ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь – март 1995. Том 2, № 1, 36–49

УДК 519.714

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО СОСТАВА СИСТЕМЫ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ

Ю. А. Кочетов, М. Г. Пащенко

Формулируются динамические задачи выбора оптимального состава системы технических средств и приводятся алгоритмы их решения, основанные на двойственной декомпозиции. Для решения подзадач приводится точный эффективный алгоритм и доказывается, что разрыв двойственности может быть сколь угодно большим. Выделяется подкласс задач, для которых двойственная задача полиномиально разрешима. Рассматриваются обобщения исходной задачи на случай нелинейной зависимости стоимости изделий от размера партии и дополнительных ограничений на номенклатуру технических средств. Приводятся результаты тестовых расчетов.

Предположим, что в течение определенного планового периода необходимо выполнить заданную совокупность работ. Для выполнения работ имеется система технических средств. Состав системы может меняться за счет пополнения новыми образцами и изъятия части средств по причинам их морального или физического старения. Динамическая задача выбора оптимального состава системы состоит в том, чтобы найти такой вариант развития системы, который доставлял бы минимум суммарных затрат на разработку, производство и эксплуатацию технических средств при условии выполнения каждый год заданного списка работ.

Первые постановки динамических задач выбора оптимального состава системы изучались в работе [1], где, в частности, найдено точное решение задачи в предположении, что в определенные моменты времени может проводиться полная замена старой системы технических средств новой системой. Эти результаты вошли в монографию [2], в которой наиболее полно представлена проблематика задач выбора оптимального состава систем.

Одним из частных случаев сформулированной задачи является динамическая задача о размещении производства [3], для решения которой предложены как приближенные [4], так и точные алгоритмы [5, 6], основанные на вычислительной схеме метода ветвей и границ. В более

простой постановке данная задача рассматривалась в [7], где также использовались идеи метода ветвей и границ. Однако специфика данной задачи, а именно нетривиальная подзадача линейного программирования, получаемая при фиксированных целочисленных переменных, значительно затрудняет использование данного метода.

В настоящей работе рассматриваются динамическая задача выбора оптимального состава системы и некоторые варианты ее обобщения. Предложенные алгоритмы решения основаны на двойственной декомпозиции и используются для приближенного решения с апостериорной оценкой точности. В § 1 приводится математическая постановка задачи, описываются эффективные алгоритмы нахождения нижней оценки а также схема решения задачи. В § 2 рассматриваются динамические задачи с дополнительными ограничениями на номенклатуру технических средств. Сформулированы две близкие постановки задачи и предложены алгоритмы их решения. В § 3 изучаются динамические задачи, в которых стоимость производства изделий зависит от суммарного объема выпуска. В § 4 приводятся результаты численных экспериментов и обсуждаются пути дальнейших исследований.

§ 1. Динамическая задача выбора оптимального состава системы

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим плановый период, в течение которого система технических средств должна выполнить определенные объемы работ. Пусть l — продолжительность планового периода (измеренная для определенности в годах) и $T = \{1,\ldots,l\}$. Множество рассматриваемых образцов технических средств обозначим через $I = \{1,\ldots,m\}$, а множество работ, подлежащих выполнению в течение всего интервала планирования, — через $J = \{1,\ldots,n\}$. Будем предполагать, что множество J разбито на непересекающиеся подмножества $J_t, t \in T$, и для каждого $j \in J$ известен номер $t(j)$ такой, что $j \in J_{t(j)}$. Для изделий i-го образца, $i \in I$, считаем заданными следующие величины:

c°_{it} — стоимость разработки изделия к t -му году,

c_{it} — стоимость производства одного изделия в t-м году,

c_{ij} — стоимость выполнения j-й работы,

p_{ij} — число изделий, требующихся для выполнения j-й работы,

ρ_i — длительность эксплуатации одного изделия,

v°_{it} — начальный состав системы к t-му году,

V_{it} — верхняя граница объемов производства изделий в t-м году.

