СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь – декабрь 1994. Том 1, № 4, 64–92

УДК 519.816

СИНТЕЗ ТРАНЗИТИВНЫХ ПОРЯДКОВЫХ ОТНОШЕНИЙ, СОГЛАСОВАННЫХ С ИНФОРМАЦИЕЙ О СИЛЕ КРИТЕРИЕВ

Л. А. Шоломов

Рассматривается задача многокритериального выбора. Каждый объект (вариант) описывается набором оценок по n скалярным критериям. На множестве критериев задано бинарное отношение r силы (важности) критериев. На множестве наборов оценок оно индуцирует транзитивное порядковое отношение τ_r предпочтительности вариантов. Всякое порядковое отношение может быть задано своей представляющей функцией. В работе найден явный вид представляющей функции отношения τ_r при любом r и исследована сложность ее представлений посредством логических формул.

В моделях многокритериального выбора каждый объект из заданного множества (вариант) описывается набором $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ оценок по n критериям. На множестве этих наборов обычно задается бинарное отношение ρ (отношение предпочтения) и выбираются варианты, «лучшие» по отношению ρ. В качестве ρ часто используются порядковые отношения, т. е. такие, для которых результат сравнения $\mathbf{x}\rho\mathbf{y}$ наборов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определяется лишь соотношениями (больше, меньше, равно) одноименных оценок x_i и y_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Примерами широко известных порядковых отношений являются

— лексикография ($\mathbf{x}\lambda\mathbf{y}$, если $x_1 > y_1$, или $x_1 = y_1$ и $x_2 > y_2$, или $\dots$);

— мажоритарное отношение ($\mathbf{x}\mu\mathbf{y}$, если множество $\{i \mid x_i > y_i\}$ имеет бо́льшую мощность, чем множество $\{i \mid x_i < y_i\}$;

— отношение Парето ($\mathbf{x}\pi\mathbf{y}$, если $x_i \geqslant y_i$ для всех i и $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$).

Из примеров видно, что разные критерии могут учитываться в разной мере. Критерий считается более сильным (важным), если превосходство по нему ценится выше. При лексикографии критерии линейно упорядочены по силе, в мажоритарном отношении они равноценны, а в отношении Парето несравнимы (уменьшение одного критерия не может быть компенсировано увеличением других).

Многокритериальные модели возникают при формализации содержательных задач выбора, и большинство исследований по многокритериальному выбору посвящено построению отношения ρ, оптимизация

© 1994 Шоломов Л. А.

по которому давала бы решение исходной задачи выбора [1]. Многие алгоритмы построения многокритериальных моделей в значительной мере основаны на информации о важности критериев [1–6]. В реальных задачах взаимоотношение критериев по важности может быть достаточно сложным. Формальные понятия, связанные с важностью критериев, введены В. В. Подиновским [2, 3] и получили развитие в [5, 6]. В данной работе используются несколько иные понятия, ориентированные на порядковые отношения предпочтения. Они основаны на идее из [4].

Информация о силе (важности) критериев в общем случае может быть задана в виде бинарного отношения r на множестве $\{1, \dots, n\}$ (запись irj означает, что критерий i не слабее критерия j).

На множестве наборов отношению r сопоставим согласованное с ним порядковое отношение σ_r по правилу: $\mathbf{x}\sigma_r\mathbf{y}$, если в наборах $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ для любого i такого, что $x_i < y_i$, существует j такое, что jri и $x_j > y_j$, причем разным i должны соответствовать разные j. Задача построения порядковой многокритериальной модели по информации r о силе критериев может быть сформулирована как задача нахождения явного вида отношения σ_r. В таком виде она поставлена в [6] (при несколько ином определении σ_r), но какого-либо продвижения в ее решении не было получено. Из результатов, имеющих отношение к данной проблеме, отметим предложенную и изученную в [5] последовательность порядковых отношений, промежуточных между лексикографией и отношением Парето.

По смыслу понятия «предпочтительность» в большинстве прикладных задач выбора отношения предпочтения транзитивны. Поэтому введем также связанное с r транзитивное порядковое отношение τ_r — транзитивное замыкание отношения σ_r. Целью данной работы является исследование отношений τ_r при произвольном r и нахождение их явного вида.

Порядковое отношение ρ можно задать двузначной функцией g_ρ от n трехзначных аргументов и исследовать отношение ρ в терминах функции g_ρ. В [5–7] использовалось представление g_ρ в виде 2^n булевых функций. Очевидно, оно не может привести к эффективным алгоритмам исследования порядковых отношений. Другое представление, использующее одну булеву функцию, предложено в [8], и на его основе в [8, 9] развита эффективная техника, применяемая в данной работе.

Основным результатом работы является формула для g_{τ_r}, имеющая простой вид и сложность (число букв), не превосходящую $n(n+1)/2$. Она получена в несколько этапов. Вначале задача построения функций g_{τ_r} для произвольных отношений r сведена к аналогичной задаче для частичных порядков (теоремы 2 и 3). Свойство транзитивности порядковых отношений ρ удалось описать в [9] лишь в терминах дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) функций g_ρ (см. определе-

ние в § 2, ниже), ибо о транзитивном замыкании удобно рассуждать в терминах объединения цепей. В связи с этим явное представление функции g_{τ_r} получено первоначально в виде ДНФ (теорема 5). Оно оказалось экспоненциально сложным. Затем осуществлен переход к формуле, имеющей сложность не выше $2n^2 - n$ (теорема 7). При этом использовано разложение отношения τ_r в пересечение лексикографий на основе некоторого специального разложения частичного порядка r в пересечение линейных порядков. Из формулы теоремы 7 путем перехода к конъюнктивной нормальной форме (КНФ) (см. определение в § 2, ниже), получено упоминавшееся выше основное представление (теорема 8). Наличие в данной задаче столь простой КНФ при том, что ДНФ экспоненциальна, оказалось неожиданным.

Что касается функции g_{σ_r} (без свойства транзитивности), то для нее по-видимому не существует хорошо описываемого явного представления. Однако, на основе утверждения 1 (см. ниже) можно указать полиномиальный алгоритм вычисления ее значений на произвольных наборах.

§ 1. Порядковые отношения и сила критериев

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное действительное пространство. С точками $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ свяжем набор

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\operatorname{sgn}(x_1 - y_1), \ldots, \operatorname{sgn}(x_n - y_n)) \in \{-1, 0, 1\}^n,$$

где $\operatorname{sgn}(z)$ означает соответственно -1, 0 и 1 при $z < 0$, $z = 0$ и $z > 0$. Бинарное отношение ρ на $\mathbb{R}^n$ назовем *порядковым*, если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{y}'$

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Delta(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \implies (\mathbf{x}\rho\mathbf{y} \iff \mathbf{x}'\rho\mathbf{y}')$$

Порядковое отношение называется *правильным*, если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$

$$\mathbf{x}\rho\mathbf{y} \wedge \mathbf{z} \geqslant \mathbf{x} \implies \mathbf{z}\rho\mathbf{y}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{z} \geqslant \mathbf{x}$ означает $z_1 \geqslant x_1, \ldots, z_n \geqslant x_n$.

Пусть $P_{3,2}$ — класс двузначных функций $g(\widetilde{u}) = g(u_1, \ldots, u_n)$ от трехзначных аргументов, где $\widetilde{u} \in \{-1, 0, 1\}^n$, а функция g принимает значения из $\{0, 1\}$. Очевидно, что порядковое отношение ρ однозначно задается функцией $g_\rho(\widetilde{u})$, связанной с ρ соотношением $\mathbf{x}\rho\mathbf{y} \iff g_\rho(\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1)$. Функцию g_ρ будем называть *представляющей функцией отношения* ρ. Легко видеть, что отношение ρ правильно тогда и только тогда, когда его представляющая функция монотонна, т. е. условие $\widetilde{u} \geqslant \widetilde{v}$ влечет $g_\rho(\widetilde{u}) \geqslant g_\rho(\widetilde{v})$. Класс монотонных функций из $P_{3,2}$ обозначим через $M_{3,2}$.

При содержательной интерпретации точка $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ будет трактоваться как набор оценок (некоторого варианта) по n критериям. Исходя из этого, введем формальные понятия, относящиеся к силе критериев. Пусть на множестве $N = \{1, \ldots, n\}$ задано бинарное отношение r, которое будем предполагать рефлексивным. Отношение r будем называть *отношением силы критериев* и считать, что

— если irj, то критерий i не слабее критерия j;

— если $irj \wedge j\overline{r}i$, то критерий i сильнее критерия j;

— если $irj \wedge jri$, то критерии i и j равноценны;

— если $i\overline{r}j \wedge j\overline{r}i$, то критерии i и j не сравнимы.

Отображение $\varphi\colon A \to B$ $(A, B \subseteq N)$ назовем *r-монотонным*, если $(\forall i \in A)\, \varphi(i) r i$. Если в дополнение к этому выполнено $i \neq j \implies \varphi(i) \neq \varphi(j)$, то отображение представляет собой *r-монотонную инъекцию*. Для $\widetilde{u} \in \{-1, 0, 1\}^n$, $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ введем множества $B_\alpha(\widetilde{u}) = \{i \mid u_i = \alpha\}$. Будем говорить, что *порядковое отношение ρ согласовано с r*, если для любого $\widetilde{u} \in \{-1, 0, 1\}^n$, при котором существует r-монотонная инъекция $B_{-1}(\widetilde{u}) \to B_1(\widetilde{u})$, выполнено $g_\rho(\widetilde{u}) = 1$ (считается, что в случае $B_{-1}(\widetilde{u}) = \varnothing$ r-монотонная инъекция существует при любом $B_1(\widetilde{u})$). Таким образом, если в наборах $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ каждое неравенство $x_i < y_i$ компенсируется некоторым $x_j > y_j$ по не менее сильному критерию (разным i соответствуют разные j), должно иметь место $\mathbf{x}\rho\mathbf{y}$. Обозначим через σ_r пересечение всех ρ, согласованных с r. Нетрудно убедиться, что отношение σ_r правильно в смысле (1).

Отметим, что введенные здесь понятия несколько отличаются от использованных в [2–6], поскольку сформулированы для порядковых отношений, рассчитаны на общий тип взаимоотношения критериев по силе и по-иному трактуют «равноценность» и «несравнимость» критериев.

Утверждение 1. *Существует эффективный (полиномиальный) алгоритм, который по произвольным наборам $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и отношению r выясняет, имеет ли место $\mathbf{x}\sigma_r\mathbf{y}$.*

Доказательство. Положим $\widetilde{u} = \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Если $B_{-1}(\widetilde{u}) = \varnothing$, то $\mathbf{x}\sigma_r\mathbf{y}$. Предположим, что $B_{-1}(\widetilde{u}) = \{i_1, \ldots, i_s\} \neq \varnothing$. Каждому $i_t \in B_{-1}(\widetilde{u})$ сопоставим множество $G_t = \{j \in B_1(\widetilde{u}) \mid j r i_t\}$. Легко видеть, что $\mathbf{x}\sigma_r\mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда совокупность множеств G_t, $1 \leqslant t \leqslant s$, обладает системой различных представителей $j_1 \in G_1, \ldots, j_s \in G_s$, $j_1 \neq \ldots \neq j_s$. Этот факт может быть проверен эффективно (например, с помощью потокового алгоритма [11]). Утверждение 1 доказано.

