СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь – декабрь 1994. Том 1, № 4, 53–63

УДК 519.854.3

О ТОЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ ЗАГРУЗКИ РАНЦА

Ю. В. Шамардин

В работе изучается параметрическое семейство алгоритмов, приближенно решающих задачу максимального заполнения ранца ограниченной вместимости предметами из заданного списка. Выясняются значения минимальных отношений весов приближенной и наилучшей загрузок, когда веса предметов не превосходят заданной доли от вместимости ранца.

1. Определения и обозначения

Пусть имеется ранец, в который можно поместить груз весом не более единицы, и даны предметы, занумерованные числами $1, 2, \dots, n$ и имеющие веса $w_1, w_2, \dots, w_n$. Обозначим через $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ произвольную совокупность предметов, через $W(S)$ их суммарный вес. Требуется найти такой набор предметов S^*, что

$$W(S^*) = \max_S W(S), \tag{1}$$

где максимум берется при ограничениях

$$W(S) \leqslant 1, \quad S \subset \{1, 2, \dots, n\}. \tag{2}$$

Через M обозначим множество векторов $(w_1, w_2, \dots, w_n)$, удовлетворяющих условиям

$$1 \geqslant w_1 \geqslant w_2 \geqslant \dots \geqslant w_n > 0, \quad n \geqslant 1,$$

а через $M(\alpha)$ — его подмножество с дополнительным ограничением $w_1 \leqslant \alpha$. Параметр α лежит в интервале $(0, 1]$, так что $M(\alpha) \subset M(1) = M$. Будем кратко писать «задача I», имея в виду задачу (1), (2) с весами предметов $I = (w_1, w_2, \dots, w_n)$. Пусть A — некоторый алгоритм приближенного решения задачи о ранце (1), (2). Обозначим через $S(A, I)$ совокупность предметов, помещаемых в ранец алгоритмом A в

задаче $I \in M$, и через $W(A, I)$ — их суммарный вес. Далее, обозначив через $W^*(I)$ вес максимальной загрузки, введем величины

$$h(A, I) = W(A, I)/W^*(I), \tag{3}$$

$$\eta(A, \alpha) = \inf\{h(A, I) \mid I \in M(\alpha)\}, \tag{4}$$

характеризующие точность алгоритма A на отдельной задаче I и на классе задач $M(\alpha)$.

В данной работе выясняются точные значения или находятся границы величины (4) относительно алгоритма B, предложенного в [1], и семейства алгоритмов C_m, $m = 1, 2, \ldots$, обобщающих B. В основе алгоритмов B и C_m лежит процедура $Z(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ последовательной загрузки предметов из множества $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Эта процедура включает следующие шаги.

1. Полагаем $S = \varnothing$, $v = 1$, $t = 1$; здесь S — формируемое решение, v — остаточная вместимость ранца, t — порядковый номер очередного предмета.

2. Если $w_{j_t} \leqslant v$, то полагаем $S = S \cup \{j_t\}$, $v = v - w_{j_t}$.

3. Если $t = r$, то вычисления заканчиваются. В противном случае полагаем $t = t + 1$ и повторяем шаг 2.

Алгоритм B решает задачу (1), (2), используя две процедуры загрузки

$$B_1 = Z(1, 2, \ldots, n), \quad B_2 = Z(n, n-1, \ldots, 1),$$

и выбирая лучший вариант из $S(B_1, I)$, $S(B_2, I)$, так что

$$W(B, I) = \max\{W(B_1, I), W(B_2, I)\}.$$

Опишем модификацию этого алгоритма. Пусть $L = \{i_1, \ldots, i_k\}$ — выборка предметов такая, что $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Алгоритм C_m, решая задачу (1), (2), использует процедуры загрузки вида

$$C(L) = Z(L \cup \{i_k + 1, i_k + 2, \ldots, n\})$$

и выбирает лучший вариант среди $S(C(L), I)$ по всем L с количеством элементов не более m, где целое число $m \geqslant 1$ — параметр алгоритма. Таким образом,

$$W(C_m, I) = \max\{W(C(L), I) \mid |L| \leqslant m\}.$$

Приведем простые неравенства, связывающие алгоритмы B_1, B и C_m. Очевидно, что

$$W(B_1, I) \leqslant W(B, I), \quad W(C_m, I) \leqslant W(C_{m+1}, I). \tag{5}$$

