СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь – декабрь 1994. Том 1, № 4, 22–32

УДК 519.95

ПРОЕКЦИИ ГИПЕРКУБА НА ПРЯМУЮ И ПЛОСКОСТЬ*)

А. А. Левин

Исследуются различные линейные и плоские изображения n-мерного единичного куба E^n, получающиеся при проектировании (т. е. линейном отображении) всех его вершин на прямую или на плоскость. Различными считаются только те изображения, в которых проекции вершин из E^n имеют различную упорядоченность на осях координат. Такие изображения E^n на прямой и на плоскости называются линейным и плоским порядком соответственно. Порядки, порожденные обратимыми проекциями, называются полными. Плоские порядки, в которых все вершины из E^n с одинаковым количеством единиц имеют одинаковую проекцию на одну ось, называются слоистыми. Показано, что число полных линейных порядков и число полных слоистых порядков не меньше $3^{n(n-o(n))/2}$ и не больше $3^{n(n-o(n))}$. Приведены точные значения для числа линейных порядков при $n \leqslant 4$ и слоистых порядков при $n \leqslant 7$.

При конструировании ряда современных многопроцессорных ЭВМ используется организация процессоров в структуру гиперкуба [1], когда процессорам сопоставляются вершины, а связям между ними — ребра гиперкуба. В то же время любая реализация такой системы размещается в трехмерном пространстве или на плоскости, т. е. в подпространстве меньшей размерности.

При изучении гиперпространства исследователь оперирует трехмерными или двумерными его изображениями [2], а для передачи изображений использует двумерные картины.

Ниже мы исследуем изображения гиперкуба, полученные проекцией (т. е. линейным отображением) его вершин на прямую или на плоскость. Упорядоченность действительных чисел, являющихся значениями проекций вершин гиперкуба на прямую, индуцирует линейный порядок на множестве вершин гиперкуба.

Пусть на плоскости выбрана некоторая ортогональная система координат с осями X и Y. В проекции гиперкуба на эту плоскость каждой вершине гиперкуба соответствует пара действительных чисел, являющихся координатами проекций вершины на оси X и Y. Проекции

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-1484).

на оси координат индуцируют пару линейных порядков на исходном множестве вершин. Такую упорядоченную пару порядков мы назовем *плоским порядком.* Плоский порядок называем *слоистым*, когда все вершины с одинаковым количеством единиц имеют одну и ту же проекцию на ось Y.

В данной работе исследуется задача о нахождении числа различных линейных и слоистых порядков, полученных проекцией вершин n-мерного гиперкуба на числовую прямую и на плоскость.

При $n \geqslant 5$ получены следующие оценки числа линейных порядков $NL(n)$:

$$c3^{n(n-1)/2} \leqslant NL(n) \leqslant (3^n 2)^n/n!, \quad c = 512/81.$$

Для числа слоистых порядков $NP(n)$ при $n \geqslant 7$ получены оценки

$$c3^{n(n-1)/2}/n! \leqslant NL(n) \leqslant (3^n 2)^n/n!, \quad c = 200(2/3)^7.$$

В таблице (см. ниже) приводятся точные значения числа линейных порядков $NL(n)$ и слоистых порядков $NP(n)$ при малых значениях n.

Полученные оценки показывают, что число различных (по упорядоченности вершин) проекций гиперкуба на прямую и на плоскость растет очень быстро с ростом n, но существенно медленнее, чем число произвольных расположений вершин. Действительно, все приведенные оценки имеют вид $\exp(cn^2)$, где $\ln(3)/2 < c < \ln(3)$, в то время как число произвольных размещений есть $\exp(an2^n)$.

1. Основные понятия. *Гиперкубом* E^n (*n-мерным единичным кубом* E^n) называется множество всех двоичных векторов длины n, т. е.

$$E^n = \{\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \{0, 1\}\}.$$

Подкубы гиперкуба E^n с фиксированным значением n-й координаты будем обозначать так:

$$E^{n,0} = \{\mathbf{a} \mid a_n = 0\}, \quad E^{n,1} = \{\mathbf{a} \mid a_n = 1\}.$$

Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — произвольные векторы из E^n, то их разность

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n)$$

является вектором с координатами из множества $\{-1, 0, 1\}$.