Переменные задачи (z_{it}), (v_{it}), (x_{it}) имеют следующий смысл:

$$z_{it} = \begin{cases} 1, & \text{если в } t\text{-м году закончена разработка изделий } i\text{-го образца,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$v_{it} \geqslant 0$ — объем производства изделий i-го образца в t-м году,
$x_{ij} \geqslant 0$ — доля j-й работы, выполняемая изделиями i-го образца.

Используя введенные обозначения, динамическая задача выбора оптимального состава системы записывается следующим образом.

Задача P. *Найти*

$$\min \sum_{t\in T} \sum_{i\in I} \Big\{ c^{\circ}_{it} z_{it} + c_{it} v_{it} + \sum_{j\in J_t} c_{ij} x_{ij} \Big\} \tag{1}$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \qquad j \in J, \tag{2}$$

$$\sum_{j\in J_t} p_{ij} x_{ij} \leqslant v^{\circ}_{it} + \sum_{\tau=t-\rho_i+1}^{t} v_{i\tau}, \qquad i \in I,\ t \in T, \tag{3}$$

$$0 \leqslant v_{it} \leqslant V_{it} \max_{\tau\leqslant t} z_{i\tau}, \qquad i \in I,\ t \in T, \tag{4}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant \max_{\tau\leqslant t(j)} z_{i\tau}, \qquad i \in I,\ j \in J, \tag{5}$$

$$z_{it} \in \{0,1\}, \qquad i \in I,\ t \in T. \tag{6}$$

Целевая функция задачи P имеет смысл суммарных затрат на разработку, производство и эксплуатацию технических средств в течение планового периода. Равенства (2) гарантируют выполнение всех работ. Неравенства (3) ограничивают возможности выполнения работ имеющимися в наличии изделиями. Условия (4) устанавливают верхнюю границу на возможные объемы производства, а неравенства (5) требуют внесения затрат на разработку новых образцов при включении их в состав системы.

Сформулированная задача относится к числу NP-трудных задач дискретной оптимизации, так как является обобщением задачи о минимальном покрытии [8].

1.2. Нижние оценки. Представим исходную задачу в следующей эквивалентной формулировке.

Задача P_y. *Найти*

$$F_p = \min \sum_{i\in I} \sum_{t\in T} \Big\{ c^{\circ}_{it} z_{it} + c_{it} v_{it} + \sum_{j\in J_t} c_{ij} x_{ij} \Big\} \tag{7}$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \qquad j \in J, \tag{8}$$

$$\sum_{j\in J_t} p_{ij}x_{ij} \leqslant v^{\circ}_{it}y_{it} + \sum_{\tau=t-\rho_i+1}^{t} v_{i\tau}, \qquad i \in I, t \in T, \tag{9}$$

$$y_{it} \leqslant \sum_{\tau\leqslant t} z_{i\tau} \leqslant 1, \qquad i \in I, t \in T, \tag{10}$$

$$0 \leqslant v_{it} \leqslant V_{it}y_{it}, \qquad i \in I, t \in T, \tag{11}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant y_{it_{(j)}}, \qquad i \in I, j \in J, \tag{12}$$

$$y_{it}, z_{it} \in \{0,1\}, \qquad i \in I, t \in T. \tag{13}$$

Через $\overline{\mathrm{P}_y}$ обозначим линейную релаксацию задачи P_y, а через $\overline{F_{\mathrm{P}}}$ — оптимальное значение целевой функции задачи $\overline{\mathrm{P}_y}$. В дальнейшем черта сверху означает переход к линейной релаксации.

Рассмотрим следующую оценочную задачу.

Задача $\mathrm{LR}(\lambda)$. *Найти*

$$F_{\mathrm{LR}}(\lambda) = \min \sum_{i\in I}\sum_{t\in T}\Big\{c^{\circ}_{it}z_{it} + c_{it}v_{it} + \sum_{j\in J_t}(c_{ij}-\lambda_j)x_{ij}\Big\} + \sum_{j\in J}\lambda_j$$

при ограничениях (9)–(13), *где* $\lambda_j, j \in J,$ — *множители Лагранжа, соответствующие равенствам* (8).

