины $v \in I$.

Пусть D_0 — максимальное независимое подмножество множества $\{v \in P_1 \mid \rho(v, D_1) \geqslant 2\}$, $D = D_1 \cup D_0$. Тогда, как нетрудно видеть, D покрывает $V(H)$. Более того, D есть 2-множество, все связки которого $s_1, \dots, s_t$ содержатся в D_1. Имеет место также очевидная цепочка неравенств

$$|D| \leqslant \sum_{v \in I} |N(v) \cap D| \leqslant 2|I| + |\Psi|, \tag{1}$$

где $\Psi = \{v \in I \mid |N(v) \cap D| = 3\}$.

Предполагая множество связок $L = \{s_1, \dots, s_t\}$ непустым (иначе можно положить $I^* = D$), рассмотрим двудольный граф Γ с долями I и L, в котором вершины $v \in I$ и $s \in L$ смежны, если и только если $N(v) \cap s \neq \varnothing$. Поскольку все связки содержатся в D_1 и $H \in \mathcal{H}_3$, то $\Gamma \in \mathcal{H}_3$. По теореме Кенига в графе Γ существует паросочетание, покрывающее все вершины степени 3; множество таких вершин из доли I обозначим через I_3. Наличие указанного паросочетания позволяет ввести обозначения для вершин в связках $s_i = \{x_i, y_i\}$ таким образом, что для каждой вершины $v \in I_3$ будет выполняться соотношение

$$N(v) \cap \{x_1, \dots, x_t\} \neq \varnothing. \tag{2}$$

В частности, для каждой вершины $v \in I_3$ множество $N(v) \cap (D \setminus Y)$, где $Y = \{y_1, \dots, y_t\}$, непусто.

Пусть Z — максимальное независимое подмножество множества $\{z \in P_2 \mid \rho(z, D \setminus Y) \geqslant 2\}$. Тогда множество $D' = (D \setminus Y) \cup Z$ обладает следующими свойствами:

(a) D' — независимое множество;

(b) D' покрывает $I_3 \cup P_1 \cup P_2$;

(c) $|D'| \leqslant |D|$.

Свойства (a), (b) достаточно очевидны, а (c) следует из того, что $|Z| \leqslant |Y|$, поскольку $Z \subseteq \{z \in P_2 \mid \rho(z, Y) = 1\}$ и $|N(y) \cap P_2| = 1$ для любой вершины $y \in Y$.

Рассмотрим теперь множества $I' = \{v \in I \mid \rho(v, D') \geqslant 2\}$, $I^* = D' \cup I'$. Легко видеть, что множество I^* является независимым и доминирующим в графе H. Для завершения доказательства леммы ввиду (1) и (c) достаточно убедиться, что $I' \cap \Psi = \varnothing$.

Пусть $v \in \Psi$, т. е. $v \in I, |N(v) \cap D| = 3$. Если $N(v) \cap (D \setminus Y) \neq \varnothing$, то $N(v) \cap D' \neq \varnothing$ и, следовательно, $v \notin I'$. Если же $N(v) \cap (D \setminus Y) = \varnothing$, то $|N(v) \cap Y| = |N(v) \cap D| = 3$, а поскольку множество Y образовано из представителей различных связок, то степень вершины v в графе Γ равна 3, т. е. $v \in I_3$. Это противоречит (2). Лемма 1 доказана.

Будем называть 2-множество в графе G $(2,3)$-*множеством*, если

— расстояние в G между любыми двумя связками не меньше 3;
— каждая вершина, входящая в какую-нибудь связку, имеет степень 3 и не входит в 3-циклы.

Лемма 2. *В любом графе $G \in \mathcal{H}_3$ имеется $(2,3)$-множество мощности $\mathrm{d}(G)$.*

Доказательство. Покажем, что таким множеством является, в частности, наименьшее доминирующее множество D^0 с минимально возможным числом ребер в $G(D^0)$.

Пусть $v_1, v_2 \in D^0$, $\rho(v_1, v_2) = 1$, $N = N(v_1) \setminus \{v_2\}$, $Q = \{v \in V(G) \mid \rho(v, D^0 \setminus \{v_1\}) \geqslant 2\}$. Нетрудно видеть, что $Q \subseteq N$ и максимальное независимое подмножество Z множества Q содержит не более одной вершины в каждом из перечисленных ниже случаев:

Случай 1: $\deg(v_1) \leqslant 2$;

Случай 2: v_1 входит в 3-цикл;

Случай 3: найдется $v \in D^0 \setminus \{v_1, v_2\}$ с $\rho(v, N) \leqslant 1$.

Следовательно, в указанных случаях для доминирующего множества $D' = (D^0 \setminus \{v_1\}) \cup Z$ имеет место либо $|D'| < |D^0|$, либо $|D'| = |D^0|$ и $|E(G(D'))| < |E(G(D^0))|$, что противоречит выбору D^0. Таким образом, D^0 есть $(2,3)$-множество. Лемма 2 доказана.