Процедура B_2 доставляет решение вида $S(B_2, I) = \{i, i+1, \ldots, n\}$, но это же решение находит процедура $C(i)$. Решения $S(B_1, I)$ и $S(C(1), I)$ также совпадают. Поэтому

$$W(B, I) \leqslant W(C_m, I). \tag{6}$$

Из (5), (6) вытекают аналогичные неравенства для характеристик точности (3), (4):

$$\begin{gathered} h(B_1, I) \leqslant h(B, I) \leqslant h(C_m, I) \leqslant h(C_{m+1}, I), \\ \eta(B_1, \alpha) \leqslant \eta(B, \alpha) \leqslant \eta(C_m, \alpha) \leqslant \eta(C_{m+1}, \alpha). \end{gathered} \tag{7}$$

2. Оценка точности алгоритмов B_1 и B

Везде далее через $\langle i, j\rangle$ будем обозначать набор предметов $\{i, i+1, \ldots, j\}$ и через $W(i, j)$ — их суммарный вес. Положим

$$\beta = 1/(t+1), \quad \gamma = 1/t.$$

Теорема 1. *Если $\alpha \in (\beta, \gamma]$ при некотором целом $t \geqslant 1$, то*

$$\eta(B_1, \alpha) = \eta(B, \alpha) = 1 - \beta.$$

Доказательство. Рассмотрим задачу $I = (w_1, w_2, \ldots, w_{t+3})$ с весами предметов $w_1 = \beta + \varepsilon$, $w_{t+3} = \varepsilon$ и $w_i = \beta$, если $i \in \langle 2, t+2\rangle$. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем $I \in M(\alpha)$. Применяя к задаче I процедуры B_1 и B_2, получаем решения

$$S(B_1, I) = \langle 1, t\rangle \cup \{t+3\}, \quad S(B_2, I) = \langle 3, t+3\rangle.$$

Поэтому

$$W_1 = W(B_1, I) = 1 - \beta + 2\varepsilon, \quad W_2 = W(B_2, I) = 1 - \beta + \varepsilon,$$

$$W(B, I) = \max\{W_1, W_2\} = 1 - \beta + 2\varepsilon.$$

Пользуясь этим фактом и соотношением $W^*(I) = W(2, t+2) = 1$, получаем

$$h(B, I) = 1 - \beta + 2\varepsilon.$$

В силу (7) и произвольной малости ε имеем

$$\eta(B_1, \alpha) \leqslant \eta(B, \alpha) \leqslant 1 - \beta.$$

Поскольку $M(\alpha) \subset M(\gamma)$, справедливо неравенство

$$\eta(B_1, \gamma) \leqslant \eta(B_1, \alpha).$$

Следовательно, для завершения доказательства теоремы достаточно проверить, что

$$\eta(B_1, \gamma) \geqslant 1 - \beta. \tag{8}$$

Допустим противное. Тогда для некоторой задачи $I \in M(\gamma)$ выполняется неравенство

$$W(B_1, I) \leqslant (1 - \beta) W^*(I). \tag{9}$$

В силу (9) алгоритм B_1 загружает не все предметы, иначе было бы найдено наилучшее решение, что противоречит (9). Поэтому найдется номер $i > 1$ такой, что

$$\langle 1, i-1 \rangle \subset S(B_1, I), \quad i \notin S(B_1, I).$$

Из последнего условия, неравенств (9) и $W^*(I) \leqslant 1$ получаем

$$w_i > 1 - W(B_1, I) \geqslant \beta.$$

Поскольку $I \in M(\gamma)$, имеем $i > t$, поэтому

$$W(B_1, I) \geqslant W(1, i-1) \geqslant t w_i > t\beta = 1 - \beta.$$

Следовательно,

$$W(B_1, I) > (1 - \beta) W^*(I), \tag{10}$$

что противоречит предположению (9). Таким образом для любой задачи $I \in M(\gamma)$ условие (9) не выполняется и справедливо (10), а значит, неравенство (8) верно. Теорема 1 доказана.

Из доказательства теоремы 1 следует, что $h(B_1, I) > \eta(B_1, \alpha)$ при всех $I \in M(\alpha)$, т. е. наихудшее значение точности $\eta(B_1, \alpha)$ алгоритма B_1 не достигается ни на одной задаче. То же верно и для алгоритма B.