Решение $F_{\mathrm{D}} = \max_\lambda F_{\mathrm{LR}}(\lambda)$ двойственной задачи D доставляет нижнюю оценку оптимального значения целевой функции (1):

$$F_{\mathrm{P}} \geqslant F_{\mathrm{D}} \geqslant F_{\mathrm{LR}}(\lambda).$$

Теорема 1. *Оценочная задача* $\mathrm{LR}(\lambda)$ *полиномиально разрешима.*

Доказательство. При фиксированных значениях λ_j, $j \in J$, задача $\mathrm{LR}(\lambda)$ распадается по i на независимые подзадачи S_i следующего вида. Найти

$$f_i = \max \sum_{t\in T}\Big\{\sum_{j\in J_t}(\lambda_j - c_j)x_j - c_t v_t - c^{\circ}_t z_t\Big\}$$

при следующих ограничениях:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\in J_t} p_j x_j \leqslant v_t^\circ y_t + \sum_{\tau=t-\rho+1}^{t} v_\tau, && t\in T,\\
&y_t \leqslant \sum_{\tau\leqslant t} z_\tau \leqslant 1, && t\in T,\\
&0\leqslant v_t \leqslant V_t y_t, && t\in T,\\
&0\leqslant x_j \leqslant y_{t_{(j)}}, && j\in J,\\
&y_t,\ z_t \in \{0,1\}, && t\in T.
\end{aligned}
$$

Для подзадач S_i справедливо равенство

$$F_{\mathrm{LR}}(\lambda) = \sum_{j\in J}\lambda_j - \sum_{i\in I} f_i.$$

Для каждой пары (i,θ), $i\in I$, $\theta\in T$, рассмотрим задачу $\mathrm{S}_{i\theta}$ линейного программирования следующего вида. Найти

$$f_{i\theta} = \max \sum_{t\geqslant\theta}\Big\{\sum_{j\in J_t}(\lambda_j - c_j)x_j - c_t v_t\Big\}$$

при следующих ограничениях:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\in J_t} p_j x_j \leqslant v_t^\circ + \sum_{\tau=t-\rho+1}^{t} v_\tau, && t\geqslant\theta,\\
&0\leqslant v_t \leqslant V_t, && t\geqslant\theta,\\
&0\leqslant x_j \leqslant 1, && j\in J_t, t\geqslant\theta.
\end{aligned}
$$

Из $z_t\in\{0,1\}$, $t\in T$ и $\sum\limits_{t\in T} z_t \leqslant 1$ следует, что

$$f_i = \max\{0; \max_{\theta\in T}(f_{i\theta} - c_\theta^\circ)\},$$

откуда следует утверждение теоремы 1.

Теорема 2. *Если $\rho_i \geqslant l$, $i \in I$, то задача* LR(λ) *разрешима с трудоемкостью $O(nm(l + \log n))$.*

Доказательство. Покажем, что задача S_i разрешима с трудоемкостью $O(n(l+\log n))$. Множества J_t, $t \in T$, упорядочим по невозрастанию величин $(\lambda_j - c_j)/p_j$, $j \in J_t$. Тогда значения переменных x_j, $j \in J$, однозначно восстанавливаются по значениям переменных v_t с линейной трудоемкостью. Оптимальные значения переменных v_t, $t \in T$, находятся с помощью процедуры координатного спуска. На каждом шаге этой процедуры ищется номер $\tau \in T$ такой, что увеличение целевой функции при возрастании переменной v_t достигает наибольшего значения. Затем определяется длина шага в направлении τ и изменяются значения соответствующих переменных. Нетрудно убедиться, что если на некотором шаге ни по одной из координат нельзя добиться увеличения целевой функции, то полученное решение является оптимальным.