Замечание 1. Из доказательства леммы 2 видно, что D^0 обладает следующим свойством: для любой связки $s = \{x, y\}$ из D^0 расстояние от s до $D^0 \setminus s$ не меньше 3.

В дальнейшем множество связок $\{s_0, s_1, \ldots, s_t\}$ будем называть *пучком*, если $t \geqslant 1$ и $\rho(s_0, s_i) = 3$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$.

Лемма 3. *Пусть D есть $(2,3)$-множество в графе $G \in \mathcal{H}_3$, $\{s_0, s_1, \ldots, s_t\}$ — пучок связок из D и $S = \bigcup_{i=0}^{t} s_i$. Тогда существует независимое множество I, удовлетворяющее следующим условиям:*

$I \subseteq \{v \in V(G) \mid \rho(v, D \setminus S) \geqslant 2\}$;

$(D \setminus S) \cup I$ есть $(2,3)$-множество;

$|I| \leqslant 4|S|/3$.

Доказательство. Пусть $s_i = \{x_i, y_i\}$, $N(y_i) = \{x_i, z_i^1, z_i^2\}$ $(0 \leqslant i \leqslant t)$, $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_t\}$, $Q = \{v \in V(G) \mid \rho(v, D \setminus S) \geqslant 2\}$, $Z_0 = \{z_0^1, z_0^2\} \cap Q$. Без потери общности можно считать, что $\rho(y_0, y_i) = 3$ при $i = 1, \ldots, k$, где $k \geqslant t/2$.

Пусть Z — некоторое максимальное независимое подмножество множества $Q_1 = \{v \in Q \mid \rho(v, X \cup Z_0) \geqslant 2\}$. Положим $I = X \cup Z_0 \cup Z$. Нетрудно видеть, что I — независимое множество, $I \subseteq Q$ и $(D \setminus S) \cup I$ есть $(2,3)$-множество. Остается показать, что $|I| \leqslant 8(t+1)/3$.

Пусть $Z_i = \{z_i^1, z_i^2\} \cap Z$ $(i = 1, \ldots, t)$, и $\{1, \ldots, k\} = J_1 \cup J_2$, где $J_j \subseteq \{i \mid \rho(z_0^j, y_i) = 2\}$ $(j = 1, 2)$ и $J_1 \cap J_2 = \varnothing$. Поскольку $Z \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{t} \{z_i^1, z_i^2\}$ и множества Z_i попарно не пересекаются, имеем $|Z| = \sum\limits_{i=1}^{t} |Z_i|$.

Справедливы следующие утверждения.

— *Если* $z_0^j \in Z_0$, *то* $|Z_i| \leqslant 1$ $(i \in J_j)$, *поэтому* $\sum\limits_{i \in J_j} |Z_i| \leqslant |J_j|$ $(j = 1, 2)$.

— *Если* $z_0^j \notin Z_0$, *то* $|J_j| \leqslant 1$ $(j \in J_j)$, *поэтому* $\sum\limits_{i \in J_j} |Z_i| \leqslant 1 + |J_j|$ $(j = 1, 2)$.

С учетом этих утверждений получаем $\sum\limits_{i=0}^{k} |Z_i| \leqslant 2 + k$ и, наконец,

$$|I| \leqslant |X| + \sum_{i=0}^{t} |Z_i| \leqslant (t+1) + (2+k) + 2(t-k) = 3(t+1) - k.$$

Но при $k \geqslant 1$ и $t \leqslant 2k$ имеем $3(t+1) - k \leqslant 8(t+1)/3$. Лемма 3 доказана.

Связку s из $(2,3)$-множества D назовем *изолированной*, если расстояние от s до любой другой связки из D больше 3.

Лемма 4. *Пусть D есть $(2,3)$-множество в графе $G \in \mathcal{H}_3$, не содержащее изолированных связок, а S — множество всех вершин, входящих в связки. Тогда существует независимое доминирующее множество F такое, что $|F \setminus (D \setminus S)| \leqslant 4|S|/3$.*

Доказательство. Сначала убедимся, что множество всех связок из D можно разбить на конечное число непересекающихся пучков с множествами входящих в них вершин $F_0^1, \ldots, F_0^r$, $\bigcup\limits_{j=1}^{r} F_0^j = S$. С этой целью рассмотрим граф Γ_0, вершинами которого являются связки из D, а множество ребер состоит из тех пар связок, расстояние между которыми равно 3. По условиям леммы в Γ_0 нет изолированных вершин.

Рассмотрим минимальный остовный подграф Γ графа Γ_0, не имеющий изолированных вершин. Поскольку удаление из графа ребра, обе концевые вершины которого имеют степень больше 1, не приводит к появлению изолированных вершин, в графе Γ таких ребер нет. Таким образом, компонентами графа Γ являются лишь звезды, т. е. графы вида $K_{1,t}$, $t \geqslant 1$. Эти компоненты соответствуют пучкам связок из D и порождают нужное нам разбиение $(F_0^1, \ldots, F_0^r)$ множества S.