Пусть $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ — вектор с вещественными координатами, $\mathbf{a}$ — произвольный вектор из E^n. Линейное отображение W вершин E^n в множество действительных чисел вида

$$W(\mathbf{a}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i$$

называется *проекцией* W *гиперкуба* E^n *на прямую*, вектор $\mathbf{w}$ — *весовым вектором*, а число $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}$ — *весом вершины* $\mathbf{a}$.

При проектировании W гиперкуба E^n на прямую множество значений проекций вершин упорядочено как подмножество действительных чисел. Числовой порядок проекций вершин индуцирует линейный порядок LW на множестве вершин из E^n.

Линейный порядок LW назовем *полным*, если в нем различаются проекции различных вершины из E^n, и *частичным* в противном случае.

2. Свойства линейных порядков. Каждый линейный порядок L может порождаться различными весовыми векторами. В частности, для каждого L всегда существует целочисленный весовой вектор.

Лемма 1. *Пусть LU — полный линейный порядок в E^n с порождающим его целочисленным вектором весов $\mathbf{u}$. Тогда существует вектор весов $\mathbf{w}$ такой, что порождаемый им линейный порядок LW совпадает с порядком LU, а разности весов векторов в проекции W принимают 3^n различных значений.*

Доказательство. Определим вспомогательный весовой вектор

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n); \quad v_i = 3^{i-1}, \ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Легко проверить, что для любых векторов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ при всех k, $1 \leqslant k \leqslant n$, выполняется неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{k} v_i(a_i - b_i)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} 3^{i-1} = (3^k - 1)/2.$$

Зададим линейный порядок LW весовым вектором $\mathbf{w} = 3^n\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Тогда разности весов любых вершин $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в проекции W определяет выражение

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 3^n \mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}). \tag{1}$$

Если вершины $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ различны, то в (1) первое слагаемое не равно нулю (ввиду полноты порядка LU). Второе слагаемое не влияет на знак выражения, так как $|3^n \mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})| \geqslant 3^n$, а $|\mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})| \leqslant (3^n - 1)/2$. Значит, знак суммы в (1) совпадает со знаком первого слагаемого, которое и определяет порядок вершин $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в проекциях U и W. Следовательно, упорядоченность вершин в проекции W совпадает с их упорядоченностью в проекции U.

Покажем, что если разности $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}-\mathbf{d}$ различны, то в проекции W они имеют различные веса.

Возможны следующие случаи.

Случай 1: в проекции U веса разностей $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}-\mathbf{d}$ различны. Тогда

$$\begin{gathered}|\mathbf{w}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})-\mathbf{w}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{d})| = |3^n\mathbf{u}\cdot((\mathbf{a}-\mathbf{b})-(\mathbf{c}-\mathbf{d})) \\ +\mathbf{v}\cdot((\mathbf{a}-\mathbf{b})-(\mathbf{c}-\mathbf{d}))| \geqslant |3^n\mathbf{u}\cdot((\mathbf{a}-\mathbf{b})-(\mathbf{c}-\mathbf{d}))| \\ -|\mathbf{v}\cdot((\mathbf{a}-\mathbf{b})-(\mathbf{c}-\mathbf{d}))| \geqslant 3^n-2(3^n-1)/2=1.\end{gathered}$$

Это значит, что в проекции W их веса также различны.

Случай 2: в проекции U веса разностей $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}-\mathbf{d}$ совпадают. Пусть k — максимальный номер компоненты, в которой различаются разности $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}-\mathbf{d}$. Тогда

$$\begin{gathered}|\mathbf{w}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})-\mathbf{w}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{d})| = |3^n\mathbf{u}\cdot((\mathbf{a}-\mathbf{b})-(\mathbf{c}-\mathbf{d})) \\ +\mathbf{v}\cdot((\mathbf{a}-\mathbf{b})-(\mathbf{c}-\mathbf{d}))| = \left|\sum_{i=1}^{n} v_i((a_i-b_i)-(c_i-d_i))\right| \\ = \left|\sum_{i=1}^{k} v_i((a_i-b_i)-(c_i-d_i))\right| \geqslant |v_k((a_k-b_k)-(c_k-d_k))| \\ -\left|\sum_{i=1}^{k-1} v_i((a_i-b_i)-(c_i-d_i))\right| \geqslant 3^{k-1}-2(3^{k-1}-1)/2=1.\end{gathered}$$

Значит, и в этом случае разности $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}-\mathbf{d}$ имеют различные веса в проекции W.