Обычно в задачах выбора используются транзитивные отношения. Обозначим через τ_r пересечение всех транзитивных порядковых отношений, согласованных с r. Отношение τ_r транзитивно, рефлексивно

и, как нетрудно видеть, является транзитивным замыканием отношения σ_r. Из правильности σ_r и [7] следует, что τ_r правильно. Данная работа посвящена исследованию и нахождению явного вида отношений τ_r (точнее, функций g_{τ_r}).

§ 2. Транзитивность в терминах представляющих функций

Далее используются только правильные отношения, поэтому будем рассматривать лишь функции класса $M_{3,2}$. Приведем без доказательства несколько утверждений, установленных в [9].

Введем функции $p(u), p'(u) \in M_{3,2}$ от одного (трехзначного) аргумента, положив

$$p(u) = 1 \iff u > 0,$$
$$p'(u) = 1 \iff u \geqslant 0.$$

Утверждение 2. *Каждая функция $g \in M_{3,2}$ (и только такая) представима в виде*

$$g(u_1, \dots, u_n) = f(p(u_1), \dots, p(u_n), p'(u_1), \dots, p'(u_n)), \tag{2}$$

где f — монотонная булева функция.

Введя обозначения $p(u_i) = p_i$, $p'(u_i) = p'_i$, будем записывать функцию g в виде $f(p_1, \dots, p_n, p'_1, \dots, p'_n)$. Конъюнкцию $q_{i_1} \wedge q_{i_2} \wedge, \dots, \wedge q_{i_s}$, где $1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant n$, $q_{i_j} \in \{p_{i_j}, p'_{i_j}\}$, $1 \leqslant j \leqslant s$, будем называть *элементарной* и записывать также в виде $q_1 \wedge \dots \wedge q_n$, где $q_i \in \{p_i, p'_i, 1\}$, $q_i = 1$ означает отсутствие соответствующего сомножителя. К элементарным конъюнкциям удобно относить пустую конъюнкцию, равную единице.

- Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой.*

Элементарная конъюнкция $q_1^{(1)} \wedge \dots \wedge q_n^{(1)}$ *поглощает* элементарную конъюнкцию $q_1^{(2)} \wedge \dots \wedge q_n^{(2)}$, если $q_i^{(1)} \geqslant q_i^{(2)}$ при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant n$, где $p_i \leqslant p'_i \leqslant 1$. ДНФ, у которой отсутствуют поглощения конъюнкций, называется *приведенной.*

Двойственным образом определяется КНФ и приведенная КНФ.

- Конъюнкция элементарных дизъюнкций $d_1 \vee \dots \vee d_n$ называется *конъюнктивной нормальной формой.*

КНФ называется *приведенной*, если в ней отсутствуют поглощения дизъюнкций (*дизъюнкция* $d_1^{(1)} \vee \dots \vee d_n^{(1)}$ *поглощает дизъюнкцию* $d_1^{(2)} \vee \dots \vee d_n^{(2)}$, если $d_i^{(2)} \geqslant d_i^{(1)}$, где $0 \leqslant p_i \leqslant p'_i$).

Утверждение 3. *Каждая функция $g \in M_{3,2}$ ($g \not\equiv 0$, $g \not\equiv 1$) единственным образом представима в виде приведенной ДНФ и приведенной КНФ.*

Приведенные ДНФ и КНФ функций $g \equiv 0$ и $g \equiv 1$ по определению имеют вид 0 и 1.

Определим операцию композиции функций из $M_{3,2}$. Для $q_i, q_j \in \{p_i, p'_i, 1\}$ полагаем

$$q_i \circ q'_i = \begin{cases} 1, & \text{если } q_i = 1 \text{ или } q'_i = 1, \\ q_i \wedge q'_i, & \text{если } q_i \neq 1,\ q'_i \neq 1. \end{cases}$$

Для элементарных конъюнкций $K = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$ и $K' = q'_1 \wedge \ldots \wedge q'_n$ полагаем

$$K \circ K' = (q_1 \circ q'_1) \wedge (q_2 \circ q'_2) \wedge \ldots \wedge (q_n \circ q'_n).$$

Если $g = K_1 \vee \ldots \vee K_s$ и $g' = K'_1 \vee \ldots \vee K'_s$ — некоторые ДНФ функций g, $g' \in M_{3,2}$ (g, $g' \not\equiv$const), то

$$g \circ g' = \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant s,\, 1 \leqslant j \leqslant t} K_i \circ K'_j. \tag{3}$$

Если g или g' — константа, то полагаем $g \circ g' = g \wedge g'$.

Утверждение 4. *Результат операции композиции не зависит от выбора ДНФ функций g и g'. Операция композиции коммутативна, ассоциативна и монотонна ($g_1 \leqslant g_2 \Longrightarrow g_1 \circ g_3 \leqslant g_2 \circ g_3$).*

Из утверждения 4 следует, что можно рассматривать многоместную коммутативную операцию $g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_k$, для которой будем использовать обозначение $(\circ G)$, где $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$. Эта операция монотонна.

Для конъюнкций операцию композиции удобно определить в других терминах. Конъюнкция $K = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$ может быть задана множествами

$$J(K) = \{j \mid q_j \neq 1\} \quad J_0(K) = \{j \mid q_j = p_j\}. \tag{4}$$

Если $\mathrm{K} = \{K_1, \ldots, K_l\}$ — система конъюнкций, то

$$J(\circ \mathrm{K}) = \bigcap_{K \in \mathrm{K}} J(K), \quad J_0(\circ \mathrm{K}) = \Big(\bigcup_{K \in \mathrm{K}} J_0(K)\Big) \cap \Big(\bigcap_{K \in \mathrm{K}} J(K)\Big). \tag{5}$$

Роль операции композиции проясняет следующее утверждение.

Утверждение 5. *Если $\rho_1 \circ \rho_2$ — операция произведения отношений* $(\mathbf{x}(\rho_1 \circ \rho_2)\mathbf{y} \Longleftrightarrow \exists \mathbf{z}(\mathbf{x}\rho_1\mathbf{z} \wedge \mathbf{z}\rho_2\mathbf{y}))$, *то* $g_{\rho_1 \circ \rho_2} = g_{\rho_1} \circ g_{\rho_2}$.

Индуктивно определим *степень функции* $g \in M_{3,2}$, положив

$$g^1 = g, \qquad g^s = g^{s-1} \circ g,\ s \geqslant 2.$$

Справедлива цепочка неравенств

$$g^1 \leqslant g^2 \leqslant \ldots \leqslant g^s \leqslant \ldots .$$

Результат стабилизации этой последовательности обозначим через $[g]$. Из монотонности операции композиции следует монотонность операции $[\cdot]$, т. е. $g_1 \geqslant g_2 \Longrightarrow [g_1] \geqslant [g_2]$.

Утверждение 6. *Если $[\rho]$ — транзитивное замыкание отношения ρ, то $g_{[\rho]} = [g_\rho]$.*

Утверждение 7. *Отношение ρ транзитивно тогда и только тогда, когда $g_\rho^2 = g_\rho$.*

Нам понадобятся также утверждения о рефлексивности и антирефлексивности.

Утверждение 8. *Отношение ρ рефлексивно* (антирефлексивно) *тогда и только тогда, когда $g_\rho(\widetilde{0}) = 1$ $(g_\rho(\widetilde{0}) = 0)$, где* $\widetilde{0} = (0, \ldots, 0)$. *Максимальное антирефлексивное отношение, вложенное в ρ (минимальное рефлексивное отношение, содержащее ρ), задается представляющей функцией $(p_1 \vee \ldots \vee p_n) \wedge g_p$ (соответственно $g_p \vee p_1' \wedge \ldots \wedge p_n'$).*

§ 3. Порождающие функции транзитивных отношений

Будем говорить, что *функция $h \in M_{3,2}$* (*транзитивно*) *порождает функцию $g \in M_{3,2}$*, если $[h] = g$. Если ρ — правильное транзитивное отношение и h порождает g_ρ, то функцию h будем называть *порождающей функцией отношения ρ*. В данном параграфе мы явно опишем порождающую функцию отношения τ_r при произвольном r.

Пусть r — отношение на N (здесь и дальше без особых оговорок отношения будем предполагать рефлексивными). Для $i \in N$ введем обозначение $r(i) = \{j \in N \mid irj\}$. Элемент $i \in N$ будем называть *минимальным* (*относительно* r), если $r(i) = \{i\}$. Множество всех элементов из N, не являющихся минимальными, обозначим через N_r. С каждым $i \in N_r$ свяжем конъюнкцию

$$K_{r,i} = p_i \wedge \bigwedge_{j \in N_r \setminus r(i)} p_i'. \tag{6}$$

Положим $\mathrm{K}_r = \{K_{r,i} \mid i \in N_r\}$. Если K — множество конъюнкций, то через $(\vee\mathrm{K})$ будем обозначать дизъюнкцию всех конъюнкций из K.

Введем конъюнкцию $K_0 = p_1' \wedge \ldots \wedge p_n'$.

Теорема 1. *Функция*

$$h_r = (\vee \mathrm{K}_r) \vee K_0 \tag{7}$$

является порождающей функцией отношения τ_r.

Доказательство. Сначала установим неравенство

$$g_{\tau_r} \geqslant [(\vee \mathrm{K}_r) \vee K_0].$$

В силу транзитивности отношения τ_r, утверждения 6 и монотонности операции $[\cdot]$ достаточно убедиться, что $g_{\tau_r} \geqslant (\vee \mathrm{K}_r) \vee K_0$.

Рассмотрим произвольную конъюнкцию $K_{r,t} \in \mathrm{K}_r$. Множество $r(i)\backslash\{i\}$ непусто. Каждому $j \in r(i)\backslash\{i\}$ сопоставим набор

$$\widetilde{u}^{(i,j)} = (u_1^{(i,j)}, \dots, u_n^{(i,j)}),$$

положив $u_i^{(i,j)} = 1$, $u_j^{(i,j)} = -1$, $u_s^{(i,j)} = 0$ для $s \neq i, j$. Из соотношений $\tau_r \subseteq \sigma_r$ и $j r i$ вытекает равенство $g_{\tau_r}(\widetilde{u}^{(i,j)}) = 1$. Наименьшей конъюнкцией, покрывающей набор $\widetilde{u}^{(i,j)}$, является конъюнкция

$$K_{i,j} = p_i \wedge \bigwedge_{s \in N\backslash\{i,j\}} p'_s.$$

Поскольку функция g_{τ_r} монотонна, имеем $g_{\tau_r} \geqslant K_{i,j}$ и

$$g_{\tau_r} \geqslant \bigvee_{j \in r(i)\backslash\{i\}} K_{i,j}. \tag{8}$$

Из (5) следует, что композиция всех конъюнкций $K_{i,j}$ ($j \in r(i)\backslash\{i\}$ задает $K_{r,i}$. Поэтому ввиду неравенства (8), замкнутости функции g_{τ_r} относительно операции композиции (поскольку τ_r транзитивно) и монотонности этой операции получаем $g_{\tau_r} \geqslant K_{r,i}$. Соотношение $g_{\tau_r} \geqslant K_0$ вытекает из рефлексивности отношения τ_r в силу утверждения 8.