Последовательное применение леммы 3 к упомянутым пучкам связок позволяет получить независимые множества $I^1, \ldots, I^r$ и $(2,3)$-множества $F^0, \ldots, F^r$ такие, что

$$F^0 = D, \; I^j \subseteq \{v \in V(G) \mid \rho(v, F^{j-1} \setminus F_0^j) \geqslant 2\},$$

$$F^j = (D \setminus (F_0^1 \cup \ldots \cup F_0^j)) \cup I^1 \cup \ldots \cup I^j, \; |I^j| \leqslant 4|F_0^j|/3.$$

Тогда множество $F = F^r (= (D \setminus S) \cup I^1 \cup \ldots \cup I^r)$ удовлетворяет утверждению леммы. Лемма 4 доказана.

§ 2. Графы с максимальной степенью 3. Верхние оценки

Теорема 1. *Для любого связного графа $G \in \mathcal{H}_3$ с числом вершин больше 6 справедливо неравенство* $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G) \leqslant 7/5$.

Доказательство. Пусть D есть $(2,3)$-множество в G и $|D| = \mathrm{d}(G)$ (по лемме 2 такое множество существует). Обозначим через S^0 (соответственно S) множество всех вершин, входящих в изолированные (соответственно неизолированные) связки из D, а через I — множество вершин из D, не входящих в связки. В силу замечания 1 можно считать, что $\rho(I, S \cup S^0) \geqslant 3$.

Вначале покажем, что существует $(2,3)$-множество F', в котором множество всех вершин, входящих в связки, совпадает с S и $|F' \setminus S| \leqslant 7|D \setminus S|/5$. С этой целью определим два максимальных независимых подмножества I^1 и I^2 множества $Q = \{v \in V(G) \mid \rho(v, S) \geqslant 2\}$ и убедимся, что верно неравенство

$$5 \min(|I^1|, |I^2|) \leqslant 7|I \cup S^0|. \tag{3}$$

Тогда меньшее по мощности из множеств $I^1 \cup S$ и $I^2 \cup S$ можно взять в качестве F'.

Пусть $S^0 = \bigcup\limits_{i=1}^{m} s_i$, где $\{s_1, \ldots, s_m\}$ — множество всех изолированных связок из D, $s_i = \{x_i, y_i\}$; $N(y_i) = \{x_i, z_i^1, z_i^2\}$ $(i = 1, \ldots, m)$; $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$; $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$; $Z = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \{z_i^1, z_i^2\}$. При этом выберем обозначения x_i и y_i так, что число вершин в $N(y_i) \setminus \{x_i\} (= \{z_i^1, z_i^2\})$,

находящихся на расстоянии 2 от I, не меньше числа таких вершин в $N(x_i) \setminus \{y_i\}$. Легко убедиться, что множество $I^1 = I \cup X \cup Z$ является максимальным независимым подмножеством множества Q и $|I^1| = k + 3m$, где $k = |I|$.

Для построения множества I^2 рассмотрим разбиение множества $V(G)$ на подмножества V_1, V_2 и Z', где

$$V_1 = \{v \in V(G) \mid \rho(v, S \cup X) \leqslant 1\},$$

$$V_2 = \{v \in V(G) \mid \rho(v, S \cup X) \geqslant 2, \rho(v, I) \leqslant 2\},$$

$$Z' = \{v \in V(G) \mid \rho(v, S \cup X) \geqslant 2, \rho(v, I) \geqslant 3\}.$$

Прежде всего, заметим, что $Z' \subseteq Z$, так как в Z' могут входить только вершины, покрытые множеством Y и не входящие в X. Покажем, что $\rho(Z', V_2) \geqslant 2$. Предположим противное, т. е. $\rho(z, v) = 1$ для некоторых вершин $z \in Z'$, $v \in V_2$. Поскольку $\rho(z, I) \geqslant 3$ и $\rho(v, I) \leqslant 2$, имеем $\rho(v, I) = 2$. А так как $\rho(v, S \cup X) \geqslant 2$, вершина v должна покрываться множеством Y, т. е. найдется $y' \in Y \cap N(v)$. В свою очередь, для z найдется $y \in Y \cap N(z)$. Поскольку через вершины из связок не проходят 3-циклы, то $y \neq y'$. Но это противоречит изолированности связок, которым принадлежат y и y'.

Поскольку $|V(G)| > 6$, $|\widetilde{N}(s_i)| = 6$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ и граф G связен, для каждой изолированной связки s_i существует такая вершина $v_i \in N(s_i)$, что $\rho(v_i, I) \leqslant 2$. Из-за выбора обозначений x_i и y_i можно считать, что $v_i = z_i^1$. Отсюда следуют неравенства

$$|Z' \cap \{z_i^1, z_i^2\}| \leqslant 1 \quad (i = 1, \ldots, m),$$

из которых получаем $|Z'| \leqslant m$.