Упорядочение множеств $J_t, t \in T$, осуществляется с трудоемкостью $O(n \log n)$. Вычисление приращений и нахождение наилучшего номера $\tau \in T$ требует $O(l)$ операций. С такой же трудоемкостью находится и длина шага. Число шагов не превосходит величины $l + n$, а так как $l \leqslant n$, то общая трудоемкость алгоритма не превосходит величины $O(nl + n \log n)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если $\rho_i = 1$, $i \in I$, то двойственная задача* D *полиномиально разрешима.*

Доказательство. Убедимся в том, что $\overline{f_i} = f_i$. Обозначим через $(z_t^*), (y_t^*), (v_t^*), (x_j^*)$ оптимальное решение задачи $\overline{\mathrm{S}}_i$. Для каждого $k \in T$ построим решение задачи S_i по следующему правилу:

$$z_t(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = k, \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases} \qquad t \in T,$$

$$y_t(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geqslant k, \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases} \qquad t \in T,$$

$$v_t(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < k, \\ v_t^*/y_t^* & \text{в противном случае}, \end{cases} \qquad t \in T,$$

$$x_j(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < k, \\ x_j^*/y_{t(j)}^* & \text{в противном случае}, \end{cases} \qquad j \in J.$$

Если $z_k^* = 0$, то полагаем

$$z_t(k) = y_t(k) = v_t(k) = 0, \quad t \in T, \qquad x_j(k) = 0, \quad j \in J.$$

Легко проверить, что для каждого $k \in T$ построенное решение является допустимым в задаче S_i. Кроме того,

$$\overline{f_i} \leqslant \sum_{t\in T}\Big\{\sum_{j\in J_t}(\lambda_j - c_j)\sum_{k\in T} z_k^* x_j(k) - c_t \sum_{k\in T} z_k^* v_t(k) - c_t^\circ \sum_{k\in T} z_k^* z_t(k)\Big\}$$
$$= \sum_{k\in T} z_k^* \sum_{t\in T}\Big\{\sum_{j\in J_t}(\lambda_j - c_j)x_j(k) - c_t v_t(k) - c_t^\circ z_t(k)\Big\}$$
$$= \sum_{k\in T} z_k^* f_i(k) \leqslant \max_k f_i(k).$$

Таким образом, $\overline{f_i} \leqslant f_i$. Справедливость обратного неравенства $\overline{f_i} \geqslant f_i$ очевидна, откуда $\overline{f_i} = f_i$ и $F_{\mathrm{LR}}(\lambda) = \overline{F_{\mathrm{LR}}(\lambda)}$, т. е. $F_{\mathrm{D}} = \overline{F_{\mathrm{D}}} = \overline{F_{\mathrm{P}}}$. Следовательно, для решения задачи D достаточно найти оптимальное решение задачи линейного программирования $\overline{\mathrm{P}_y}$ и по нему восстановить частично-целочисленное решение двойственной задачи. Теорема 3 доказана.

Отметим, что если условия теоремы 3 не выполнены, и $\rho_i > 1$ для некоторого $i \in I$, то абсолютный разрыв двойственности $\Delta = \overline{f_i} - f_i$ может достигать значительных размеров.

Теорема 4. *Для любого $N > 0$ существуют исходные данные задачи S_i, на которых $\Delta > N$.*

Доказательство. Положим

$$T = \{1,2\},\ J = \{1,2\},\ J_1 = \{1\},\ J_2 = \{2\},$$
$$p_j = 1,\ c_j = 0,\ j \in J, \qquad V_t = 2N,\ v_t^\circ = 0,\ t \in T,$$
$$\lambda = (0, N+2),\ c^\circ = (2N, 0),\ c = (0, 2N),\ \rho = 2.$$

Легко проверить, что в задаче S_i нулевое решение является оптимальным, $f_i = 0$, а на допустимом решении

$$z = (1/2N, 1 - 1/2N); \quad y = (1/2N, 1); \quad v = (1,0); \quad x = (0,1)$$

значение целевой функции задачи $\overline{S_i}$ равно $N + 1$. Теорема 4 доказана.