3. Оценка точности алгоритмов C_m

Обоснование основного утверждения этого пункта — теоремы 2 — опирается на четыре леммы.

Лемма 1. *Пусть задача $I_n = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in M(\alpha)$ удовлетворяет условиям*

$$h(C_m, I_n) < 1, \quad w_n \leqslant 1 - W(C_m, I_n). \tag{11}$$

Тогда при некотором $j < n$ для задачи $I_j = (w_1, w_2, \dots, w_j) \in M(\alpha)$ справедливы неравенства

$$h(C_m, I_j) < h(C_m, I_n), \tag{12}$$

$$w_j > 1 - W(C_m, I_j). \tag{13}$$

Доказательство. Идея доказательства леммы 1 взята из [1]. На задачах I_n и I_{n-1} рассмотрим процедуру загрузки $C(L)$ при некоторой выборке $L \subset \langle 1, n-1 \rangle$ такой, что $|L| \leqslant m$. В силу условия (11) должно выполняться включение $n \in S(C(L), I_n)$, а из определения алгоритма $C(L)$ следует равенство

$$S(C(L), I_{n-1}) = S(C(L), I_n) \backslash \{n\}.$$

Отсюда получаем

$$W(C(L), I_{n-1}) = W(C(L), I_n) - w_n.$$

Поэтому

$$W(C_m, I_{n-1}) \leqslant W(C_m, I_n) - w_n. \tag{14}$$

Поскольку всегда верно неравенство

$$W^*(I_{n-1}) \geqslant W^*(I_n) - w_n, \tag{15}$$

то с учетом (14), (15) имеем

$$\begin{aligned} h(C_m, I_{n-1}) &= W(C_m, I_{n-1})/W^*(I_{n-1}) \\ &\leqslant (W(C_m, I_n) - w_n)/(W^*(I_n) - w_n) \\ &< W(C_m, I_n)/W^*(I_n) = h(C_m, I_n). \end{aligned}$$

Следовательно, (12) справедливо при $j = n - 1$. Если (13) не выполняется, повторяем редукционный шаг, переходя от задачи I_{n-1} к задаче I_{n-2} и т. д. Этот процесс должен завершиться выполнением неравенства (13) при некотором $j > 1$. В противном случае мы получили бы

$$h(C_m, I_1) < h(C_m, I_2) < \ldots < h(C_m, I_n) < 1,$$

что противоречит равенству $h(C_m, I_1) = 1$. Лемма 1 доказана.

Утверждение леммы 1 становится неверным, если в ее формулировке заменить алгоритм C_m на B. В этом причина ошибки, допущенной в статье [1], которая привела ее автора к ложному заключению $\eta(B, 1) = 2/3$. На самом деле по теореме 1 имеем $\eta(B, 1) = 1/2$.

Если для задачи $I \in M(\alpha)$ выполняется условие

$$h(C_m, I) < 1 \tag{16}$$

(а только такие задачи нас интересуют), то ее размерность n и количество компонент k наилучшего решения $S^* = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ удовлетворяют неравенствам

$$n \geqslant k+1, \quad k \geqslant \max\{m+2, \lfloor 1/\alpha \rfloor + 1\}. \tag{17}$$

Действительно, если хотя бы одно из них не выполняется, то, как нетрудно проверить, на выборке $L = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, $r = \min\{m, k\}$, имеем

$$h(C_m, I) = h(C(L), I) = 1,$$

что противоречит (16). Всюду далее неравенства (17) предполагаем выполненными.

Возьмем некоторую задачу $I \in M(\alpha)$ с наилучшим решением $S^* = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ и сформируем задачу J с набором предметов

$$S(J) = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \cup \langle i_m + 1, i_k \rangle.$$

В силу (17) имеем $k \geqslant m+2$, так что эта конструкция корректна. Очевидно, $J \in M(\alpha)$.