Теперь воспользуемся леммой 1. Заметим, что в графе $H = G(V_2)$ для любой вершины $v \in V_2$ выполняется неравенство $\rho_H(v, I) \leqslant 2$, так как $\{v \in V(G) \mid \rho_G(v, I) \leqslant 1\} \subseteq V_2$ в силу $\rho_G(I, X \cup S) \geqslant 3$. Следовательно, граф H и множество I удовлетворяют условиям леммы 1, согласно которой найдется максимальное независимое подмножество I^* множества V_2 с $|I^*| \leqslant 3|I|$.

Таким образом, получаем максимальное независимое подмножество $I^2 = I^* \cup X \cup Z'$ множества Q такое, что $|I^2| \leqslant 3k + 2m$.

Наконец, непосредственной проверкой убеждаемся, что для указанных множеств I^1 и I^2 выполняется неравенство (3), т. е.

$$\begin{aligned} 5\min\{|I^1|, |I^2|\} - 7|I \cup S^0| &\leqslant 5\min\{k + 3m, 3k + 2m\} - 7(k + 2m) \\ &= \min\{m - 2k, 4(2k - m)\} \leqslant 0. \end{aligned}$$

Теперь по лемме 4, примененной к $(2,3)$-множеству F', получаем независимое доминирующее множество F такое, что

$$|F \setminus (F' \setminus S)| \leqslant 4|S|/3.$$

В итоге имеем

$$|F| \leqslant |F \setminus (F' \setminus S)| + |F' \setminus S| \leqslant 4|S|/3 + 7|D \setminus S|/5 \leqslant 7|D|/5,$$

откуда окончательно получаем $\mathrm{id}(G) \leqslant 7\mathrm{d}(G)/5$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для любого связного кубического графа G, отличного от $K_{3,3}$, справедливо неравенство* $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G) \leqslant 4/3$.

Доказательство. Здесь можно повторить все рассуждения из доказательства теоремы 1 за одним, по существу, исключением: вместо неравенства (3) мы установим неравенство

$$3\min(|I^1|, |I^2|) \leqslant 4|I \cup S^0|, \tag{4}$$

из которого будет следовать утверждение теоремы. При этом в качестве $(2,3)$-множества D следует взять множество D^0 из доказательства леммы 2.

Нетрудно видеть, что неравенство (4) будет выполняться, если будет установлена оценка $|I^2| \leqslant 3k + m$. Такая оценка, очевидно, имеет место, если $Z' = \varnothing$.

Для того чтобы Z' было пустым, достаточно, чтобы при любом $i = 1, \ldots, m$ вершины z_i^1 и z_i^2 находились на расстоянии 2 от I. Допустим, что при некотором i последнее условие нарушается. В этом случае, в силу выбора обозначений x_i и y_i, найдется по крайней мере по одной вершине в $N(y_i) \setminus \{x_i\}$ и в $N(x_i) \setminus \{y_i\}$, расстояние от которых до I больше 2. Тогда степени этих вершин в графе $H = G(\widetilde{N}(s_i))$ будут равны 3. Поскольку $G \neq K_{3,3}$ и вершины x_i и y_i не входят в 3-циклы, граф H представляет собой граф $K_{3,3}$ с одним удаленным ребром. Если в D вершины x_i и y_i заменить вершинами, имеющими степень 2 в H (они не смежны между собой), то получим $(2,3)$-множество той же мощности, но с меньшим, чем в D, числом связок. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

§ 3. Графы с максимальной степенью 3. Примеры

В данном параграфе будут построены бесконечные серии

— связных графов $A \in \mathcal{H}_3$ с $\mathrm{id}(A)/\mathrm{d}(A) = 7/5$;

— 2-связных кубических графов B с $\mathrm{id}(B)/\mathrm{d}(B) \geqslant 5/4$;

— 3-связных кубических графов C с $\mathrm{id}(C)/\mathrm{d}(C) \geqslant 8/7$.

На рис. 1–3 (см. ниже) изображены графы, которые будут использоваться в качестве «блоков» при построении указанных серий графов.

Предварительно выясним некоторые свойства этих графов. При этом будет использоваться очевидное

Замечание 2. Если вершины v и w не смежны между собой и $N(v) = N(w)$, то любое независимое множество, покрывающее v и w, либо содержит обе эти вершины, либо не содержит ни одной из них.

Лемма 5. *Любое независимое множество $I \subseteq V(A_0)$ (см. рис. 1), покрывающее $V(A_0) \setminus \{v_0, w_0\}$, содержит не менее 7 элементов.*