1.3. Общая схема алгоритма. Алгоритм решения исходной задачи основан на полиномиальной разрешимости оценочной задачи $\mathrm{LR}(\lambda)$. Работа алгоритма начинается с вычисления нижней оценки F_{D}. Пусть (z_{it}^k), (y_{it}^k), (v_{it}^k), (x_{ij}^k) — оптимальное решение задачи $\mathrm{LR}(\lambda^k)$ при фиксированных значениях параметров $\lambda_j = \lambda_j^k$, $j \in J$. Если равенства (2)

выполнены, то получено точное решение исходной задачи. В противном случае вектор

$$S_j^k = 1 - \sum_{i \in I} x_{ij}^k, \qquad j \in J,$$

являясь субградиентом функции $F_{\mathrm{LR}}(\lambda)$ в точке λ_j^k, $j \in J$, задает направление изменения множителей Лагранжа. Полагаем

$$\lambda_j^{k+1} = \lambda_j^k + \beta^k S_j^k, \quad j \in J,$$

и возвращаемся к решению задачи LR(λ) с новыми значениями параметров λ [9].

Алгоритм построения верхней оценки F_0 формирует множество номеров $I_0 = \{i \in I \mid \sum_k \sum_{t \in T} z_{it}^k > 0\}$ и для каждого $i_0 \in I_0$ выполняет следующие действия.

Шаг 0. Полагает $I_1 = \{i_0\}$.

Шаг 1. Решает двойственную задачу D с дополнительными ограничениями $\sum_{t \in T} z_{it} = 1$, $i \in I_1$. На каждой итерации решения данной задачи оптимальное решение задачи LR(λ) достраивает до допустимого решения исходной задачи. Наилучшее решение запоминается в качестве рекорда F_0.

Шаг 2. Находит номер $i_1 \in I \setminus I_1$, для которого $\gamma = \sum_k \sum_{t \in T} z_{i_1 t}^k$ — частота вхождения в оптимальное решение — максимальна. Если $\gamma_{i_1} = 0$, то происходит переход к следующему элементу множества I_0. В противном случае алгоритм полагает $I_1 = I_1 \cup \{i_1\}$ и возвращается на шаг 1.

Трудоемкость алгоритма не превосходит величины $O(m^2 Q)$, где Q — трудоемкость решения двойственной задачи. О качестве получаемого решения можно судить, например, по оценке относительного уклонения $\varepsilon = (F_0/F_{\mathrm{D}} - 1)$, которая наряду с погрешностью самого алгоритма $\delta = (F_0/F - 1)$ включает погрешность, связанную с разрывом двойственности.

§ 2. Динамические задачи с ограничениями на номенклатуру изделий

Предположим, что на развитие системы в течение планового периода наложены дополнительные ограничения, связанные с номенклатурой технических средств. Пусть величины b_{it}, $i \in I$, $t \in T$, задают расход некоторого обобщенного ресурса, связанного с введением в

состав системы новых образцов, а величина B — суммарный ресурс, выделяемый на развитие системы в течение всего планового периода.

Дополнительная группа ограничений, связанная с номенклатурой технических средств, может быть записана следующим образом:

$$\sum_{t\in T}\sum_{i\in I} b_{it}z_{it} \leqslant B. \tag{14}$$

В случае $b_{it} = 1$, $i \in I$, $t \in T$, неравенство (14) можно интерпретировать как ограничение на суммарное число образцов, применяемых для выполнения работ в течение всего планового периода. Задачу P с ограничением (14) назовем задачей P_B.

Рассмотрим другой вариант ограничений на номенклатуру, когда суммарный ресурс выделяется не сразу на весь интервал планирования, а разбивается по годам. Обозначим через K_t, $t \in T$, величину ресурса, выделяемого в t-м году. Тогда ограничения на номенклатуру образцов можно записать следующим образом:

$$\sum_{i\in I} b_{it}z_{it} \leqslant K_t, \qquad t \in T. \tag{15}$$

При таких ограничениях задачу P назовем задачей P_K.