Лемма 2. *Рассмотренные выше задачи $I, J \in M(\alpha)$ связаны неравенством*

$$h(C_m, J) \leqslant h(C_m, I). \tag{18}$$

Доказательство. Переход от I к J сделаем в два шага. Сначала рассмотрим задачу J' с набором предметов

$$S(J') = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \cup \langle i_m + 1, n \rangle.$$

Возьмем произвольную выборку $L' = \{j_1, j_2, \dots, j_t\}$, $t \leqslant m$, из множества $S(J')$ и сформируем выборку $L \subset \langle 1, n \rangle$. Если $j_t \geqslant i_m$, то полагаем $L = L'$. При этом $|L| = t \leqslant m$. Если $j_t = i_r < i_m$, то полагаем $L = L' \cup \{i_{r+1}, i_{r+2}, \dots, i_m\}$, причем $|L| = t + m - r \leqslant m$. Нетрудно видеть, что

$$S(C(L'), J') = S(C(L), I), \quad W(C(L'), J') = W(C(L), I).$$

Поэтому $W(C_m, J') \leqslant W(C_m, I)$. Отсюда и из равенства $W^*(J') = W^*(I)$ следует, что

$$h(C_m, J') \leqslant h(C_m, I). \tag{19}$$

Теперь перейдем от задачи J' к задаче J. Пусть выборка L лежит в $S(J)$ и $|L| \leqslant m$. Из определения алгоритма $C(L)$ следует включение

$$S(C(L), J) \subset S(C(L), J').$$

Поэтому $W(C(L), J) \leqslant W(C(L), J')$ и $W(C_m, J) \leqslant W(C_m, J')$. Так как $W^*(J) = W^*(J')$, то

$$h(C_m, J) \leqslant h(C_m, J'). \tag{20}$$

Из (19), (20) следует (18). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть для задачи $I \in M(\alpha)$ при некотором $u \in (0,1)$ выполняются неравенства*

$$h(C_m, I) \leqslant 1 - u, \tag{21}$$

$$w_n > u, \tag{22}$$

$$2u(1 + \max\{m, \lfloor 1/\alpha \rfloor\}) \geqslant 1, \tag{23}$$

а ее наилучшее решение $S^* = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ удовлетворяет условиям $i_k = n$ и $i_j = j$ при $1 \leqslant j \leqslant m$. Тогда

$$W(C_m, I) > 1 - w_m + w_n. \tag{24}$$

Доказательство. Введем обозначения $L_j = \langle 1, m-1 \rangle \cup \{j\}$, $D_j = C(L_j)$, где $m \leqslant j \leqslant n$, и положим $p = \max\{m, \lfloor 1/\alpha \rfloor\}$. Для обоснования оценки (24) достаточно установить существование алгоритма D_r такого, что $W(D_r, I) > 1 - w_m + w_n$.

Сначала выясним, что решение $S(D_m, I)$, даваемое процедурой D_m, имеет вид

$$S(D_m, I) = \langle 1, q \rangle \tag{25}$$

при некотором q. Действительно, в противном случае имеются предметы i, j такие, что $i < j$, $i \notin S(D_m, I)$, $j \in S(D_m, I)$, причем $i > p$ ввиду включения $\langle 1, p \rangle \subset S(D_m, I)$. С учетом (21), (22) получаем

$$w_i > w_j + (1 - W(D_m, I)) > 2u.$$

Поэтому справедливы неравенства

$$W(C_m, I) \geqslant W(D_m, I) \geqslant W(1, p) + w_j \geqslant p w_i + w_j > (2p + 1)u.$$

В силу (23) имеем $(2p+1)u \geqslant 1 - u$. Следовательно, $W(C_m, I) > 1 - u$, что противоречит условию (21). Равенство (25) доказано. Нетрудно видеть, что номер q лежит в пределах $p \leqslant q \leqslant k - 1$.

Введем обозначение

$$G_t = \langle 1, m-1 \rangle \cup \langle t, t + q - m \rangle,$$

где $m \leqslant t \leqslant m + n - q - 1$. Веса предметов из набора $\langle 1, q \rangle$ мажорируют веса предметов из совокупности G_t, поэтому $G_t \subset S(D_t, I)$. При $t = m$ имеем

$$W(G_m) = W(D_m, I) > 1 - w_n.$$

Учитывая условия леммы $\langle 1, m \rangle \subset S^*$ и $n \in S^*$, при $t = m + n - q - 1$ получаем

$$W(G_t) = W(1, m-1) + W(t, n-1)$$

$$\leqslant W(1, m-1) + W(i_m, i_{m+1}, \dots, i_q) \leqslant 1 - w_n.$$

Следовательно, существует номер $r > m$ такой, что

$$W(G_{r-1}) > 1 - w_n, \tag{26}$$

$$W(G_r) \leqslant 1 - w_n. \tag{27}$$

В силу (27) имеется предмет $j \in S(D_r, I) \backslash G_r$. Отсюда и из (26) следует, что

$$W(C_m, I) \geqslant W(D_r, I) \geqslant W(G_r) + w_j = W(G_{r-1})$$

$$-(w_{r-1} - w_{r+q-m}) + w_j > (1 - w_n) - (w_m - w_n) + w_n = 1 - w_m + w_n,$$