Доказательство. Пусть I удовлетворяет условиям леммы. Поскольку имеют место соотношения

$$|I \cap \{v_3, v_4\}| \leqslant 1,$$

$$|I \cap \{w_3, w_4\}| \leqslant 1,$$

справедливы неравенства

$$|I \cap \{v_0, v_1 \ldots, v_6\}| \geqslant 3,$$

$$|I \cap \{w_0, w_1 \ldots, w_6\}| \geqslant 3.$$

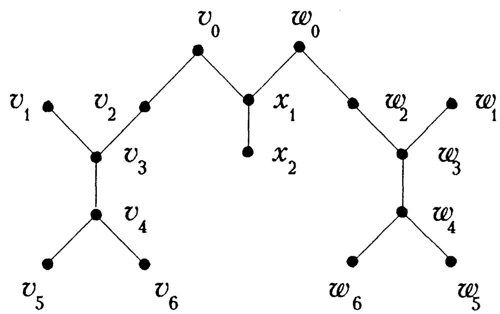

Рис. 1. Граф A_0

Кроме того, для того чтобы вершина x_2 была покрыта, должно быть выполнено неравенство $|I \cap \{x_1, x_2\}| \geqslant 1$. Следовательно, $|I| \geqslant 7$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Любое независимое множество $I \subseteq V(B_0)$ (см. рис. 2), покрывающее $V(B_0) \setminus \{v_0, w_0\}$, содержит не менее 5 элементов.*

Доказательство. Пусть I удовлетворяет условиям леммы. Учитывая замечание 2 и симметрию графа B_0, достаточно рассмотреть три случая.

Если $\{v_2, v_3, w_2, w_3\} \subseteq I$, то $|I \cap \{x_1, x_2\}| \geqslant 1$. Следовательно, $|I| \geqslant 5$.

Если $\{w_2, w_3\} \subseteq I$, $I \cap \{v_2, v_3\} = \varnothing$, то $|I \cap \{v_1, v_0\}| = |I \cap \{x_1, v_4\}| = |I \cap \{x_2, v_5\}| = 1$, так что $|I| \geqslant 5$.

Если $I \cap \{v_2, v_3, w_2, w_3\} = \varnothing$, то верна цепочка равенств

$$\begin{aligned} &|I \cap \{v_1, v_0\}| = |I \cap \{x_1, v_4\}| \\ &= |I \cap \{x_2, v_5\}| = |I \cap \{w_1, w_0\}| \\ &= |I \cap \{x_1, w_4\}| = |I \cap \{x_2, w_5\}| = 1. \end{aligned}$$

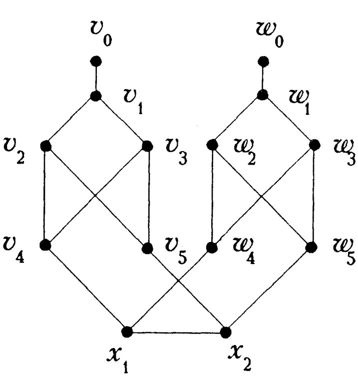

Рис. 2. Граф B_0

Учитывая, что $|I \cap \{x_1, x_2\}| \leqslant 1$, снова получаем $|I| \geqslant 5$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Любое независимое множество $I \subseteq V(C_0)$ (см. рис. 3), покрывающее $V(C_0) \setminus \{v_0, w_0, x_0\}$, содержит не менее 8 элементов.*

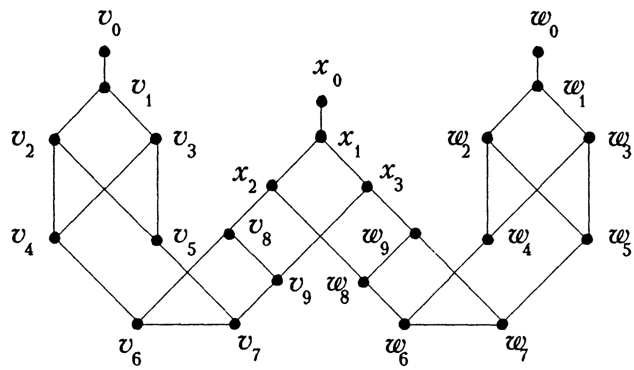

Рис. 3. Граф C_0

Доказательство. Пусть I удовлетворяет условиям леммы,

$$I_1 = I \cap \{v_0, v_1 \dots, v_7\}, \quad I_2 = I \cap \{w_0, w_1 \dots, w_7\}.$$

Покажем, что $|I_1| \geqslant 3$. Согласно замечанию 2 достаточно рассмотреть два случая.

Случай 1: $\{v_2, v_3\} \subseteq I$. Тогда $|I \cap \{v_6, v_7\}| = 1$, поскольку $I \cap \{v_4, v_5\} = \varnothing$ и $|I \cap \{v_8, v_9\}| \leqslant 1$.

Случай 2: $I \cap \{v_2, v_3\} = \varnothing$. Тогда верна цепочка равенств

$$|I \cap \{v_1, v_0\}| = |I \cap \{v_6, v_4\}| = |I \cap \{v_7, v_5\}| = 1.$$

Таким образом, в обоих случаях $|I_1| \geqslant 3$. Аналогично убеждаемся, что верно неравенство $|I_2| \geqslant 3$.

Нетрудно видеть, что из семи вершин x_1, x_2, x_3, v_8, v_9, w_8, w_9 не более двух вершин покрыто множеством $I_1 \cup I_2$. Следовательно, не менее пяти вершин должно быть покрыто множеством $I \setminus (I_1 \cup I_2)$, так что $|I \setminus (I_1 \cup I_2)| \geqslant 2$ и $|I| \geqslant 8$. Лемма 7 доказана.