Убедимся теперь, что

$$g_{\tau_r} \leqslant [(\vee \mathrm{K}_r) \vee K_0]. \tag{9}$$

Рассмотрим произвольный набор $\widetilde{u}$ такой, что $g_{\tau_r}(\widetilde{u}) = 1$. Предположим, что $B_{-1}(\widetilde{u}) \neq \varnothing$. Существует r-монотонная инъекция $B_{-1}(\widetilde{u}) \to B_1(\widetilde{u})$. Образ множества $B_{-1}(\widetilde{u})$ при этой инъекции обозначим через B. Положим $B' = B \cap N_r$. Образуем композицию всех конъюнкций $K_{r,i}$, $i \in B'$, и ее результат обозначим через K.

Убедимся, что $K(\tilde{u}) = 1$. Достаточно проверить следующие импликации:

(а) $j \in B_{-1}(\tilde{u}) \Longrightarrow j \notin J(K)$,

(б) $j \in B_0(\tilde{u}) \Longrightarrow j \notin J_0(K)$.

Определение $J(K)$ и $J(K_0)$ дано в (4). Имеем

(а) $j \in B_{-1}(\tilde{u}) \Longrightarrow (\exists s)(s \neq j, srj) \Longrightarrow s \in B', j \in J(K_{r,s}) \Longrightarrow j \notin J(K)$;

(б) $j \in B_0(\tilde{u}) \Longrightarrow j \notin B_1(\tilde{u}) \Longrightarrow j \notin B' \Longrightarrow j \notin J_0(K)$.

Поэтому

$$g_{\tau_r}(\tilde{u}) = 1 \wedge B_{-1}(\tilde{u}) \neq \varnothing \Longrightarrow K(\tilde{u}) = 1 \Longrightarrow [(\vee \mathrm{K}_r)](\tilde{u}) = 1. \tag{10}$$

Если $B_{-1}(\tilde{u}) = \varnothing$, то $\tilde{u} \geqslant \tilde{0}$ и $K_0(\tilde{u}) = 1$. Поэтому в силу (10) справедливо неравенство (9). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В соответствии с (6) введем конъюнкции $K_{r,i}$ для всех $i \in N$ и образуем множество $\mathrm{K}'_r = \{K_{r,i} \mid i \in N\}$. Поскольку $K_{r,i} \leqslant K_0$ для $i \in N \backslash N_r$, порождающая функция h_r может быть записана в виде

$$h_r = (\vee \mathrm{K}'_r) \vee K_0. \tag{11}$$

Такое представление иногда оказывается более удобным.

§ 4. Сведе́ние отношений общего вида к частичным порядкам

Следующая теорема сводит задачу нахождения функции g_{τ_r} для произвольных отношений r к аналогичной задаче для транзитивных отношений.

Теорема 2. *Если $[r]$ — транзитивное замыкание отношения r, то имеет место равенство $\tau_r = \tau_{[r]}$.*

Доказательство. Поскольку r рефлексивно, имеет место цепочка вложений $r \subseteq r^2 \subseteq r^3 \subseteq \ldots$, где r^s означает s-ю степень отношения r. Поэтому найдется k такое, что $[r] = r^{2^k}$. Достаточно установить, что $\tau_{r^2} \subseteq \tau_r$, так как в этом случае

$$\tau_{r^2} = \tau_r, \qquad \tau_r = \tau_{r^2} = \tau_{r^4} = \ldots = \tau_{r^{2^k}} = \tau_{[r]}.$$

Для $i \in N$ образуем множество конъюнкций $\mathrm{K}_i = \{K_{r,j} \mid j \in r(i)\}$. Докажем неравенство

$$K_{r^2,i} \leqslant (\circ \mathrm{K}_i), \tag{12}$$

где $K_{r^2,i}$ означает конъюнкцию (6) для отношения r^2. Достаточно проверить следующие соотношения:

(а) $J(K_{r^2,i}) \supseteq J(\circ \mathrm{K}_i)$,

(б) $J_0(K_{r^2,i}) \supseteq J_0(\circ \mathrm{K}_i)$.

(а) Если $j \notin J(K_{r^2,i})$, то ir^2j и $i \neq j$. Это означает, что найдется m такое, что irm и mrj. Если $m = j$, то irj и $j \notin J(K_{r,i})$, так как $i \neq j$. Если $m \neq j$, то $j \notin J(K_{r,m})$, $m \in r(i)$. В обоих случаях существует конъюнкция из множества K_i, не содержащая сомножителя q_j, поэтому $j \notin J(\circ \mathrm{K}_i)$ согласно (4).

(б) Пусть $j \in J_0(\circ \mathrm{K}_i)$. В соответствии с (5) найдется m такое, что $j \in J_0(K_{r,m})$ и $m \in r(i)$. Это означает, что $j = m$ и $m \in r(i)$, т. е. irj. Если $i \neq j$, то $j \notin J(K_{r,i})$, а потому $j \notin J(\circ \mathrm{K}_i)$ и тем более $j \notin J_0(\circ \mathrm{K}_i)$; противоречие.

Остается рассмотреть случай $i = j$. Имеем $j = i \in J_0(K_{r^2,i})$.

Из (12) следует, что $K_{r^2,i} \leqslant [(\vee \mathrm{K}'_r)]$ и в силу (11) имеем $K_{r^2,i} \leqslant [h_r]$. С учетом неравенства $K_0 \leqslant h_r$ заключаем, что справедливы неравенства

$$h_{r^2} \leqslant [h_r], \quad [h_{r^2}] \leqslant [h_r].$$

Пользуясь теоремой 1, получаем $\tau_{r^2} \subseteq \tau_r$. Теорема 2 доказана.

Согласно теореме 2 можно ограничиться рассмотрением транзитивных отношений. Если R — некоторое бинарное отношение на N, то через P_R обозначим его строгую часть $R \backslash R^{-1}$, а через I_R — симметричную часть $R \cap R^{-1}$. Положим

$$R(i) = \{j \in N \mid iRj\}, \quad R^{-1}(i) = \{j \in N \mid jRi\}.$$

Лемма 1. *Рефлексивное отношение r транзитивно тогда и только тогда, когда*

1) *P — строгий частичный порядок,*
2) *I_r — эквивалентность,*
3) *если iI_rj, то $P_r(i) = P_r(j)$ и $P_r^{-1}(i) = P_r^{-1}(j)$.*

Доказательство. Пусть выполнены условия 1–3 и $irj \wedge jrk$ для некоторых i, j, k. Если $(i,j),(j,k) \in P_r$ или $(j,k) \in I_r$, то в силу транзитивности P_r и I_r справедливо соотношение irj. Пусть теперь $iP_rj \wedge jI_rk$ либо $iI_rj \wedge jP_rk$. В первом случае $i \in P_r^{-1}(j)$ и согласно условию 3 имеем $i \in P_r^{-1}(k)$. Это означает, что iP_rk, следовательно, irk. Второй случай рассматривается аналогично.

Пусть r — транзитивное отношение. Докажем, что выполнены условия 1–3.

Рассмотрим i, j, k такие, что $iP_rj \wedge jP_rk$. В силу транзитивности r имеем irk. Для доказательства транзитивности P_r достаточно убедиться, что $i\overline{I_r}k$. Если iI_rk, то kI_ri и, учитывая транзитивность r, из

iP_rj получаем krj, что противоречит jP_rk. Ввиду транзитивности и антирефлексивности P_r заключаем, что P_r — частичный порядок.

Отношение I_r рефлексивно и симметрично. Покажем, что оно транзитивно и тем самым докажем, что I_r — отношение эквивалентности. Пусть выполнено $iI_rj \wedge jI_rk$. Тогда irk (r транзитивно). С другой стороны, из симметрии I_r следует $kI_rj \wedge jI_ri$, что дает kri. Последнее соотношение вместе с соотношением irk приводит к iI_rk.

Рассмотрим i, j, k такие, что iI_rj и $k \in P_r(i)$. Из iP_rk и jI_ri (симметрия I_r) получаем jrk (транзитивность r). Предположим, что jI_rk. Тогда из jI_ri следует iI_rk, что противоречит iP_rk. Соотношения jrk и $j\overline{I_r}k$ дают jP_rk, т. е. $k \in P_r(j)$. Следовательно, $P_r(i) = P_r(j)$. Равенство $P_r^{-1}(i) = P_r^{-1}(j)$ доказывается аналогично. Лемма 1 доказана.

Пусть r — транзитивное отношение. Согласно лемме 1 отношение I_r является эквивалентностью на N (см. условие 2) и потому порождает разбиение $N = I_1 \cup \ldots \cup I_t$ на классы эквивалентности. Из условия 3 леммы 1 следует, что можно рассматривать фактор-отношение $r^0 = r/_{I_r}$, которое согласно условиям 1 и 2 представляет собой нестрогий частичный порядок (на классах эквивалентности $I_1, \ldots, I_t$).

Класс эквивалентности I_s назовем *нетривиальным*, если $|I_s| > 1$, где $|M|$ означает мощность множества M.

Обозначим через S множество номеров s всех нетривиальных классов I_s. Согласно условию 3 леммы 1 все элементы $i \in I_s$ имеют одно и то же множество $r(i)$, которое обозначим через $r(I_s)$. Введем множество

$$M = N \setminus \bigcup_{s \in S} r(I_s).$$

Допустим, что $M \neq \varnothing$. Тогда M состоит из элементов, попавших в некоторые тривиальные классы. Пусть $r' = r^\circ \cap M^2$ — сужение отношения r на M (если тривиальные классы отождествляются с их элементами). Отношение r' является частичным порядком на M и порождает отношение $\tau_{r'}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$, где $m = |M|$.

Следующая теорема сводит задачу построения функций g_{τ_r} для транзитивных отношений к аналогичной задаче для частичных порядков.

Теорема 3. *Если r — транзитивное (и рефлексивное) отношение, то*

$$g_{\tau_r} = \begin{cases} g_{\tau_{r'}}, & \text{если } M \neq \varnothing, \\ 1, & \text{если } M = \varnothing, \end{cases}$$

где множество M и частичный порядок r' определены выше.