Построение алгоритмов решения задач P_B и P_K осуществляется по той же схеме, что и для исходной задачи P. Решение задачи, двойственной к P_B, сводится в конечном счете к решению следующей задачи. Найти

$$\max \sum_{\theta\in T}\sum_{i\in I} f_{i\theta}z_{i\theta}$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{\theta\in T} z_{i\theta} \leqslant 1, \qquad i \in I;$$

$$\sum_{\theta\in T}\sum_{i\in I} b_{i\theta}z_{i\theta} \leqslant B;$$

$$z_{i\theta} \in \{0,1\}, \qquad i \in I, \quad \theta \in T.$$

Эта задача известна как задача о многовариантном рюкзаке [10]. Линейная релаксация данной задачи решается с трудоемкостью $O(lm)$, и среди ее оптимальных решений всегда существует такое, в котором не более двух переменных принимают дробные значения [11]. В случае $b_{it} = 1$, $i \in I$, $t \in T$, данная задача вырождается, и ее оптимальное решение находится за один просмотр.

Решение задачи, двойственной к P_K, сводится к решению следующей задачи. Найти

$$\max \sum_{\theta \in T} \sum_{i \in I} f_{i\theta} z_{i\theta}$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{\theta \in T} z_{i\theta} \leqslant 1, \qquad i \in I;$$

$$\sum_{i \in I} b_{i\theta} z_{i\theta} \leqslant K_\theta, \qquad \theta \in T;$$

$$z_{i\theta} \in \{0, 1\}, \qquad i \in I, \quad \theta \in T.$$

Эта задача известна как обобщенная задача о назначениях.

В случае $b_{it} = 1$, $i \in I$, $t \in T$, эта задача принимает вид транспортной задачи и решается точно. В общем случае она является NP-трудной задачей дискретной оптимизации, и для ее решения разработаны точные и приближенные алгоритмы [10].

§ 3. Динамические задачи с фактором серийности

Рассмотрим обобщение исходной задачи P, когда стоимость производства изделий c_{it}, $i \in I$, $t \in T$, не является постоянной величиной, а зависит от суммарного объема выпуска изделий

$$c_{it} = c_{it}\Big(\sum_{\tau \in T} v_{i\tau}\Big), \qquad i \in I, \ t \in T.$$

т. е. для каждого $i \in I$ заданы интервалы серийности w_i:

$$0 < w_{i1} < w_{i2} < \dots < w_{iq_i} = \sum_{\tau \in T} V_{i\tau},$$

внутри каждого из которых стоимость производства остается постоянной величиной, а при переходе из одного интервала в другой может

меняться произвольно (рис. 1).

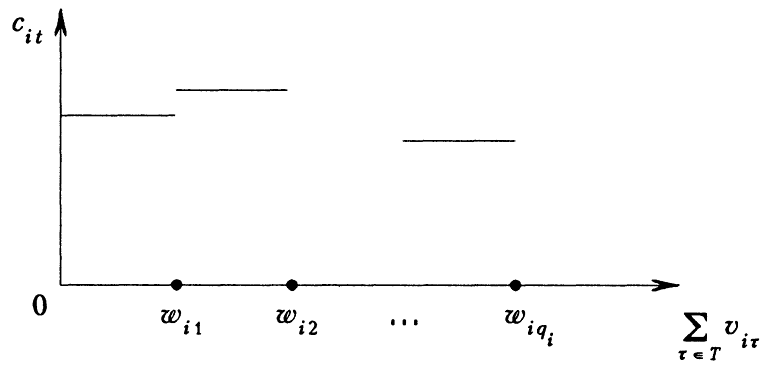

Рис. 1

Алгоритм решения задачи P_w также основан на полиномиальной разрешимости релаксированной задачи $\mathrm{LR}(\lambda)$, при построении которой задача $\mathrm{S}_{i\theta}$ принимает следующий вид. Найти

$$f_{i\theta} = \max \sum_{t \geqslant \theta} \left\{ \sum_{j \in J_t} (\lambda_j - c_j) x_j - c_t \Big(\sum_{\tau \in T} v_{i\tau} \Big) v_t \right\}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j \in J_t} p_j x_j \leqslant v_t^\circ + \sum_{\tau = t - \rho + 1}^{t} v_\tau, && t \geqslant \theta, \\
&0 \leqslant v_t \leqslant V_t, && t \geqslant \theta, \\
&0 \leqslant x_j \leqslant 1, && j \in J_t,\ t \geqslant \theta.
\end{aligned}$$