Теперь опишем графы, составляющие серии (a), (b) и (c).

Серия (a). Эту серию образуют графы A_n, $n \geqslant 1$, такие, что A_n состоит из n копий $A_0^1, \dots, A_0^n$ графа A_0, изображенного на рис. 1; и при $j = 1, \dots, n-1$ вершины w_0^j и v_0^{j+1} соединены ребром. Понятно, что A_n — связный граф из $\mathcal{H}_3$. По лемме 5 имеем $\mathrm{id}(A_n) \geqslant 7n$. С другой стороны, множество $\bigcup\limits_{j=1}^{n} \{x_1^j, v_3^j, v_4^j, w_3^j, w_4^j\}$ является доминирующим в A_n. Следовательно, $\mathrm{id}(A_n)/\mathrm{d}(A_n) \geqslant 7/5$.

СЕРИЯ (b). Эту серию образуют графы B_n, $n \geqslant 2$, такие, что B_n состоит из n копий $B_0^1, \dots, B_0^n$ графа B_0, изображенного на рис. 2, и из $3n$ ребер, соединяющих вершины

$$w_0^j, v_0^j \quad (j = 1, \dots, n)$$

так, как показано на рис. 4. По лемме 6 имеем $\mathrm{id}(B_n) \geqslant 5n$. В то же время множество

$$\bigcup_{j=1}^{n} \{x_1^j, x_2^j, v_1^j, w_1^j\}$$

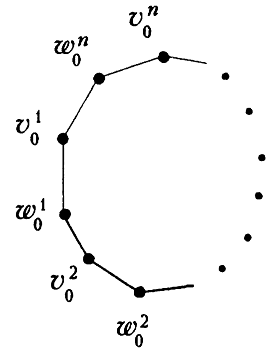

Рис. 4

является доминирующим в B_n. Следовательно, $\mathrm{id}(B_n)/\mathrm{d}(B_n) \geqslant 5/4$.

СЕРИЯ (c). Эту серию образуют графы C_n, $n \geqslant 1$, такие, что C_n состоит из n копий $C_0^1, \dots, C_0^n$ графа C_0, изображенного на рис. 3, и из $2n$ ребер, соединяющих вершины

$$w_0^j, v_0^j, x_0^j \quad (j = 1, \dots, n)$$

так, как показано на рис. 5. По лемме 7 имеем $\mathrm{id}(C_n) \geqslant 8n$. В то же время множество

$$\bigcup_{j=1}^{n} \{x_1^j, v_1^j, v_6^j, v_7^j, w_1^j, w_6^j, w_7^j\}$$

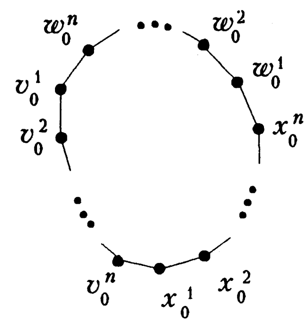

Рис. 5

является доминирующим в C_n. Следовательно, $\mathrm{id}(C_n)/\mathrm{d}(C_n) \geqslant 8/7$.

§ 4. Графы с большой максимальной степенью

В данном параграфе устанавливаются верхние оценки отношения $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G)$ для графов с максимальной степенью вершин, бо́льшей 3. Приводятся также примеры, демонстрирующие близость полученных оценок к оптимальным. В заключение дается точная верхняя оценка величины $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G)$ через число вершин графа.

Теорема 3. *Если* $G \in \mathcal{H}_k$, *то* $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G) \leqslant k + 2 - 2\sqrt{k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D — доминирующее множество в G и $|D| = \mathrm{d}(G)$. Положим $Q_0 = \varnothing$ и для $i = 1, 2, \dots$ определим Q_i как

некоторое максимальное независимое подмножество в $D \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} Q_j$. Тогда по построению будем иметь

$$|Q_1| \geqslant |Q_2| \geqslant \ldots, \tag{5}$$

$$N(x) \cap Q_j \neq \varnothing \quad \text{для всех} \quad x \in Q_i \quad \text{при} \quad j < i. \tag{6}$$

Пусть $s+1$ — последний индекс, для которого $Q_{s+1} \neq \varnothing$. В силу (6) имеем $s \leqslant k$. Используя полученное разбиение множества D, построим независимое доминирующее множество F по правилам:

- $F_{s+2} := D$;
- $F_j := (F_{j+1} \setminus Q_j) \cup I_j$ $(j = s+1, s, \ldots, 2)$, где I_j — некоторое максимальное независимое подмножество множества $\{v \in V(G) \mid \rho(v, F_{j+1} \setminus Q_j) \geqslant 2\}$;
- $F := F_2$.