Замечание 2. Равенство $g_{\tau_r} = g_{\tau_{r'}}$ понимается с точностью до несущественных аргументов. При этом отношения τ_r и $\tau_{r'}$ в общем случае различны: одно из них задано на $\mathbb{R}^n$, другое — на $\mathbb{R}^m$.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим порождающую функцию отношения τ_r в форме (11). С нетривиальным классом эквивалентности I_s $(s \in S)$ свяжем множество конъюнкций $\mathrm{K}_s = \{K_{r,i} \mid i \in I_s\}$; здесь $K_{r,i} = p_i \wedge \bigwedge\limits_{j \in N \setminus r(I_s)} p'_j$, поэтому

$$(\circ \mathrm{K}_s) = \bigwedge_{j \in N \setminus r(I_s)} p'_j = K_s.$$

Обозначим через $\widehat{K}_0$ композицию всех конъюнкций K_s, $s \in S$. Имеем

$$\widehat{K}_0 = \bigwedge_{j \in N \setminus \bigcup_{s \in S} r(I_s)} p'_j = \bigwedge_{j \in M} p'_j.$$

Если $M = \varnothing$, то $\widehat{K}_0 = 1$ и $g_{\tau_r} = [h_r] \geqslant \widehat{K}_0 = 1$.

Пусть $M \neq \varnothing$. Очевидно, что $\widehat{K}_0$ поглощает K_0 и все конъюнкции $K_{r,i}$, где $i \in I_s$, $s \in S$. Кроме того, если j содержится в некотором $r(I_s)$, $s \in S$, то в силу транзитивности r имеем

$$r(I_s) \supseteq r(j), \quad J(K_{r,j}) = N \setminus r(j) \supseteq N \setminus r(I_s) \supseteq M = J(\widehat{K}_0).$$

Поскольку $J_0(\widehat{K}_0) = \varnothing$, получаем, что $\widehat{K}_0$ поглощает $K_{r,j}$. Таким образом, при добавлении к (11) конъюнкции $\widehat{K}_0 \leqslant [h_r]$ все $K_{r,j}$, $j \in N \setminus M$, и конъюнкция K_0 могут быть опущены. Полученную в результате функцию обозначим h'_r. Ввиду изложенного справедливо равенство $[h'_r] = [h_r]$.

Композиция $K_{r,j} \circ \widehat{K}_0$, $j \in M$, дает конъюнкцию $\widehat{K}_{r,j}$, являющуюся сужением $K_{r,j}$ на множество M. Легко видеть, что $\widehat{K}_{r,j}$ совпадает с $K_{r',j}$ и поглощает $K_{r,j}$. Заменив в h'_r все $K_{r,j}$ на $K_{r',j}$, $j \in M$, придем к функции $h_{r'}$. Следовательно,

$$g_{\tau_r} = [h_r] = [h'_r] = [h_{r'}] = g_{\tau_{r'}}.$$

Теорема 3 доказана.

Теоремы 2 и 3 сводят задачу нахождения функций g_{τ_r} для произвольных отношений r к случаю частичных порядков.

Теорема 4. *Если r — частичный порядок, то τ_r также представляет собой нестрогий частичный порядок.*

Доказательство. Поскольку отношение τ_r рефлексивно и транзитивно, достаточно установить антисимметричность, т. е. $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \wedge$

$\mathbf{x}\tau_r\mathbf{y} \Longrightarrow \mathbf{y}\overline{\tau}_r\mathbf{x}$. Для этого достаточно, в свою очередь, показать, что отношение σ_r, транзитивным замыканием которого является τ_r, не содержит простых циклов $\mathbf{x}_1\sigma_r\mathbf{x}_2\sigma_r\ldots\sigma_r\mathbf{x}_l\sigma_r\mathbf{x}_1$ длины $l \geqslant 2$. Предположим противное: имеется цикл указанного вида. Положим $\widetilde{u}_s = \Delta(\mathbf{x}_{s+1}, \mathbf{x}_s)$, $1 \leqslant s \leqslant l-1$; $\widetilde{u}_l = \Delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_l)$. На множестве вершин N построим ориентированный мультиграф G следующим образом. Пусть для некоторого s неравенство $\widetilde{u}_s \geqslant 0$ не выполняется. По свойству отношения σ_r существует r-монотонная инъекция φ_s: $B_{-1}(\widetilde{u}_s) \to B_1(\widetilde{u}_s)$. В мультиграфе G проведем дуги из вершин $i \in B_{-1}(\widetilde{u}_s)$ в $\varphi(i) \in B_1(\widetilde{u}_s)$. Так проделаем со всеми $\widetilde{u}_s$, не удовлетворяющими неравенству $\widetilde{u}_s \geqslant \widetilde{0}$. Множество таких s непусто, так как неравенство $\widetilde{u}_s \geqslant \widetilde{0}$ для всех s в силу простоты цикла приводит к противоречию $\mathbf{x}_1 > \mathbf{x}_2 > \ldots > \mathbf{x}_l > \mathbf{x}_1$ (запись $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ означает $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$).

Мультиграф G обладает следующим свойством: если в какую-либо вершину ведет дуга, то из нее исходит дуга. Действительно, дуги, ведущие в j, означают увеличение j-й компоненты соответствующих наборов $\widetilde{u}_s$. Но поскольку цикл начинается и заканчивается одинаковыми наборами, на некотором шаге s значение j-й компоненты должно быть уменьшено. В этом случае $j \in B_{-1}(\widetilde{u}_s)$ и из s исходит дуга в $\varphi_s(j)$.

Возьмем некоторую вершину, в которую ведет хотя бы одна дуга. Начиная с этой вершины, будем произвольно двигаться вдоль дуг, устраняя из G пройденные дуги, пока такое движение возможно. После остановки мы окажемся в вершине, в которой не осталось исходящих дуг. Это означает, что данная вершина уже посещалась и пройденный путь содержит некоторый простой цикл $i_1, i_2, \ldots, i_m, i_1$. Поскольку дуги соответствуют r-монотонным отображениям и цикл простой, имеем $i_1 P_r i_m P_r \ldots P_r i_2 P_r i_1$. Это противоречит тому, что P_r — строгий частичный порядок. Теорема 4 доказана.

Следующее утверждение усиливает теорему 4.

Следствие 1. *Отношение τ_r является частичным порядком тогда и только тогда, когда r ациклично (не содержит циклов длины больше единицы).*

Доказательство. Если r ациклично, то $[r]$ — частичный порядок и утверждение в одну сторону вытекает из теорем 2 и 4.

Если в r имеется цикл длины больше единицы, то входящие в него элементы попадут в один класс эквивалентности I_s отношения $[r]$. В соответствии с теоремами 2 и 3 функция $g_{\tau_r} = g_{[\tau_r]}$ не зависит от переменных с индексами из I_s и для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, различающихся лишь на множестве I_s, будут выполнены соотношения $\mathbf{x}\tau_r\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}\tau_r\mathbf{x}$, что нарушает антисимметричность τ_r. Следствие 1 доказано.

Последующая часть работы посвящена нахождению явного вида функций g_{τ_r}.

§ 5. Дизъюнктивное представление

В данном параграфе строится приведенная ДНФ функции g_{τ_r} (напомним, что она единственна).

Введем некоторые понятия. Пусть r — рефлексивное отношение на N. Положим $r^+(i) = r(i)\backslash\{i\}$. Для произвольного $A \subseteq N$ обозначим через $r^+(A)$ объединение множеств $r^+(j)$, $j \in A$. Множество A назовем *r-тупиковым*, если не существует $j \in A$ такого, что $r^+(A\backslash\{j\}) = r^+(A)$.

Конъюнкцию K назовем *r-простой*, если множество $J_0(K)$является r-тупиковым.

Построим последовательность множеств K_r^s, $s = 1, 2, \ldots$, по индукции, положив $\mathrm{K}_r^1 = \mathrm{K}_r = \{K_{r,i} \mid i \in N_r\}$ (см. (6)) и включив в K_r^s при $s \geqslant 2$ все композиции $K = K_1 \circ K_2$ ($K_1 \in \mathrm{K}_r^{s-1}$, $K_2 \in \mathrm{K}_r$), удовлетворяющие следующим условиям:

— множества $J(K_1)$ и $J(K_2)$ не сравнимы по включению,

— справедливо равенство $|J_0(K)| = s$,

— конъюнкция K является r-простой.

Пусть последовательность множеств K_r^s обрывается на шаге t, т. е. всеми непустыми множествами являются $\mathrm{K}_r^1, \ldots, \mathrm{K}_r^t$. Если K — некоторое множество конъюнкций, то через $D\mathrm{K}$ будем обозначать формулу, являющуюся дизъюнкцией всех $K \in \mathrm{K}$, взятых по одному разу (мы различаем формулу $D\mathrm{K}$ и реализуемую ей функцию $(\vee\mathrm{K})$).

Теорема 5. *Если r — отношение частичного порядка, то приведенной ДНФ функции g_{τ_r} является формула*

$$g_{\tau_r} = K_0 \vee D\mathrm{K}_r^1 \vee \ldots \vee D\mathrm{K}_r^t. \tag{13}$$

Доказательство вытекает из лемм 2–4 (см. ниже).

Лемма 2. *Если r — произвольное отношение, то*

$$g_{\tau_r} = [(\vee\mathrm{K}_r)] \vee K_0.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 имеем

$$g_{\tau_r} = [(\vee\mathrm{K}_r) \vee K_0].$$

Рассмотрим произвольную композицию $K_1 \circ \ldots \circ K_l = K'$ конъюнкций из $\mathrm{K}_r \cup \{K_0\}$. Если $K_1 = \ldots = K_l = K_0$, то $K' = K_0$. Когда среди конъюнкций $K_1, \ldots, K_l$ имеются отличные от K_0 конъюнкции, устранив с помощью соотношения $K \circ K_0 = K$ из композиции все K_i, $1 \leqslant i \leqslant l$, совпадающие с K_0, получим композицию конъюнкций из K_r, равную K'. Лемма 2 доказана.

Замечание 3. Из доказательства леммы 2 и замечания 1 следует также справедливость представления

$$g_{\tau_r} = [(\vee \mathrm{K}'_r)] \vee K_0.$$

Лемма 3. *Если r — частичный порядок, то*

$$[(\vee \mathrm{K}_r)] = (\vee \mathrm{K}^1_r) \vee \ldots \vee (\vee \mathrm{K}^t_r).$$

Доказательство. Неравенство $[(\vee \mathrm{K}_r)] \geqslant (\vee \mathrm{K}^1_r) \vee \ldots \vee (\vee \mathrm{K}^t_r)$ очевидно, поскольку конъюнкции, присутствующие в правой части, являются композициями некоторых конъюнкций из K_r, а левая часть включает все такие композиции.