т. е. неравенство (24) верно. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть выполняются условия*

$$\alpha \geqslant a > b > 0, \quad n \geqslant m + 3, \tag{28}$$

$$ma + (n - m - 1)b = 1, \tag{29}$$

где числа a, b вещественные и n целое. Тогда

$$\eta(C_m, \alpha) \leqslant 1 - \min\{a - b, b\}. \tag{30}$$

Доказательство. Рассмотрим задачу I с весами предметов $w_i = a$ при $i \in \langle 1, m \rangle$, $w_i = b$ при $i \in \langle m+2, n \rangle$, а $w_{m+1} = b + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. В силу (28) при достаточно малых ε имеем $I \in M(\alpha)$.

Обозначим $D_j = C(j)$, $j = 1, 2$. Нетрудно проверить, что

$$S(D_1, I) = \langle 1, n-2 \rangle, \quad S(D_2, I) = \langle 2, n \rangle.$$

Следовательно,

$$W_1 = W(D_1, I) = 1 - b + \varepsilon, \quad W_2 = W(D_2, I) = 1 - a + b + \varepsilon.$$

Покажем, что

$$W(C_m, I) = \max\{W_1, W_2\}. \tag{31}$$

Достаточно выяснить, что для любой выборки $L = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, $r \leqslant m$, выполняется неравенство

$$W(C(L), I) \leqslant \max\{W_1, W_2\}. \tag{32}$$

Если $i_1 > 1$, то $S(C(L), I) \subset \langle 2, n \rangle$. Поэтому

$$W(C(L), I) \leqslant W_2.$$

Пусть $i_1 = 1$. Если $i_r > r$, то некоторый номер $j \leqslant r$ не входит в $S(C(L), I)$. Следовательно,

$$W(C(L), I) \leqslant W(1, n) - w_j = 1 + b + \varepsilon - a = W_2.$$

Если же $i_r = r$, то $W(C(L), I) = W_1$. Таким образом, верно (32), и равенство (31) доказано.

В силу (29) имеем $W^*(I) = 1$. Пользуясь этим фактом и (31), получаем

$$\eta(C_m, \alpha) \leqslant h(C_m, I) = \max\{W_1, W_2\} = 1 - \min\{a - b, b\} + \varepsilon.$$

Отсюда ввиду произвольной малости ε следует неравенство (30). Лемма 4 доказана.

Перейдем к формулировке основного утверждения. Для сокращения записи введем обозначения

$$\beta = 1/(2m + t + 2), \quad \gamma = 1/(2m + t + 1), \quad \delta = 2\gamma - \alpha, \quad \sigma = m/(t + 1),$$

$$\eta_0(C_m, \alpha) = 1 - \alpha/2, \quad \eta_1(C_m, \alpha) = \min\{1 - \beta, 1 - \gamma + (\sigma + 1)\delta\}.$$

Теорема 2. 1. *Если $\alpha \in [2\gamma, 1]$ при $t = 1$, то*

$$\eta(C_m, \alpha) = 1 - \gamma. \tag{33}$$

2. *Если $\alpha \in [2\beta, 2\gamma]$ при некотором целом $t \geqslant 1$, то*

$$\eta_0(C_m, \alpha) \leqslant \eta(C_m, \alpha) \leqslant \eta_1(C_m, \alpha), \tag{34}$$

при этом

$$\eta(C_m, 2\beta) = 1 - \beta, \quad \eta(C_m, 2\gamma) = 1 - \gamma. \tag{35}$$