Ввиду (6) имеем

$$\begin{aligned} |F| &= |I_{s+1}| + \ldots + |I_2| + |Q_1| \\ &\leqslant (k-s)|Q_{s+1}| + [(k-s+1)|Q_s| - |Q_{s+1}|] + \ldots + [(k-1)|Q_2| \\ &\qquad - |Q_3| - \ldots - |Q_{s+1}|] + |Q_1| \\ &= (k-2s+1)|Q_{s+1}| + (k-2s+3)|Q_s| + \ldots + (k-1)|Q_2| + |Q_1|. \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом неравенства (5) получение верхней оценки для $\mathrm{id}(G)$ свелось к нахождению максимума линейной функции

$$f(x) = x_1 + \sum_{i=1}^{s} (k-2i+1)x_{i+1}$$

на множестве $P \subset \mathbb{R}^{s+1}$, заданном линейными ограничениями

$$\sum_{i=1}^{s+1} x_i = \mathrm{d}(G), \quad x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{s+1} \geqslant 0.$$

Вершинами многогранника P являются точки $\mathbf{x}^t = (x_1^t, \ldots, x_{s+1}^t)$, $t = 1, \ldots, s+1$, где $x_i^t = \mathrm{d}(G)/t$ при $i = 1, \ldots, t$ и $x_i^t = 0$ при $i > t$. Поскольку $f(\mathbf{x}^t) = (k+2-t-k/t)\mathrm{d}(G) \leqslant (k+2-2\sqrt{k})\mathrm{d}(G)$, а максимум $f(x)$ на P достигается в вершине, окончательно имеем

$$\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G) \leqslant |F|/\mathrm{d}(G) \leqslant k+2-2\sqrt{k}.$$

Теорема 3 доказана.

Пример 1. Пусть $\sqrt{k}$ — целое число, $G = (V, E)$ — связный граф такой, что

$V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $|V_1| = \sqrt{k}$, $|V_2| = \sqrt{k}(k + 1 - \sqrt{k})$;

$G(V_1)$ — полный граф;

$\deg(v) = k \quad \forall v \in V_1$;

$\deg(v) = 1 \quad \forall v \in V_2$.

Тогда $\mathrm{d}(G) = \sqrt{k}$ и $\mathrm{id}(G) = 1 + (\sqrt{k} - 1)(k + 1 - \sqrt{k}) = (k + 2 - 2\sqrt{k})\sqrt{k}$.

Пример 2. Для построения графа H_n берем n копий графа G из примера 1 и в каждой копии G_i выбираем по одной висячей вершине v_i. Затем добавляем n ребер, соединяющих вершины $v_1, \ldots, v_n$ в цикл. Тогда $\mathrm{d}(H_n) = n\sqrt{k}$,

$$\mathrm{id}(H_n) \geqslant n\sqrt{k}(k + 2 - 2\sqrt{k}) - 2n/3 = \mathrm{d}(H_n)((k + 2 - 2\sqrt{k} - 2/3\sqrt{k}).$$

Теорема 4. *Если G — k-однородный граф, то* $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G) \leqslant k/2$.

Доказательство. Пусть $n = |V(G)|$, D — доминирующее множество в G и $|D| = d = \mathrm{d}(G)$. Заметим, что любое независимое множество в G мощности m инцидентно km ребрам. Отсюда с учетом равенства $|E(G)| = kn/2$ получаем $\mathrm{id}(G) \leqslant n/2$. Таким образом, если $dk \geqslant n$, то для G утверждение теоремы справедливо.

Пусть $kd < n$. Так как $|N(D)| = n - d$, то число ребер в подграфе $G(D)$ не превосходит $(kd - (n - d))/2$. Поэтому мощность наибольшего независимого подмножества I множества D не меньше $d - (kd - (n - d))/2$ и, следовательно, больше $d/2$.

Пусть J — наибольшее независимое подмножество множества $Q = \{v \in V(G) \mid \rho(v, I) \geqslant 2\}$. Понятно, что $I \cup J$ — независимое доминирующее множество в G и $\mathrm{id}(G) \leqslant |I \cup J|$. С другой стороны,

$$|J| \leqslant |Q| \leqslant |N(D \setminus I) \setminus I| \leqslant (k - 1)|D \setminus I|.$$

Таким образом,

$$|I \cup J| \leqslant (k - 1)d - (k - 2)|I| < d(k - 1 - (k - 2)/2) = kd/2.$$

Теорема 4 доказана.

Пример 3. Для графа G, состоящего из m копий графа $K_{k,k}$, имеем $\mathrm{d}(G) = 2m$, $\mathrm{id}(G) = km = \frac{k}{2}\mathrm{d}(G)$.

Пример 4. Пусть k — четное число, $p = k/2$, $H = K_{k,k-1}$, $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ — бóльшая доля и B — меньшая доля в H. Обозначим через R_n граф такой, что

1) $V(R_n) = V_1 \cup \ldots \cup V_n$, где $V_i = \{v_{i,1}, \ldots, v_{i,k}\}$, $i = 1, \ldots, n$;

2) $R_n(\{v_{i,1},\dots,v_{i,p}\}) = K_p$, $R_n(\{v_{i,p+1},\dots,v_{i,k}\}) = K_p$, $i = 1,\dots,n$;
3) $(v_{i,j}, v_{i+1,j+1}) \in E(R_n)$ при любых i, j $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant k)$ (первый индекс рассматривается по модулю n, второй — по модулю k);
4) других ребер в R_n нет.