Для доказательства обратного неравенства индукцией по s установим, что при любом $s \geqslant 1$ имеет место соотношение

$$\forall K_1, \ldots, K_s \in \mathrm{K}_r \quad (K_1 \circ \ldots \circ K_s \leqslant (\vee \mathrm{K}^1_r) \vee \ldots \vee (\vee \mathrm{K}^s_r)).$$

При $s = 1$ оно очевидно, поскольку $\mathrm{K}^1_r = \mathrm{K}_r$. Пусть $s \geqslant 2$ и для всех $s' < s$ утверждение справедливо. Возьмем произвольную композицию $K_1 \circ \ldots \circ K_s = K$ конъюнкций из K_r и представим ее в виде $K = K' \circ K_s$, где $K' = K_1 \circ \ldots \circ K_{s-1}$. Рассмотрим все возможные случаи.

Случай 1: множества $J(K')$ и $J(K_s)$ сравнимы по включению. Если $J(K') \subseteq J(K_s)$, то по определению композиции $K = K' \circ K_s \leqslant K'$, и остается воспользоваться предположением индукции для K'. Если $J(K') \supseteq J(K_2)$, то $K \leqslant K_s \in \mathrm{K}^1_r$.

Случай 2: $|J_0(K)| \neq s$. Из определения композиции конъюнкций и того факта, что каждая конъюнкция $K_{r,i} \in \mathrm{K}_r$ содержит ровно один сомножитель p_i, следует, что $|J_0(K)| < s$ и среди конъюнкций $K_1, \ldots, K_s$, композицией которых является K, найдутся $K_i = K_{r,u}$ и $K_j = K_{r,v}$ $(i \neq j)$ такие, что $u \notin J(K_{r,v}) \backslash \{v\}$ (случай $u = v$, т. е. $K_i = K_j$ не исключается). В силу (6) это означает, что $u \in r(v)$ и, поскольку r — частичный порядок, имеем $r^+(u) \subseteq r^+(v)$. По определению композиции получаем $K_{r,u} \circ K_{r,v} = K_{r,v}$, т. е. $K_i \circ K_j = K_j$. Поэтому ввиду коммутативности и ассоциативности операции композиции получаем, что можно исключить конъюнкцию K_i и представить K в виде композиции $s - 1$ конъюнкций из K_r. Остается сослаться на предположение индукции.

Случай 3: $|J_0(K)| = s$ и конъюнкция K не является r-простой. Из условия $|J_0(K)| = s$ следует, что K совпадает с композицией всех конъюнкций $K_{r,j}$, $j \in J_0(K)$. Действительно, каждая конъюнкция должна присутствовать в композиции (иначе не будет сомножителя

p_i), а K образована композицией не более s конъюнкций из K_r. Из r-непростоты K вытекает равенство $R^+(J_0(K)\setminus\{i\}) = r^+(J_0(K))$ при некотором $i \in J_0(K)$. Обозначим через $\widehat{K}$ композицию всех $K_{r,j}$, $j \in J_0(K)\setminus\{i\}$. Имеем

$$J(K) = \bigcap_{j\in J_0(K)} (N\setminus r^+(j)) = N\setminus \bigcup_{j\in J_0(K)} r^+(j) = N\setminus r^+(J_0(K)). \quad (14)$$

Аналогично,

$$J(\widehat{K}) = N\setminus r^+(J_0(K)\setminus\{i\}),$$

поэтому $J(\widehat{K}) = J(K)$. Отсюда ввиду соотношения $J_0(K) \subseteq J_0(K)\setminus\{i\}$ следует $\widehat{K} \geqslant K$. Но конъюнкция $\widehat{K}$ является композицией $s-1$ конъюнкций из K_r и удовлетворяет предположению индукции.

Случай 4: $K' \notin \mathrm{K}_r^{s-1}$. Сначала убедимся, что K' не поглощается конъюнкциями из K_r^{s-1}. Рассмотрим произвольную конъюнкцию $K'' \in \mathrm{K}_r^{s-1}$. Если $K' \leqslant K''$, то $J_0(K') \supseteq J_0(K'')$. Поскольку $|J_0(K'')| = s-1$, имеем $|J_0(K')| = |J_0(K'')|$. Следовательно, K' и K'' образованы композицией одних и тех же конъюнкций $K_{r,u}$, $u \in J_0(K')$, и потому совпадают, что противоречит условию $K' \notin \mathrm{K}_r^{s-1}$.

По предположению индукции существует конъюнкция $\widehat{K} \in \mathrm{K}_r^1 \cup \ldots \cup \mathrm{K}_r^{s-1}$, поглощающая K'. Поскольку $\widehat{K} \notin \mathrm{K}_r^{s-1}$, найдется $s' \leqslant s-2$ такое, что $\widehat{K} \in \mathrm{K}_r^{s}$. Это означает, что $\widehat{K}$ является композицией не более $s-2$ конъюнкций, а $\widehat{K} \circ K_s$ — композицией не более $s-1$ конъюнкций. Из монотонности операции композиции и предположения индукции получаем

$$K = K' \circ K_s \leqslant \widehat{K} \circ K_s \leqslant (\vee\mathrm{K}_r^1) \vee \ldots \vee (\vee\mathrm{K}_r^{s-1}).$$

Случай 5: $J(K')$ и $J(K_s)$ не сравнимы по включению, $|J_0(K)| = s$ и K является r-простой. Тогда $K \in \mathrm{K}_r^s$ по построению. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. ДНФ $K_0 \vee D\mathrm{K}_r^1 \vee \ldots \vee D\mathrm{K}_r^t$ *является приведенной.*

Доказательство. Рассмотрим конъюнкцию $K \in \mathrm{K}_r^1 \cup \ldots \cup \mathrm{K}_r^t$. Конъюнкция K_0 не поглощает K, поскольку K_0 имеет длину n, а длина конъюнкций $K_{r,i}$, $i \in N_r$, строго меньше n. Такое же утверждение справедливо для их композиции K. Конъюнкция K также не поглощает K_0, поскольку $J_0(K_0) = \varnothing$, $J_0(K) \neq \varnothing$.

Остается рассмотреть случай, когда обе конъюнкции содержатся в $\mathrm{K}_r^1 \cup \ldots \cup \mathrm{K}_r^t$. Предположим, что $K' \geqslant K''$, $K' \in \mathrm{K}_r^{s'}$, $K'' \in \mathrm{K}_r^{s''}$. Из неравенства $K' \geqslant K''$ следует включение $J_0(K') \subseteq J_0(K'')$. Поскольку $|J_0(K')| = s'$, $|J_0(K'')| = s''$, имеем $s' \leqslant s''$. Возможны два случая.

Случай 1: $s' = s''$. Тогда $J_0(K') = J_0(K'')$. Как было показано при доказательстве леммы 3, всякая конъюнкция K из некоторого K_r^s образуется композицией всех $K_{r,j}$, $j \in J_0(K)$. Поэтому конъюнкции K' и K'', являясь композициями одних и тех же $K_{r,j}$, совпадают.

Случай 2: $s' < s''$. Поскольку $J_0(K') \subseteq J_0(K'')$, имеем строгое включение

$$J_0(K') \subset J_0(K''). \tag{15}$$

Кроме того, из соотношения $K' \geqslant K''$ следует включение $J(K') \supseteq J(K'')$. Но согласно (14) верно соотношение

$$J(K') = N \backslash r^+(J_0(K')) \supseteq N \backslash r^+(J_0(K'')) = J(K'').$$

Поэтому $J(K') = J(K'')$, следовательно, $r^+(J_0(K')) = r^+(J_0(K''))$, что в сочетании с (15) противоречит простоте конъюнкции K''. Лемма 4 доказана.

Пример 1. Рассмотрим частичный порядок r, задаваемый базовым графом (т. е. графом без петель и транзитивно замыкающих дуг), представленным на рис. 1. В этом случае имеем

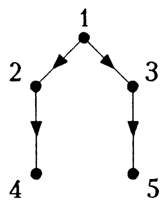

Рис. 1

$$N_r = \{1,2,3\}, \quad K_{r,1} = p_1,$$

$$K_{r,2} = p_1' \wedge p_2 \wedge p_3' \wedge p_5', \quad K_{r,3} = p_1' \wedge p_2' \wedge p_3 \wedge p_4',$$

$$\mathrm{K}_r^1 = \mathrm{K}_r = \{K_{r,1}, K_{r,2}, K_{r,3}\},$$

K_r^2 состоит из единственной конъюнкции $K_{r,2} \circ K_{r,3} = p_1' \wedge p_2 \wedge p_3$, $\mathrm{K}_r^s = \varnothing$ при $s \geqslant 3$. Следовательно,

$$g_{T_r} = p_1 \vee p_1' \wedge p_2 \wedge p_3' \wedge p_5' \vee p_1' \wedge p_2' \wedge p_3 \wedge p_4' \vee p_1' \wedge p_2 \wedge p_3 \vee p_1' \wedge p_2' \wedge p_3' \wedge p_4' \wedge p_5'.$$

Из теорем 2, 3 и 5 вытекает

Следствие 2. *Чтобы получить приведенную ДНФ функции g_{T_r} для произвольного отношения r, достаточно в правой части (13) вместо r использовать частичный порядок $\langle r \rangle = [r]'$, построенный по $[r]$ в соответствии с описанием перед теоремой 3, а вместо K_0 — конъюнкцию $\widehat{K}_0$ всех p_j', где j берется из области определения отношения $\langle r \rangle$. Если область определения отношения $\langle r \rangle$ пуста, то $g_{T_r} \equiv 1$.*

Следующее утверждение показывает, что приведенные ДНФ функций g_{T_r} могут иметь экспоненциальную сложность.

Утверждение 9. *Существует частичный порядок r такой, что приведенная ДНФ функции g_{τ_r} состоит из $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ конъюнкций.*

Доказательство. Пусть $n = 2m$. Рассмотрим отношение, задаваемое базисным графом (см. рис. 2). Для него конъюнкции $K_{r,i}$, образующие множество $\mathrm{K}_r = \mathrm{K}_r^1$, имеют вид

$$K_{r,i} = p_i \wedge \bigwedge_{j \in N \setminus \{i, m+i\}} p'_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

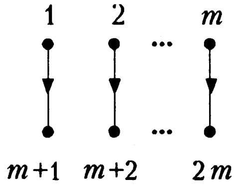

Рис. 2

Индукцией по s нетрудно проверить, что множества K_r^s, $s \geqslant 2$, составлены из всевозможных конъюнкций вида

$$p_{i_1} \wedge \ldots \wedge p_{i_s} \wedge \bigwedge_{j \in \{1, \ldots, 2m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_s, m+i_1, \ldots, m+i_s\}} p'_j,$$

а число t непустых множеств K_r^s равно m. Следовательно, общее число конъюнкций равно 2^m.

В случае нечетного $n = 2m + 1$ в качестве r нужно рассмотреть отношение, базисный граф которого получается из показанного на рис. 2 добавлением изолированной вершины $2m+1$. Утверждение 9 доказано.