Существование 3^n различных разностей векторов, имеющих, как установлено выше, различные веса в проекции W, доказывает, что разности весов вершин в проекции W принимают 3^n значений. Лемма 1 доказана.

3. Нижние оценки числа линейных порядков. Обозначим через $NL(n)$ число полных линейных порядков в E^n.

Теорема 1. *При любом $n \geqslant 4$ выполняется неравенство*

$$NL(n) \geqslant c3^{n(n-1)/2}, \qquad c = 512/81. \tag{2}$$

Доказательство. При малых значениях n количество линейных порядков указано в таблице (см. ниже), где $NL(4) = 4608 = c3^{4\cdot 3/2}$.

Допустим, что $n > 4$ и неравенство (2) выполняется в E^{n-1}, т. е.

$$NL(n-1) \geqslant c3^{(n-1)(n-2)/2}.$$

Пусть LV — произвольный полный линейный порядок на E^{n-1} с целочисленным весовым вектором $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$, который обеспечивает 3^{n-1} различных значений весов разностей векторов (существование такого вектора следует из леммы 1).

По вектору весов $\mathbf{v}$ и разности $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ в E^{n-1} построим вектор весов $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ для проекции гиперкуба E^n, положив

$$w_i = 2v_i, \text{ если } 1 \leqslant i \leqslant n-1; \quad w_n = 2\mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + 1.$$

Покажем, что вектор $\mathbf{w}$ порождает полный линейный порядок в E^n. Действительно, внутри каждого подкуба $E^{n,0}$ и $E^{n,1}$ вершины имеют порядок, порожденный вектором $2\mathbf{v}$. Этот порядок совпадает с порядком LV вершин в гиперкубе E^{n-1}. Равенство весов вершин из разных подкубов невозможно ввиду различия четности этих весов. Следовательно, из каждого полного порядка LV получаются полные линейные порядки LW.

Выясним, сколько разных порядков LW в E^n получается из одного порядка LV в E^{n-1} при выборе разных значений w_n.

Пусть $x = 2\mathbf{w} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ для некоторой пары вершин $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из E^{n-1}. Полагая $w_n = x$, получаем

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{b}, 1) = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} + x = 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{a}, 0),$$

т. е. веса вершин $(\mathbf{b}, 1)$ и $(\mathbf{a}, 0)$ из E^n совпадают. При $w_n < x$ имеем $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{b}, 1) < \mathbf{w} \cdot (\mathbf{a}, 0)$, а при $w_n > x$ порядок проекций этих вершин изменится на противоположный.

Значения весов разностей векторов из E^{n-1} разбивают числовую ось на $3^{n-1} + 1$ интервалов. Выбор разных значений коэффициента w_n внутри одного такого интервала дает один и тот же линейный порядок, а значения коэффициента w_n, принадлежащие различным интервалам, определяют различные линейные порядки. Значит, если при фиксированном векторе $\mathbf{v}$ возьмем по одному значению w_n из каждого интервала, то получим $3^{n-1} + 1$ различных линейных порядков LW в E^n. Следовательно,

$$NL(n) \geqslant NL(n-1)3^{n-1} \geqslant c3^{n(n-1)/2}.$$

Теорема 1 доказана.

4. Плоские порядки. При линейном отображении вершин из E^n на плоскость вершины гиперкуба проектируются и на оси координат, т. е. каждой вершине гиперкуба сопоставляется пара действительных чисел, являющихся проекциями этой вершины на оси X и Y.

Пусть W^x и W^y — две проекции гиперкуба E^n на оси X и Y с весовыми векторами $\mathbf{w}^x = (w_1^x, w_2^x, \ldots, w_n^x)$ и $\mathbf{w}^y = (w_1^y, w_2^y, \ldots, w_n^y)$ соответственно.

Проекцией гиперкуба E^n на плоскость (*плоской проекцией*) называется линейное отображение $W = (W^x, W^y)$ множества всех вершин $\mathbf{a}$ из E^n в множество точек плоскости такое, что

$$W(a) = (W^x(\mathbf{a}), W^y(\mathbf{a})) = (\mathbf{w}^x \cdot \mathbf{a}, \mathbf{w}^y \cdot \mathbf{a}).$$

Проекции W^x и W^y вершин гиперкуба E^n на оси координат X и Y индуцируют два линейных порядка LW^x и LW^y на множестве вершин из E^n.