Алгоритм решения данной задачи последовательно рассматривает все интервалы серийности $[w_{k-1}, w_k)$, $1 \leqslant k \leqslant q_i$, и на каждом из них решает следующую вспомогательную задачу. Найти

$$f_k = \max \sum_{t \geqslant \theta} \left\{ \sum_{j \in J_t} (\lambda_j - c_j) x_j - c_t(w_{k-1}, w_k) v_t \right\}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} &\sum_{j\in J_t} p_j x_j \leqslant v_t^\circ + \sum_{\tau=t-\rho+1}^{t} v_\tau, && t \geqslant \theta, \\ &w_{k-1} \leqslant \sum_{t\geqslant\theta} v_t < w_k, && \\ &0 \leqslant v_t \leqslant V_t, && t \geqslant \theta, \\ &0 \leqslant x_j \leqslant 1, && j \in J_t,\ t \geqslant \theta, \end{aligned}$$

где $c_t(w_{k-1}, w_k)$ — постоянная величина, равная стоимости производства i-го образца в t-м году при объемах партии в интервале от w_{k-1} до w_k. Очевидно, что $f_{i\theta} = \max\limits_k f_k$.

При $\rho_i \geqslant l$ или $\rho_i = 1$ эта задача упрощается, и ее оптимальное решение находится с трудоемкостью $O(nq_i(l + n\log n))$. В общем случае она является задачей линейного программирования и решается стандартными методами.

Замечание. Пусть стоимость производства изделий на каждом интервале серийности задается линейной функцией $c_t(v) = c_t^\circ(w_{k-1}, w_k) + c_t(w_{k-1}, w_k)v_t$, $t \in T$. В этом случае последняя задача не меняет своего вида, но величина $f_{i\theta}$ находится с помощью равенства $f_{i\theta} = \max\limits_k\Big(f_k + \sum\limits_{t\geqslant\theta} c_t^\circ(w_{k-1}, w_k)\Big)$.

§ 4. Результаты тестовых расчетов

Разработанные алгоритмы реализованы на языке ПАСКАЛЬ и тестировались на IBM PC–486(SX). Все решаемые задачи имели одинаковую размерность: $m = 50$, $n = 50$, $l = 5$, $n_t = 10$, $t \in T$.

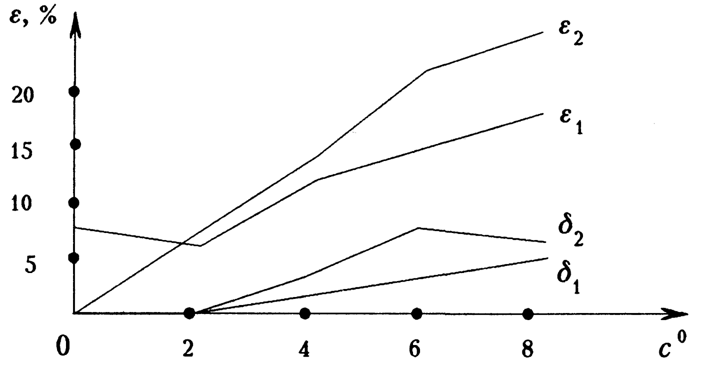

Рис. 2

Массивы исходных данных формировались с помощью датчика псевдослучайных чисел с равномерным распределением. Значения величин выбирались следующим образом: $c^{\circ}_{it} = 300c^{\circ}$, $c_{it} \in [1, 10]$, $c_{ij} \in [1, 1000]$, $p_{ij} \in [1, 10]$, $b_{it} = 1$, $v^{\circ}_{it} = 0$. Матрицы (c_{ij}) и (p_{ij}) на 30% заполнялись числом 10^6. Результаты расчетов изображены на рис. 2. Погрешности δ_1 и ε_1 вычислялись при $\rho_i = 1$, $V_{it} = 100$, $B = 3$, величины δ_2 и ε_2 — при $\rho_i = 1$, $V_{it} = 100$, $B = 50$.