Способ избавления от экспоненциальной сложности ДНФ за счет некоторого изменения постановки будет указан в § 6.

Замечание 4. В приложениях теории выбора чаще используются строгие (антирефлексивные) отношения. Приведем без доказательства переформулировку теоремы 5 для случая строгих отношений. Если ρ — нестрогий частичный порядок в $\mathbb{R}^n$, то через ρ^+ будем обозначать строгий частичный порядок, полученный из ρ удалением диагональных пар $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Согласно утверждению 8 функция g_{ρ^+} имеет вид $(p_1 \vee \ldots \vee p_n) \wedge g_\rho$. Пусть $(\mathrm{K}'_r)^1, (\mathrm{K}'_r)^2, \ldots, (\mathrm{K}'_r)^t$ — последовательность множеств конъюнкций, построенная в соответствии с описанием перед теоремой 5, если вместо K_r использовать множество K'_r из замечания 1.

Теорема 5′. *Если r — частичный порядок, то приведенной ДНФ функции $g_{\tau_{r^+}}$ является формула*

$$g_{\tau_{r^+}} = D(\mathrm{K}'_r)^1 \vee \ldots \vee D(\mathrm{K}'_r)^t.$$

§ 6. Дизъюнктивный базис

Будем говорить, что *множество конъюнкций* K *порождает функцию* $g(\widetilde{u})$, если дизъюнкция $(\vee \mathrm{K})$ является порождающей функцией для g, т. е. $g = [(\vee \mathrm{K})]$. Если ρ — транзитивное отношение и K порождает g_ρ, множество K будем называть *порождающим множеством отношения* ρ. Множество конъюнкций B называется *базисом транзитивного отношения* ρ, если оно является порождающим для ρ и никакое его собственное подмножество этим свойством не обладает. Базис называется *минимальным*, если суммарная длина входящих в него конъюнкций принимает наименьшее значение по всем базисам. Условимся считать, что базис универсального отношения $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ состоит из пустой конъюнкции, равной единице.

Утверждение 10. *Пусть функция* $g(\widetilde{u})$ *порождается множеством конъюнкций* K. *Тогда существует эффективный (полиномиальный) алгоритм, который по* K *и произвольному набору* $\widetilde{\alpha} \in \{-1, 0, 1\}^n$ *вычисляет значение* $g(\widetilde{\alpha})$.

Доказательство. Будем говорить, что *конъюнкция* K *(транзитивно) зависима от множества конъюнкций* K, если $K \leqslant [(\vee \mathrm{K})]$. Ввиду монотонности конъюнкций это означает наличие подмножества $\mathrm{K}' \subseteq \mathrm{K}$ такого, что $K \leqslant (\circ \mathrm{K}')$. Укажем эффективный алгоритм выяснения транзитивной зависимости. Пусть $\widehat{\mathrm{K}}$ — некоторое множество конъюнкций. Будем говорить, что *конъюнкция* $\widehat{K} = \widehat{q}_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{q}_n \in \widehat{\mathrm{K}}$ *несовместима с конъюнкцией* $K = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$ *относительно* $\widehat{\mathrm{K}}$, если

$$(\exists j \in J(\circ \widehat{\mathrm{K}})) \quad q_j \wedge \widehat{q}_j \neq q_j.$$

На шаге i $(i \leqslant 1)$ алгоритма образуется множество K_i путем устранения из K_{i-1} всех конъюнкций, не совместимых с K относительно K_{i-1} (объявляется $\mathrm{K}_0 = \mathrm{K}$). Если $\mathrm{K}_i = \varnothing$ либо $\mathrm{K}_i = \mathrm{K}_{i-1}$, то работа алгоритма завершена и результатом считается K_i. В противном случае осуществляется переход к шагу $i + 1$.

Пусть остановка алгоритма произошла после шага m. Покажем, что K транзитивно зависит от K тогда и только тогда, когда $\mathrm{K}_m \neq \varnothing$.

Если $\mathrm{K}_m \neq \varnothing$, то все конъюнкции $K' \in \mathrm{K}_m$ совместимы относительно K_m (иначе процедура должна быть продолжена). В этом случае

$$(\forall K' \in \mathrm{K}_m)(\forall j \in J(\circ \mathrm{K}_m)) \quad q_j \leqslant q'_j,$$

что приводит к соотношению $K \leqslant (\circ \mathrm{K}_m)$, которое означает зависимость K от K.

Обратно, пусть K транзитивно зависит от K и для некоторого $\widehat{\mathrm{K}} \subseteq \mathrm{K}$ справедливо неравенство $K \leqslant (\circ \widehat{\mathrm{K}})$. Легко видеть, что это означает

совместимость каждой конъюнкции $\widehat{K} \in \widehat{\mathrm{K}}$ с K относительно $\widehat{\mathrm{K}}$. При этом конъюнкция $\widehat{K}$ совместима с K и относительно всякого бо́льшего множества $\mathrm{K}' \supseteq \widehat{\mathrm{K}}$. На первом шаге алгоритма удаляются конъюнкции, не совместимые с K относительно $\mathrm{K}_0 = \mathrm{K}$ и, тем более, относительно $\widehat{\mathrm{K}}$. Поэтому $\mathrm{K}_1 \supseteq \widehat{\mathrm{K}}$. Применяя эти рассуждения к K_1 и т. д., заключаем, что K_m, полученное после остановки алгоритма, включает $\widehat{\mathrm{K}}$, а потому непусто.

Пусть требуется вычислить значение $g(\widetilde{\alpha}) = g(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. С набором $\widetilde{\alpha}$ свяжем конъюнкцию $K_{\widetilde{\alpha}} = q_1 \wedge \dots \wedge q_n$, где

$$q_i = \begin{cases} p_i, & \text{если } \alpha_i = 1, \\ p'_i & \text{если } \alpha_i = 0, \\ 1, & \text{если } \alpha_i = -1. \end{cases}$$

Поскольку функция $g = [(\vee \mathrm{K})]$ монотонна, а $K_{\widetilde{\alpha}}$ является наименьшей конъюнкцией, обращающейся в единицу на наборе $\widetilde{\alpha}$, равенство $g(\widetilde{\alpha}) = 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $K_{\widetilde{\alpha}}$ зависит от K. Этот факт может быть проверен с помощью описанного алгоритма. Утверждение 10 доказано.

Следствие 3. *Существует эффективный алгоритм, который по произвольному отношению r и точкам $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ устанавливает, имеет ли место соотношение $\mathbf{x}\tau_r\mathbf{y}$.*

Доказательство. Достаточно в качестве порождающего множества взять множество $\mathrm{K}_r \cup \{K_0\}$ (теорема 1), в качестве $\widetilde{\alpha}$ — набор $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и воспользоваться утверждением 3. Следствие 3 доказано.

Таким образом, роль ДНФ функции g_{τ_r} может играть $D\mathrm{K}$, где K — любое порождающее множество отношения τ_r: $D\mathrm{K}$ является ДНФ и позволяет эффективно вычислять значения функции. Порождающие множества (и даже базисы) могут значительно отличаться по сложности. В подтверждение приведем пример двух базисов, задающих один и тот же частичный порядок:

$$\mathrm{B}_1 = \{p_1, p'_1 \wedge \dots \wedge p'_n\},$$

$$\mathrm{B}_2 = \{p_1 \wedge p'_3 \wedge \dots \wedge p'_n, p_1 \wedge p'_2 \wedge p'_4 \wedge \dots \wedge p'_n, \dots, p_1 \wedge p'_2 \wedge \dots \wedge p'_{n-1}, p'_1 \wedge \dots \wedge p'_n\}.$$

Рассмотрим вопрос о наилучших порождающих множествах — минимальных базисах. Начнем со случая частичных порядков r. В [9] установлено, что всякий частичный порядок ρ обладает единственным базисом, и указан эффективный алгоритм его нахождения. Для отношений τ_r этот базис имеет простой вид и доказательство его минимальности значительно проще, чем в общем случае.

Теорема 6. *Если r — частичный порядок, то* $\mathrm{B}_r = \mathrm{K}_r \cup \{K_0\}$ *является единственным минимальным базисом отношения* τ_r.

Доказательство разобьем на ряд простых утверждений. Обозначим через K произвольное порождающее множество для τ_r.

1. *Если K — конъюнкция приведенной ДНФ функции g_{τ_r}, то найдется* $\mathrm{K}' \subseteq \mathrm{K}$ *такое, что* $(\circ\mathrm{K}') = K$. Из $K \leqslant [\mathrm{K}]$ и монотонности конъюнкций следует, что $K \leqslant (\circ\mathrm{K}')$ для некоторого $\mathrm{K}' \subseteq \mathrm{K}$. Строгого неравенства здесь быть не может, поскольку $(\circ\mathrm{K}') \leqslant g_{\tau_r}$, а конъюнкции приведенной ДНФ максимальны.

2. *Для каждого $i \in N_r$ в* K *имеется конъюнкция K_i', являющаяся расширением $K_{r,i}$, т. е.* $K_i' = K_{r,i}K''$, $J(K_{r,i}) \cap J(K'') = \varnothing$. Возьмем $\mathrm{K}' \subseteq \mathrm{K}$ такое, что $K_{r,i} = (\circ\mathrm{K}')$. Согласно определению композиции получаем

$$(\forall K' = q_1' \wedge \ldots \wedge q_n' \in \mathrm{K}')(\forall j \in J(K_{r,i})\backslash\{i\}) \quad q_j' = p_j',$$
$$(\exists K' \in \mathrm{K}') \quad q_i' = p_i.$$

Конъюнкция K', удовлетворяющая этим условиям, может быть взята в качестве K_i'.

3. *Для различных $i \in N_r$ расширения K_i' конъюнкций $K_{r,i}$ различны.* Предположим, что $K_{r,i} = q_1^{(i)} \wedge \ldots \wedge q_n^{(i)}$ и $K_{r,j} = q_1^{(j)} \wedge \ldots \wedge q_n^{(j)}$, $i \neq j$, имеют одинаковое расширение. В этом случае $q_i^{(i)} = p_i$, $q_i^{(j)} = 1$, $q_j^{(i)} = 1$, $q_j^{(j)} = p_j$, поэтому согласно (6) справедливы соотношения irj и jri, что противоречит условию антисимметричности r.

4. *Множество* K *содержит* K_0. В соответствии с п. 1 доказательства $K_0 = (\circ\mathrm{K}')$ для некоторого $\mathrm{K}' \subseteq \mathrm{K}$. Но композиция конъюнкций равна K_0 лишь в случае, когда они совпадают с K_0.

5. *Множество* $\mathrm{B}_r = \mathrm{K}_r \cup \{K_0\}$ *является базисом.* Действительно, по теореме 1 оно порождает τ_r, а при устранении из B_r какой-либо конъюнкции будут нарушены п. 2 или п. 4 доказательства.