Упорядоченную пару частичных линейных порядков, порожденных произвольной проекцией W гиперкуба E^n на плоскость, назовем *плоским порядком* и обозначим $PW = (LW^x, LW^y)$. Как и в одномерном случае, легко показать, что для любого плоского порядка все w_i^x и w_i^y можно взять целыми числами.

Плоский порядок $PW = (LW^x, LW^y)$ называем *полным плоским порядком*, если проекции любых двух различных вершин $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из E^n различны хотя бы в одном из линейных порядков LW^x и LW^y.

Множество вершин гиперкуба E^n, имеющих m единичных координат каждая, будем называть *m-м слоем* и обозначать через E^n_m. Если p или q не целые, то $E^p_q = E^i_j$ при $i = \lfloor p \rfloor$ и $j = \lfloor q \rfloor$.

Слоистым порядком называется плоский порядок $PW = (LW^x, LW^y)$ такой, что вершины из E^n различаются в линейном порядке LW^y тогда и только тогда, когда они имеют разное количество единиц. Это значит, что все вершины из m-го слоя E^n_m имеют одинаковую проекцию на оси Y, $0 \leqslant m \leqslant n$.

Очевидно, что плоский порядок является слоистым, если $w_i^y = q > 0$ при всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Следовательно, слоистый порядок, как и любой линейный порядок на E^n, определяется одним вектором весов, который определяет линейный порядок внутри каждого слоя.

Убедимся в том, что линейный порядок на слое $E^n_{n/2}$ однозначно определяет линейный порядок на всех остальных слоях, т. е. слоистые порядки различны тогда и только тогда, когда различны линейные порядки на среднем слое.

Действительно, допустим, что пара вершин $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ находится в E^n_k и $k \neq \lfloor n/2 \rfloor$. Тогда возможны два случая.

Случай 1: $k < \lfloor n/2 \rfloor$. Поскольку $n - 2k \geqslant \lfloor n/2 \rfloor - k$, можно выбрать $\lfloor n/2 \rfloor - k$ координат, в которых оба вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ содержат нули. Заменив эти нули единицами, получим векторы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$. Каждый из векторов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ содержит $\lfloor n/2 \rfloor$ единиц, а их разность и порядок совпадают с разностью и порядком векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Случай 2: $k > \lfloor n/2 \rfloor$. Так как суммарное число единиц в векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ превосходит n, их разность $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ и порядок совпадут с разностью и порядком пары векторов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ из слоя $s \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$.

5. Нижние оценки числа плоских порядков. Пусть $NP(n)$ обозначает число слоистых порядков в E^n.

Теорема 2. *При любом $n \geqslant 6$ выполняется неравенство*

$$NP(n) \geqslant q3^{n(n-1)/2}/n!, \quad q = 200(2/3)^7. \tag{3}$$

Доказательство. Как видно из таблицы (см. ниже),

$$NP(6) = 233280 \geqslant q3^{n(n-1)/2}/n!.$$

Пусть неравенство (3) доказано для $NP(n-1)$ и PV — некоторый слоистый порядок на E^{n-1}. Множество $E^n_{n/2}$ разобьем на два подмножества

$$M_0 = E^n_{n/2} \cap E^{n,0}, \quad M_1 = E^n_{n/2} \cap E^{n,1} \quad (E^n_{n/2} = M_0 \cup M_1).$$

При фиксированном порядке PV на E^{n-1} всевозможные слоистые порядки $PW(n)$ на E^n получаются путем размещения вершин множества M_1 среди вершин множества M_0. Для получения нижней оценки числа порядков $PW(n)$ построим некоторое подмножество таких размещений.

Для каждого слоистого порядка PV в E^{n-1} зафиксируем целочисленный вектор весов $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$, при котором веса всех разностей векторов в E^{n-1} различны (лемма 1). Выбирая разные значения w_n, будем получать различные порядки в E^n.