Доказательство. 1. Поскольку числа $a = 2\gamma$, $b = \gamma$, $n = m + 3$ удовлетворяют условиям леммы 4, имеем

$$\eta(C_m, \alpha) \leqslant 1 - \min\{a - b, b\} = 1 - \gamma.$$

В силу неравенства $\eta(C_m, \alpha) \geqslant \eta(C_m, 1)$ для доказательства (33) достаточно проверить, что

$$\eta(C_m, 1) \geqslant 1 - \gamma. \tag{36}$$

Допустим противное. Тогда для некоторой задачи $I \in M(1)$ выполняется неравенство

$$h(C_m, I) \leqslant 1 - \gamma. \tag{37}$$

С учетом лемм 1 и 2 можно считать, что

$$w_n > \gamma, \tag{38}$$

а наилучшее решение $S^* = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ удовлетворяет равенствам

$$i_j = j,\ 1 \leqslant j \leqslant m, \quad i_k = n. \tag{39}$$

Кроме того, при $u = \gamma$ и $\alpha = 1$ выполняется (23), так как $2\gamma(1+m) = 1$. Следовательно, по лемме 3 получаем

$$W(C_m, I) > 1 - w_m + w_n. \tag{40}$$

Поскольку $m, n \in S^*$, имеем $mw_m + (k-m)w_n \leqslant 1$, откуда

$$w_m \leqslant (1 - (k-m)w_n)/m. \tag{41}$$

Из соотношений (38), (40), (41) вытекает, что

$$W(C_m, I) > (k\gamma + m - 1)/m \geqslant ((m+2)\gamma + m - 1)/m.$$

Последнее неравенство верно, так как $k \geqslant m + 2$ в силу (17). После простых преобразований получаем

$$W(C_m, I) > 1 - \gamma,$$

что противоречит предположению (37). Следовательно, задач с условием (37) не существует, и неравенство (36) справедливо. Первое утверждение теоремы 2 доказано.

2. Рассмотрим две тройки чисел (a_i, b_i, n_i), $i = 1, 2$, такие, что

$$a_1 = 2\beta, \quad b_1 = \beta, \quad n_1 = m + t + 3,$$

$$a_2 = 2\gamma - \delta, \quad b_2 = \gamma + \sigma\delta, \quad n_2 = m + t + 2.$$

Применяя к ним лемму 4 (условия (28), (29) проверяются достаточно просто), получаем

$$\eta(C_m, \alpha) \leqslant 1 - \min\{a_1 - b_1, b_1\} = 1 - \beta,$$

$$\eta(C_m, \alpha) \leqslant 1 - \min\{a_2 - b_2, b_2\} = 1 - \gamma + (\sigma + 1)\delta,$$

откуда и следует верхняя оценка (34).

Доказательство нижней оценки (34) проводится аналогично предыдущему случаю. Допустим противное, тогда найдется задача $I \in M(\alpha)$ с условием

$$h(C_m, I) \leqslant 1 - \alpha/2. \tag{42}$$

Учитывая леммы 1 и 2, будем считать, что

$$w_n > \alpha/2, \tag{43}$$

а для наилучшего решения верно (39). При $u = \alpha/2$ имеем

$$2u(1 + \max\{m, \lfloor 1/\alpha \rfloor\}) \geqslant \alpha(1 + \lfloor 1/\alpha \rfloor) > 1.$$

Следовательно, соотношение (23) выполняется, и по лемме 3 справедливо (40). С учетом неравенств (43) и $w_m \leqslant \alpha$ получаем

$$W(C_m, I) > 1 - \alpha + \alpha/2 = 1 - \alpha/2,$$

что противоречит предположению (42). Следовательно, в $M(\alpha)$ нет задач с условием (42), и нижняя оценка (34) верна. Равенства (35) получаются из (34) очевидным образом. Теорема 2 доказана.

Нетрудно показать, что

$$\eta_1(C_m, \alpha) - \eta_0(C_m, \alpha) \leqslant 1/30,$$

причем равенство достигается только при $m = 1$ и $\alpha = 7/15$. В заключение выскажем гипотезу, что в (34) верно равенство

$$\eta(C_m, \alpha) = \eta_1(C_m, \alpha).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lai T.-C.** Worst-case analysis of greedy algorithms for the unbounded knapsack, subset-sum and partition problems // Oper. Res. Lett. 1993. V. 14, N 4. P. 215–220.

Адрес автора:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики СО РАН

Статья поступила

29 июля 1994 г.