6. *Минимальный базис единствен и совпадает с* B_r. Пусть B — произвольный базис. Для каждого $i \in N_r$ в B присутствует конъюнкция $K_i \neq K_0$, длина которой не меньше длины конъюнкции $K_{r,i}$ (разным i соответствуют разные K_i') и, кроме того, $K_0 \in \mathrm{B}$. Поэтому суммарная длина конъюнкций из B_r не больше суммарной длины конъюнкций из B, а если $\mathrm{B} \neq \mathrm{B}_r$, то неравенство строгое. Теорема 6 доказана.

Следствие 4. *При любом r минимальный базис отношения τ_r единствен и совпадает с* $\mathrm{K}_{\langle r\rangle} \cup \{\widehat{K}_0\}$, *если область определения отношения $\langle r\rangle$ непуста ($\langle r\rangle$ и $\widehat{K}_0$ определены в следствии 2). В противном случае минимальный базис состоит из пустой конъюнкции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из теорем 2, 3, 6 с учетом того факта, что конъюнкции минимального базиса не содержат фиктивных переменных.

Следствие 5. *Множество* $\mathrm{K}_r \cup \{K_0\}$ *является базисом тогда и только тогда, когда r ациклично, и минимальным базисом тогда и только тогда, когда r — частичный порядок.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в r имеется цикл $i_1 r i_2 r \dots r i_t r i_1$, то композиция $K_{r,i_1} \circ \dots \circ K_{r,i_t}$ содержит лишь переменные вида p'_j. Эта композиция поглощает конъюнкцию K_0 и последняя может быть удалена из порождающего множества $\mathrm{K}_r \cup \{K_0\}$. Когда r ациклично, композиция любых конъюнкций из $\mathrm{K}_r \cup \{K_0\}$, отличных от $K_{r,i}$, содержит некоторый сомножитель p_j, $j \neq i$, и не может поглотить $K_{r,i}$. Поэтому конъюнкция $K_{r,i}$ не может быть удалена из порождающего множества. Аналогично доказывается невозможность удаления K_0. Далее, если r ациклично, то согласно теореме 2 $\tau_r = \tau_{[r]}$, где $[r]$ — частичный порядок. По теореме 6 минимальным базисом отношения τ_r является множество $\mathrm{K}_{[r]} \cup \{K_0\}$, которое в случае нетранзитивного r отлично от $\mathrm{K}_r \cup \{K_0\}$. Следствие 5 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Переформулировка теоремы 6 для строгих отношений τ_r^+ получается, если в качестве B_r взять множество B'_r, введенное в замечании 1.

§ 7. Представление в виде пересечения лексикографий

Под *сложностью формулы* $\Phi(p_1, \dots, p_n, p'_1, \dots, p'_n)$ будем понимать число входящих в нее символов p и p'. В данном параграфе строятся формулы для g_{τ_r}, имеющие полиномиальную сложность. Начнем со случая частичных порядков r.

Из результатов [7] следует, что всякое правильное отношение, являющееся частичным порядком, может быть представлено в виде пересечения лексикографий. Поскольку в классе правильных отношений лексикографии (и только они) являются линейными порядками, высказанное утверждение есть аналог известного факта о представимости частичного порядка в виде пересечения линейных порядков.

Рассмотрим вопрос о представлении отношения τ_r в виде пересечения лексикографий на основе представления частичного порядка r через линейные порядки.

Разложение

$$r = l_1 \cap \dots \cap l_k \tag{16}$$

частичного порядка на линейные назовем *продуктивным*, если $\tau_r = \lambda_1 \cap \dots \cap \lambda_k$, где $\lambda_i = \tau_{l_i}$ — лексикография, соответствующая линейному

порядку l_i. Выделим специальный класс представлений (16). Разложение (16) назовем *тонким*, если для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, найдется s, $1 \leqslant s \leqslant k$, такое, что $l_s^{-1}(i) = r^{-1}(i)$.

Утверждение 11. *Для любого частичного порядка r на n элементах существует тонкое разложение, использующее не более n линейных порядков, причем n линейных порядков используется лишь на диагональном отношении $r = \Delta = \{(i,i) \mid i \in N\}$.*

Доказательство. Для $i \in N$ введем множества

$$A(i) = r^{-1}(i)\backslash\{i\}, \quad B(i) = N\backslash r^{-1}(i).$$

Если $x \in A(i)$, $y \in B(i)$, то $y\overline{r}x$. Действительно, если предположить yrx, то в силу xri справедливо yri, что противоречит условию $y \in r^{-1}(i)$.

Частичные порядки $r\backslash A(i)$ и $r\backslash B(i)$, являющиеся сужениями r на множества $A(i)$ и $B(i)$, дополним до линейных порядков l'_i на $A(i)$ и l''_i на $B(i)$. Пусть $l'_i = (x_{a_1}x_{a_2}\ldots x_{a_u})$, т. е.

$x_{a_1}l'_ix_{a_2}l'_i\ldots l'_ix_{a_u})$, $l''_i = (y_{b_1}y_{b_2}\ldots y_{b_v})$. Образуем линейный порядок $l_i = (x_{a_1}\ldots x_{a_u}iy_{b_1}\ldots y_{b_v})$. Тогда $l^{-1}(i) = A(i) \cup \{i\} = r^{-1}(i)$. Покажем, что $l_1 \cap \ldots l_n = r$. Для всякого $i \in N$ справедливо соотношение $l_i \supseteq r$. В этом легко убедиться, взяв произвольную пару $(x,y) \in r$ $(x \neq y)$ и рассмотрев случаи $x, y \in A(i)$, $x, y \in B(i)$, $x = i \vee y = i$, $x \in A(i) \wedge y \in B(i)$ (случай $x \in B(i) \wedge y \in A(i)$ невозможен, поскольку тогда $x\overline{r}y$). Из соотношение $l_i \supseteq r$ следует равенство $l_1 \cap \ldots \cap l_n \supseteq r$.

Установим обратное включение. Пусть $(x,y) \notin r$. Тогда $x \notin r^{-1}(y)$ и, поскольку $x \neq y$ (r рефлексивно), имеем $x \in B(y)$. Следовательно, $(x,y) \notin l_y$ и $(x,y) \notin l_1 \cap \ldots \cap l_n$.

Легко видеть, что если r содержит хотя бы одну пару (i,j), то число k линейных порядков в тонком разложении r может быть взято строго меньше n за счет совмещения отношений l_i и l_j. В случае $r = \Delta$ для каждого $i \in N$ имеем $r^{-1}(i) = \{i\}$. Поэтому в (16) должен существовать линейный порядок, для которого элемент i является старшим, и разложение содержит не менее n линейных порядков. Утверждение 11 доказано.

Отметим, что если не налагать требования тонкости разложения, то любой частичный порядок может быть представлен в виде пересечения $\lfloor n/2 \rfloor$ линейных порядков [10], а для диагонального отношения Δ достаточно двух линейных порядков.

Следующая теорема показывает, что всякое тонкое разложение является продуктивным.

Теорема 7. *Если r — отношение частичного порядка и $r = l_1 \cap \ldots \cap l_k$ — тонкое разложение, то $\tau_r = \lambda_1 \cap \ldots \cap \lambda_k$, где $\lambda_i = \tau_{l_i}$ — лексикография, порожденная линейным порядком λ_i, $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Доказательство. Сначала убедимся, что

$$\tau_r \subseteq \lambda_1 \cap \ldots \cap \lambda_k. \tag{17}$$

Очевидно, что если r_1, r_2 — отношения, $r_1 \subseteq r_2$, и ρ согласовано с r_2, то ρ согласовано с r_1. Применив этот вывод к отношениям r, l_i и λ_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, заключаем, что λ_i согласовано с r. Поскольку лексикографии транзитивны, приходим к (17).

Обратное включение $\tau_r \supseteq \lambda_1 \cap \ldots \cap \lambda_k$ будем доказывать в виде

$$g_{\tau_r} \geqslant g_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge g_{\lambda_k}. \tag{18}$$

В [7] показано, что лексикографии λ, связанной с упорядочением $l = (i_1 i_2 \ldots i_n)$, соответствует ДНФ

$$g_\lambda = p_{i_1} \vee p'_{i_1} \wedge p_{i_2} \vee \ldots \vee p'_{i_1} \wedge \ldots \wedge p'_{i_{n-2}} \wedge p_{i_{n-1}} \vee p'_{i_1} \wedge \ldots \wedge p'_{i_n}. \tag{19}$$

Заменив в (18) каждую функцию g_{λ_i} представлением (19) и воспользовавшись равенством $p'_{i_1} \wedge \ldots \wedge p'_{i_n} = K_0$ правую часть (18) можно записать в виде $g'_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge g'_{\lambda_k} \vee K_0$, где g'_λ получено из g_λ отбрасыванием последней конъюнкции в (19).

В соответствии с замечанием 3 левая часть неравенства (18) совпадает с $[(\vee \mathrm{K}'_r)] \vee K_0$. С учетом сказанного неравенство (18) может быть представлено в виде

$$[(\vee \mathrm{K}'_r)] \vee K_0 \geqslant g'_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge g'_{\lambda_k} \vee K_0,$$

и для его доказательства достаточно убедиться, что

$$[(\vee \mathrm{K}'_r)] \geqslant g'_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge g'_{\lambda_k}.$$

В результате раскрытия скобок в правой части получаем дизъюнкцию всевозможных конъюнкций $K = K_1 \wedge K_2 \wedge \ldots \wedge K_k$, где K_i — конъюнкция из ДНФ функции g'_{λ_i}. Поэтому достаточно установить, что каждая такая конъюнкция покрывается некоторой композицией $K_{r,i_1} \circ \ldots \circ K_{r,i_p}$ конъюнкций из K'_r.

Всякая конъюнкция K_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, имеет единственный сомножитель $p_j = p_{j(i)}$. Возьмем соответствующую конъюнкцию $K_{r,j(i)}$ и образуем композицию $K' = K_{r,j(1)} \circ \ldots \circ K_{r,j(k)}$. Покажем, что $K' \geqslant K$. Достаточно проверить, что $J(K') \subseteq J(K)$ и $J_0(K') \subseteq J_0(K)$ (здесь под K понимается элементарная конъюнкция, полученная из $K_1 \wedge \ldots \wedge K_k$ устранением поглощаемых сомножителей). Если $s \in J_0(K')$, то найдется конъюнкция $K_{r,j(i)}$, имеющая сомножитель $p_s = p_{j(i)}$. Но тогда сомножитель p_s входит в K_i и, следовательно, в K.