Пусть $\mathbf{a} \in E^{n-1}_{n/2}$ и $\mathbf{b} \in E^{n-1}_{n/2-1}$. Тогда $(\mathbf{a}, 0) \in M_0$, $(\mathbf{b}, 1) \in M_1$. По вектору весов $\mathbf{v}$ и разности $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ для проекции E^n построим вектор весов $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, положив

$$w_i = 2v_i, \text{ если } 1 \leqslant i \leqslant n-1; \quad w_n = 2\mathbf{v}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) + 1.$$

Вектор $\mathbf{w}$ порождает полный слоистый порядок в E^n, так как вершины внутри подкубов $E^{n,0}$ и $E^{n,1}$ по-прежнему имеют порядок PV, а равенство весов в одном слое для вершин из разных подкубов невозможно ввиду различия четности весов.

Выясним, сколько разных слоистых порядков PW в E^n получается из одного порядка PV в E^{n-1}. Пусть $x = 2\mathbf{v}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ для некоторой произвольной пары вершин $\mathbf{a} \in E^{n-1}_{n/2}$ и $\mathbf{b} \in E^{n-1}_{n/2-1}$, а $m(n)$ — количество различных разностей $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Положив $w_n = x$, получаем

$$\mathbf{w}\cdot(\mathbf{b}, 1) = 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{b} + x = 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{a}, 0),$$

т. е. проекции вершин $(\mathbf{b}, 1)$ и $(\mathbf{a}, 0)$ совпадают. При $w_n < x$ получим $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{b}, 1) < \mathbf{w} \cdot (\mathbf{a}, 0)$, а при $w_n > x$ порядок проекций этих вершин изменится на противоположный.

Следовательно, значения $x = 2\mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ разбивают ось X на $m(n)+1$ интервалов. Изменение значения коэффициента w_n внутри одного интервала не меняет линейного порядка на слое $E^n_{n/2}$, а значения коэффициента w_n, принадлежащие различным интервалам, определяют различные линейные порядки на $E^n_{n/2}$. Если при фиксированном векторе $\mathbf{v}$ взять по одному значению w_n из каждого интервала, то получим $m(n)$ различных слоистых порядков PW в E^n.

Поскольку $\mathbf{a} \in E^{n-1}_{n/2}$ и $\mathbf{b} \in E^{n-1}_{n/2-1}$, в разности $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ положительных единиц точно на одну больше, чем отрицательных. Количество таких разностей для векторов из E^{n-1} равно

$$m(n) = \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-1}{i} \binom{n-i-1}{i-1}.$$

Величина $m(n)$ для $n > 6$ оценивается выражением:

$$m(n) \geqslant 3^{n-1}/(n-1).$$

Вместе с тем, порядки PW, полученные из разных порядков PV, различаются упорядоченностью вершин в M_1. Следовательно,

$$\begin{aligned} NP(n) &\geqslant (m+1)NP(n-1) \geqslant 3^{n-1}/(n-1)NP(n-1) \\ &\geqslant q \cdot 3^{n-1}/(n-1)3^{(n-1)(n-2)/2}/(n-1)! \geqslant q \cdot 3^{n(n-1)/2}/n!. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

6. Верхние оценки количества порядков. Пусть на множестве вершин из E^n задан полный линейный порядок LW. Тогда для всех пар вершин $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из E^n, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, справедливо неравенство $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a} \neq \mathbf{w} \cdot \mathbf{b}$.

Обозначив через $\mathbf{a}$ вершину с бóльшим весом, из целочисленности весов получим неравенство $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \geqslant 1$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i \geqslant 1, \tag{4}$$

где $r_i \in \{-1, 0, 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Для каждого полного линейного порядка из всех 3^n возможных неравенств вида (4) выполнены точно $(3^n - 1)/2$ неравенств. Выполненные неравенства образуют единую систему неравенств, решениями

которой являются все векторы весовых коэффициентов, порождающие линейный порядок LW на E^n.

Дополнив систему неравенств для всех пар вершин условиями положительности переменных и условием минимизации их суммы, получаем следующую задачу линейного программирования.

Найти вектор $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, для которого выражение $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i$ достигает минимума при следующих ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i r_{i,1} \geqslant 1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} w_i r_{i,M} \geqslant 1, \ w_i \geqslant 1, \tag{5}$$

где $M = (3^n - 1)/2$ и $r_{i,m} \in \{-1, 0, 1\}$ при $1 \leqslant m \leqslant M$.