Легко видеть, что R_n является $(1+p)$-однородным графом. Для построения интересующего нас графа G_n возьмем $n(p-1)$ копий $H(i,j)$ графа H и один граф R_n. Затем для каждой тройки (i,j,l), где $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p-1$, $1 \leqslant l \leqslant k$, вершину $a_l(i,j)$ соединим ребром с вершиной $v_{i,l}$. Полученный в результате граф G_n является k-однородным и k-связным.

Пусть $b(i,j)$ — некоторая вершина из меньшей доли $B(i,j)$ графа $H(i,j)$. Определим множество

$$M = \bigcup_{i=1}^{n}\left(\bigcup_{j=1}^{p-1}\{a_j(i,j), b(i,j)\} \cup \{v_{i,p+1}\}\right).$$

Очевидно, что$|M| = n(2(p-1)+1) = n(k-1)$.

Убедимся, что M — доминирующее множество. При любых $i \leqslant p-1$ и $j \leqslant p-1$ вершина $v_{i,j}$ и множество $A(i,j) \cup B(i,j)$ покрыты множеством $\{a_j(i,j), b(i,j)\}$, вершина $v_{i,p}$ покрыта вершиной $v_{i+1,p+1}$, а вершины $v_{i,p+1},\dots,v_{i,k}$ покрывает вершина $v_{i,p+1}$. Следовательно, $\mathrm{d}(G_n) \leqslant n(k-1)$.

Пусть X — произвольное независимое доминирующее множество в G_n. Для любой пары (i,j) либо $B(i,j) \subset X$, либо $B(i,j) \cap X = \varnothing$. В первом случае $|B(i,j) \cap X| = k-1$. Во втором случае лишь две вершины из $A(i,j)$ могут быть покрыты извне (по свойству (2) графа R_n). Значит, в этом случае $|A(i,j) \cap X| \geqslant k-2$. Таким образом,

$$\mathrm{id}(G_n) \geqslant n(k-2)(p-1),$$
$$\frac{\mathrm{id}(G_n)}{\mathrm{d}(G_n)} \geqslant \frac{(k-2)^2 n}{2(k-1)n} \geqslant \frac{k-3}{2}.$$

Пусть $\varphi(n) = \max\{\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G) : |V(G)| = n\}$. Легко проверить равенства $\varphi(1) = \varphi(2) = \varphi(3) = 1$.

Теорема 5. *Если* $n \geqslant 4$, то

$$\varphi(n) = \frac{1}{2}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor.$$

Доказательство. Пример полного двудольного графа $K_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor,\lceil\frac{n}{2}\rceil}$ показывает, что $\varphi(n) \geqslant \frac{1}{2}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ при любом $n \geqslant 4$.

Допустим, что $\mathrm{id}(G)/\mathrm{d}(G) > \frac{1}{2}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ для некоторого графа G с числом вершин $n \geqslant 4$. Выберем в G доминирующее множество $D = \{v_1, \ldots, v_d\}$ с $d = \mathrm{d}(G)$. Поскольку $\mathrm{id}(G) > \frac{d}{2}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \geqslant d$, множество D не является независимым. Следовательно,

$$\deg(v_1) + \ldots + \deg(v_d) \geqslant n - d + 2. \tag{7}$$

Используя очевидное неравенство

$$\mathrm{id}(G) \leqslant n - \deg(v), \tag{8}$$

справедливое при любом $v \in V(G)$, и неравенство (7), получаем

$$\mathrm{id}(G) \leqslant n - \left\lceil\frac{n-d+2}{d}\right\rceil.$$

Так как при $d \neq 3$ и $n \geqslant 4$, а также при $d = 3$, $n \geqslant 4$, $n \neq 7$ справедливо неравенство

$$n - \left\lceil\frac{n-d+2}{d}\right\rceil \leqslant \frac{d}{2}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,$$

ввиду выбора G имеем $d = 3$, $n = 7$, $\mathrm{id}(G) = 5$. В таком случае в силу (8) должно выполняться неравенство $\deg(v) \leqslant 2$ для всех $v \in V(G)$. Но тогда согласно [1] $\mathrm{id}(G) = \mathrm{d}(G)$ (это равенство следует также из леммы 2), что противоречит выбору G. Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Allan R. B., Laskar R.** On domination and independent domination numbers of a graph // Discrete Math. 1978. V. 23. P. 73–76.
2. **Barefoot C., Harary F., Jones K. F.** What is the difference between domination and independent domination numbers of a cubic graph? // Graphs Combin. 1991. V. 7, N 2. P. 205–208.
3. **Kostochka A. V.** The independent domination number of a cubic 3-connected graph can be much larger than its domination number // Graphs Combin. 1993. V. 9, N 3. P. 235–237.

Адрес авторов:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики СО РАН

Статья поступила

22 августа 1994 г.