Пусть теперь $s \in J(K')\backslash J_0(K')$. Тогда в K' имеется сомножитель p'_s, и по свойству операции композиции этот сомножитель присутствует во всех $K_{r,j(i)}$. В силу (6) это означает, что $s \notin r(j(i))$. Следовательно, $j(i) \notin r^{-1}(s)$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Поскольку разложение является тонким, существует линейный порядок l_u, $1 \leqslant u \leqslant k$, такой, что $l_u^{-1}(s) = r^{-1}(s)$. Поэтому $j(i) \notin l_u^{-1}(s)$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant k$, и, в частности, $j(u) \notin l_u^{-1}(s)$. Это означает, что $sl_u j(u)$, а потому конъюнкция K_u, образованная сомножителями $p_{j(u)}$ и p'_v, где $v \in l_u^{-1}(j(u))\backslash\{j(u)\}$, содержит p'_s и $s \in J(K)$. Теорема 7 доказана.

Обозначим через $k(\tau_r)$ минимальное число лексикографий, дающих в пересечении τ_r, а через $k(n)$ — максимум $k(\tau_r)$, взятый по всем частичным порядкам r на N.

Утверждение 12. *Справедливо равенство $k(n) = n$, причем существует единственное отношение частичного порядка $r = \Delta$, для которого $k(\tau_r) = n$.*

Доказательство. Из теоремы 7 и утверждения 11 следует, что $k(\tau_r) \leqslant n$, причем для $r \neq \Delta$ неравенство строгое. Если $r = \Delta$, то $\mathrm{K}_r = \varnothing$ и согласно теореме 5 $g_{\tau_\Delta} = K_0 = p'_1 \wedge \ldots \wedge p'_n$. Разложение τ_Δ, на котором достигается значение $k(\tau_\Delta)$, запишем в терминах представляющих функций с учетом (19) в виде

$$p'_1 \wedge \ldots \wedge p'_n = (p_{i_1} \vee \ldots) \wedge \ldots \wedge (p_{i_k} \vee \ldots).$$

После раскрытия скобок правая часть содержит конъюнкцию длины k и, поскольку левая часть является конъюнкцией длины n, справедливо соотношение $k(\tau_\Delta) = k \geqslant n$. Утверждение 12 доказано.

Используя представление функции (19) по схеме Горнера

$$g_\lambda = p_{i_1} \vee p'_{i_1} \wedge (p_{i_2} \vee p'_{i_2} \wedge (\ldots p'_{i_{n-2}} \wedge (p_{i_{n-1}} \vee p'_{i_{n-1}} \wedge p'_{i_n}) \ldots)),$$

имеющее сложность $2n-1$, функцию g_{τ_r} для произвольного частичного порядка r можно реализовать формулой, сложность которой не выше $n(2n-1)$.

Пример 2 (см. рис. 1). Возьмем в качестве тонкого разложения $r = (12435) \cap (13524)$. Используя представление лексикографий по схеме Горнера, приходим к формуле

$$\begin{aligned} g_{\tau_r} = (p_1 \vee p'_1 \wedge (p_2 \vee p'_2 \wedge (p_4 \vee p'_4 \wedge (p_3 \vee p'_3 \wedge p'_5)))) \\ \wedge (p_1 \vee p'_1 \wedge (p_3 \vee p'_3 \wedge (p_5 \vee p'_5 \wedge (p_2 \vee p'_2 \wedge p'_4)))). \end{aligned}$$

Пусть r — произвольное отношение. Тогда в соответствии с теоремами 2 и 3 нужно построить частичный порядок $\langle r \rangle = [r]'$, заданный на

некотором пространстве $\mathbb{R}^m$, $m \leqslant n$. Если $m > 0$, то $g_{\tau_r} = g_{\tau_{(r)}}$, а если $m = 0$, то $g_{\tau_r} \equiv 1$. Таким образом, способ построения формул для частичных порядков дает способ построения формул для произвольных отношений и оценка $n(2n-1)$ сохраняется в общем случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Теорему 7 можно переформулировать для строгих отношений τ_r^+ с заменой лексикографий λ_i строгими лексикографиями λ_i^+. Для них формула (19) приобретает вид

$$g_\lambda^+ = p_{i_1} \vee p'_{i_1} \wedge p_{i_2} \vee \ldots \vee p'_{i_1} \wedge \ldots \wedge p'_{i_{n-1}} \wedge p_{i_n}.$$

§ 8. Конъюнктивное представление

С отношением r свяжем систему дизъюнкций

$$D_{r,i} = \Bigl(\bigvee_{j \in r^{-1}(i) \setminus \{i\}} p_j\Bigr) \vee p'_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{20}$$

Укажем явный вид приведенной КНФ функции g_{τ_r}. Начнем со случая частичных порядков.

Теорема 8. *Если r — частичный порядок, то приведенной* КНФ *функции g_{τ_r} является формула*

$$g_{\tau_r} = \bigwedge_{j \in N} D_{r,i}. \tag{21}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 7 представим функцию g_{τ_r} в виде

$$g_{\tau_r} = g_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge g_{\lambda_k}, \tag{22}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — лексикографии, соответствующие линейным порядкам $l_1, \ldots, l_k$, образующим тонкое разложение r. Если $l_s = (i_1 i_2 \ldots i_n)$, то согласно [6] КНФ функции g_{Λ_s} имеет вид

$$g_{\lambda_s} = p'_{i_1} \wedge (p_{i_1} \vee p'_{i_2}) \wedge \ldots \wedge (p_{i_1} \vee \ldots \vee p_{i_{n-1}} \vee p'_{i_n})$$

и с помощью обозначений, аналогичных (20), может быть записана следующим образом:

$$g_{\lambda_s} = D_{l_s,i_1} \wedge D_{l_s,i_2} \wedge \ldots \wedge D_{l_s,i_n} = D_{i_s,1} \wedge D_{l_s,2} \wedge \ldots \wedge D_{l_s,n}.$$

Подставив это равенство в (22) и перегруппировав члены, получаем

$$g_{\tau_r} = \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} \bigwedge_{1 \leqslant s \leqslant k} D_{l_s,i}. \tag{23}$$

Для любых l_s и i имеем $l_s^{-1}(i) \supseteq r^{-1}(i)$, поэтому $D_{l_s,i} \geqslant D_{r,i}$. В то же время среди l_s имеется порядок $l_{s(i)}$ такой, что $l_{s(i)}^{-1}(i) \supseteq r^{-1}(i)$ (разложение тонкое). Из приведенных фактов следует равенство

$$\bigwedge_{1\leqslant s\leqslant k} D_{l_s,i} = D_{r,i}. \tag{24}$$

Подставив (24) в (23), получаем (21).

Дизъюнкция $D_{r,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, не может поглотить $D_{r,j}$ $(j \neq i)$, поскольку в $D_{r,j}$ присутствует p'_j.. Это означает, что КНФ вида (21) является приведенной. Теорема 8 доказана.

Пример 3 (см. рис. 1). Применение теоремы 8 дает

$$g_{\tau_r} = p'_1 \wedge (p_1 \vee p'_2) \wedge (p_1 \vee p'_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p'_4) \wedge (p_1 \vee p_3 \vee p'_5).$$

Следствие 6. *Разложение (16) частичного порядка r продуктивно тогда и только тогда, когда оно тонко.*

Доказательство. Продуктивность произвольного тонкого разложения доказана в теореме 7. Обратно, если разложение (16) не является тонким, то для некоторого i при всех s имеем $l_s^{-1}(i) \neq r^{-1}(i)$. Это приводит к неравенству в (24), поэтому в приведенной КНФ нет сомножителя $D_{l_s,i}$, что в силу единственности приведенной КНФ противоречит теореме 8. Следствие 6 доказано.

Следствие 7. *Приведенная КНФ функции g_{τ_r} совпадает с КНФ, построенной по теореме 8 для частичного порядка $\langle r\rangle = [r]'$, а если область определения отношения $\langle r\rangle$ пуста, то $g_{\tau_r} \equiv 1$.*

Утверждение 13. *Сложность приведенной КНФ функции g_{τ_r} не превосходит $n(n+1)/2$ и равна $n(n+1)/2$ лишь на отношениях лексикографии.*

Доказательство. В силу $\tau_{[r]} = \tau_r$ отношение r можно считать транзитивным. Если r — частичный порядок, то из (20) и (21) следует, что сложность приведенной КНФ для g_{τ_r} равна $|r|$. Максимальное значение $|r|$, равное $n(n+1)/2$, достигается лишь на линейных порядках. Им соответствуют лексикографии. Случай, когда в транзитивном отношении имеется цикл, сводится к рассмотрению частичного порядка на некотором подмножестве N (теорема 3). Утверждение 13 доказано.

Для строгих отношений τ_r^+ теорему 8 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 8$'$. *Если r — частичный порядок, то приведенная КНФ функции $g^{+}_{T_r}$ имеет вид*

$$g^{+}_{T_r} = (p_1 \vee \ldots \vee p_n) \bigwedge_{i \in N} D_{r,l},$$

где $N' = N$, если r имеет несколько минимальных элементов, и $N' = N \backslash \{m\}$, если m является единственным минимальным элементом.

Максимальная сложность приведенной КНФ функции $g^{+}_{T_r}$ равна $n(n+3)/2-1$ и достигается лишь на отношении r, полученном из линейного порядка удалением пары (m, m'), где m — минимальный элемент, а m' — предшествующий ему элемент.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hwang C. L., Yoon K.** Multiple attribute decision-making. Methods and applications. A state-of-the-art-survey. Berlin: Springer-Verl., 1981. (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems; V. 186).
2. **Подиновский В. В.** Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 2. С. 130–141.
3. **Подиновский В. В.** Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности критериями // Автоматика и телемеханика. 1976. № 11. С. 118–127.
4. **Ириков В. А., Курилов Л. Е.** Оценка сложности диалоговой процедуры определения приоритетов // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика. 1974. № 1. С. 12–21.
5. **Березовский Б. А., Кемпнер Л. М.** Вложенные модели многопараметрической оптимизации с упорядоченными по важности критериями // Автоматика и телемеханика. 1981. № 1. С. 105-112.
6. **Березовский Б. А., Барышников Ю. М., Борзенко В. И., Кемпнер Л. М.** Многокритериальная оптимизация. Математические аспекты. М.: Наука, 1989.
7. **Виноградская Т. М., Рубчинский А. А.** Логические формы бинарных отношений в критериальном пространстве // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251,№ 2. С. 300–304.
8. **Шоломов Л. А.** Логические методы исследования отношений в критериальных пространствах: построение и анализ отношений. М., 1990. (Препринт / РАН. ВНИИ системных исследований).

9. **Шоломов Л. А.** Исследование отношений в критериальных пространствах и синтез операторов группового выбора // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5. М.: Наука, 1993. С. 109–143.
10. **Hiraguchi T.** On the dimension of partially ordered sets // Sci. Rep. Kanazawa University. 1951. V. 1, N 2. P. 77–94.
11. **Адельсон-Вельский Г. М., Диниц Е. А., Карзанов А. В.** Потоковые алгоритмы. М.: Наука, 1975.

Адрес автора:

РОССИЯ,
117312, Москва,
пр. 60-летия Октября, 9,
Институт системного
анализа РАН

Статья поступила

10 января 1994 г.