Если в (5) найдется хотя бы одна пара несовместных неравенств, то система не имеет решений. Если система (5) содержит неравенства вида (4), соответствующие только одному линейному порядку, то система имеет решение, определяющее именно этот порядок.

Известно [3], что если задача линейного программирования с n переменными имеет решение, то в (5) найдется n независимых неравенств, обращающихся в равенства на этом решении и образующих систему уравнений для нахождения этого решения. Следовательно, каждому линейному порядку U сопоставляется система из n линейных уравнений с n переменными

$$\sum_{i=1}^{n} w_i r_{i,m} = 1 \ \text{ при } 1 \leqslant m \leqslant n, \ r_{i,m} \in \{-1, 0, 1\}. \tag{6}$$

Линейный порядок (частичный или полный), задаваемый весовым вектором $\mathbf{w}$, называется *монотонным*, если все компоненты вектора $\mathbf{w}$ положительны.

Пусть $NL(n)$ — число полных линейных порядков, $NL^+(n)$ — число монотонных полных линейных порядков в E^n.

Теорема 3. *При любом $n > 1$ выполняется неравенство*

$$NL(n) \leqslant (3^n 2)^n / n!.$$

Доказательство. Решениями задачи (5) являются все весовые векторы для монотонного порядка. Из каждого монотонного порядка, произвольно расставляя знаки в весовом векторе, получаем 2^n различных линейных порядков.

Теперь оценим количество монотонных полных линейных порядков $NL^+(n)$ в E^n как количество различных систем (5).

В этом случае из полноты порядка следует, что среди выполненных неравенств вида (4), а значит, и в системе (5) содержатся неравенства $w_i \geqslant 1$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Кроме того, в (5) не могут содержаться неравенства $w_i \leqslant -1$ для любых i, $1 \leqslant i \leqslant n$, а также всевозможные их суммы. Число таких запрещенных неравенств равно $2^n - 1$. Таким образом, система неравенств (5) и система уравнений (6) выбираются из $M = (3^n - 1) - (2^n - 1) = 3^n - 2^n$ неравенств.

Количество различных систем (5) не превышает количества возможных систем уравнений (6), т. е.

$$NL^+(n) \leqslant \binom{M}{n} \leqslant (3^n - 2^n)^n/n! \leqslant 3^{n^2}/n!.$$

Следовательно,

$$NL(n) = NL^+(n)2^n \leqslant 3^{n^2}2^n/n! = (3^n 2)^n/n!.$$

Теорема 3 доказана.

Так как каждый слоистый порядок порождается некоторым линейным порядком на среднем слое гиперкуба, то число слоистых порядков не превышает числа линейных порядков.

7. Количество порядков при малых размерностях. Для небольших размерностей гиперкуба мы можем подсчитать непосредственно или с помощью ЭВМ все возможные варианты и получить точные значения количества порядков.

Таблица

n	$NL(n)$	$NP(n)$
1	$2 = 1 \cdot 2^1 \cdot 1!$	$1 = 1 \cdot 1!$
2	$8 = 1 \cdot 2^2 \cdot 2!$	$2 = 1 \cdot 2!$
3	$96 = 2 \cdot 2^3 \cdot 3!$	$6 = 1 \cdot 3!$
4	$4608 = 12 \cdot 2^4 \cdot 4!$	$48 = 2 \cdot 4!$
5	$> 377856 = 82 \cdot 2^5 \cdot 5!$	$1440 = 12 \cdot 5!$
6		$233280 = 324 \cdot 6!$
7		$266898240 = 26478 \cdot 7!$

В таблице приведены значения следующих величин:

$NL(n)$ — количество всех линейных порядков;

$NP(n)$ — количество всех слоистых порядков.

Мы не излагаем здесь правила вычисления точного количества порядков, так как это самостоятельная трудоемкая задача.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петров А. В.** Новые зарубежные высокопроизводительные ЭВМ // Вычислительная техника за рубежом в 1986–1987 гг. М.: ИТМ и ВТ АН СССР. 1987. С. 59–101.
2. **Дужин С. В., Рубцов В. Н.** Четырехмерный куб // Квант. 1986. № 6. С. 3–7.
3. **Еремин И. И., Астафьев Н. Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976.

Адрес автора:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики СО РАН

Статья поступила
23 февраля 1994 г.