Каждая точка излома является средним значением относительной погрешности для 30 тестовых задач. Отметим, что при $c^{\circ} = 0$ исходная задача остается обобщением NP-трудной задачи о K-медиане [12]. В этом случае при $B = 3$ разрыв двойственности составляет заметную величину (от 7 до 15%), а предлагаемый алгоритм почти не ошибается ($\delta_1 = 0,16\%$).

При больших значениях параметра c° исходная задача вырождается и фактически становится задачей о минимальном покрытии. Начальные затраты доминируют в целевой функции, и если алгоритму удается найти минимальную номенклатуру для выполнения всех работ, то получается точное решение задачи. В противном случае отклонение от оптимума достигает 10%.

Время решения одной задачи при $\rho_i = 1$ в среднем составляет 2–3 мин, при $\rho_i = 5$ — от 10 до 15 мин. При промежуточных значениях ρ_i время решения, по-видимому, будет больше. В связи с этим возникает потребность в специализированных алгоритмах для задачи $\mathrm{S}_{i\theta}$ при произвольных ρ_i, $i \in I$. Кроме того, на практике часто возникает ситуация, когда часть технических средств ежегодно выходит из строя еще до окончания срока эксплуатации. В этом случае ограничения (3) принимают вид

$$\sum_{j \in J_t} p_{ij} x_{ij} \leqslant v^{\circ}_{it} + \sum_{\tau = t-\rho_i+1}^{t} d_{i\tau} v_{i\tau}, \qquad i \in I, \quad t \in T,$$

где величины $d_{i\tau}$ задают долю изъятия технических средств в течение срока эксплуатации.

Другим важным обобщением являются динамические задачи с суммарными ограничениями на ежегодные объемы производства изделий или (и) на суммарный состав системы в каждом году. Для таких моделей требуется как минимум существенная переработка алгоритмов или разработка принципиально других подходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глебов Н. И., Дементьев В. Т., Сычев А. Н.** О динамике развития однородных технических систем // Управляемые системы. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1971. Вып. 8. С. 51–67.

2. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
3. **Хачатуров В. Р., Астахов Н. Д.** Динамические задачи размещения (модели и методы решения) // Экономика и математические методы. 1976. Т. 12, вып. 1. С. 93–109.
4. **Jacobsen S. K.** Heuristic solutions to dynamic plant location problems // Advances in Operations Research: Proc. EURO II. The Second European Congress on Operations Research. Amsterdam etc. 1977. P. 207–213.
5. **Erlenkotter D.** A comparative study of approaches to dynamic location problems // European J. Oper. Res. 1981. V. 6, N 2. P. 133–143.
6. **Van Roy T. J., Erlenkotter D.** A dual-based procedure for dynamic facility location // Management Sci. 1982. V. 28, N 10. P. 1091–1105.
7. **Береснев В. Л., Ибрагимов Г. И., Кочетов Ю. А.** Алгоритмы решения задачи оптимального выбора динамического ряда изделий // Задачи поиска оптимальных решений. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. С. 3–19. (Управляемые системы; Вып. 24).
8. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
9. **Held M., Wolfe P., Crowder H.** Validation of subgradient optimization // Math. Programming. 1974. V. 6, N 1. P. 62–88.
10. **Dyer M. E.** A $O(n)$ algorithm for the multiple-choice knapsack linear program // Math. Programming. 1984. V. 29, N 1. P. 57–63.
11. **Martello S., Toth P.** Linear assignment problems // Ann. Discrete Math. 1987. V. 31. P. 259–282.
12. **Ahn S., Cooper C., Cornuejols G., Frieze A.** Probabilistic analysis of a relaxation for the K-median problem // Math. Oper. Res. 1988. V. 13, N 1. P. 1–31.

Адрес авторов:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики СО РАН

Статья поступила

12 апреля 1994 г.