ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь – март 1995. Том 2, № 1, 50–56

УДК 519.854

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА НА МАКСИМУМ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ *)

А. И. Сердюков

Данная статья посвящена дальнейшей разработке приближенных алгоритмов и обоснованию оценок качества их работы для определенных классов задачи коммивояжера на максимум. Предлагается полиномиальный алгоритм с любой наперед заданной точностью при достаточно больших n в конечномерных вещественных пространствах с метрикой Минковского. Доказана полиномиальная разрешимость задачи в двумерных полиэдральных пространствах, в которых единичным шаром служит треугольник.

Введем следующие обозначения:

- ◇ Ш — выпуклое ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^k$, содержащее 0 внутри;
- ◇ $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^+$ — функционал Минковского для множества Ш, т. е. $f(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid x/\lambda \in \text{Ш}, \lambda > 0\}$;
- ◇ $\mu(x,y) = f(y-x)$ — расстояние от x до y для упорядоченной пары $(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$;
- ◇ S_n — симметрическая группа подстановок степени n;
- ◇ $S_n(l) = \{s \in S_n \mid \text{число цикло в в } s \text{ не превышает } l\}$, $1 \leqslant l \leqslant n$;
- ◇ Y_n — множество всех последовательностей из n различных точек в $\mathbb{R}^k$;
- ◇ $M_n = M_n(X_n) = (\mu_{ij})_{n\times n}$ — матрица попарных расстояний между элементами последовательности $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in Y_n$;
- ◇ $\mathcal{M}_n = \{M_n = M_n(X_n) \mid X_n \in Y_n\}$;
- ◇ $h(\overline{S}_n, M_n) = \max\limits_{s\in\overline{S}_n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_{is(i)}$, $\overline{S}_n \subseteq S_n$, $M_n \in \mathcal{M}_n$;
- ◇ $\arg h(\overline{S}_n, M_n) = \{s \in \overline{S}_n \mid h(s, M_n) = h(\overline{S}_n, M_n)\}$, где $\overline{S}_n \subseteq S_n$, $M_n \in \mathcal{M}_n$.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-00417).

Под *задачей коммивояжера на максимум* (ЗК) в $\mathbb{R}^k$ понимается задача нахождения подстановки

$$s = s(M_n) \in \arg h(S_n(1), M_n),$$

где $M_n \in \mathcal{M}_n$.

К настоящему времени не известны полиномиальные алгоритмы решения ЗК в $\mathbb{R}^k$ при $k = 2$ даже для простейших множеств Ш (круг, квадрат и т. п.). В данной работе рассматривается приближенный подход к решению ЗК в $\mathbb{R}^k$ с обоснованием оценок качества работы (трудоемкость, погрешность) предложенных алгоритмов.

Пусть $\mathcal{A}$ — алгоритм нахождения подстановки $s_{\mathcal{A}}(M_n) \in S_n(1)$, $n \in N$, $M_n \in \mathcal{M}_n$. *Оценкой погрешности* алгоритма $\mathcal{A}$ назовем для каждого n величину

$$\varepsilon_{\mathcal{A}}(n) = 1 - \inf\{h(s_{\mathcal{A}}(M_n), M_n)/h(S_n(1), M_n) \mid M_n \in \mathcal{M}_n\}.$$

Заметим, что элементы матрицы $M_n \in \mathcal{M}_n$ удовлетворяют неравенству треугольника. Поэтому из [1] следует

Теорема 1. *Для* ЗК *в* $\mathbb{R}^k$ *существует алгоритм с трудоемкостью* $O(n^3)$ *и оценкой погрешности* $\varepsilon(n) \leqslant 1/4$.

Этот алгоритм предназначен для решения ЗК на более широком классе матриц по сравнению с $\mathcal{M}_n$ и не учитывает специфику данной задачи (связь матрицы M_n с алгебраической структурой пространства $\mathbb{R}^k$, зависимость матрицы M_n от множества Ш).

Рассмотрим некоторые типичные пространства.

Пара $(\mathbb{R}^k, \mu)$ называется

— *евклидовым пространством*, если

$$Ш = \{x = (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k \mid (\sum_{i=1}^{k} (x^i)^2)^{1/2} \leqslant 1\};$$

— *пространством Минковского*, если Ш — центрально-симметрическое множество относительно 0 (f — норма);

— *полиэдральным пространством*, если Ш — многогранник.

1. Евклидовы пространства. Имеет место

Теорема 2 [2]. *Для* ЗК *в* $\mathbb{R}^k$ *существует алгоритм с трудоемкостью* $O(n^3)$ *и оценкой погрешности*

$$\varepsilon(n) \leqslant C_k/n^{\frac{2}{k+1}},$$

где C_k *зависит только от размерности пространства.*

2. Пространства Минковского. Справедливы

Теорема 3 [3]. *Если $n \to \infty$, то* $\inf\{h(S_n(1), M_n)/h(S_n, M_n) \mid M_n \in \mathcal{M}_n\} \to 1$.

Теорема 4 [4]. *В $\mathbb{R}^2$ для любого четного n имеет место равенство*

$$h(S_n, M_n) = h(T_n, M_n),$$

где $T_n = \{s \in S_n \mid$ каждый цикл в s содержит ровно два элемента $\}$.

Приближенный алгоритм решения ЗК будет предложен в п. 4.

3. Полиэдральные пространства. Здесь развивается подход, предложенный в [3] для приближенного решения ЗК в пространствах Минковского, одновременно являющихся полиэдральными.

Пусть Ш содержит ровно m гиперграней $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$. Для любого i, $1 \leqslant i \leqslant m$, обозначим через K_i наименьший конус с вершиной в точке 0, содержащий все точки гиперграни Γ_i. Из выпуклости Ш и определения f вытекает

Лемма 1. *Пусть $\widetilde{\pi}$ — гиперплоскость, параллельная некоторой гиперграни Γ_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда для любых трех точек $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \widetilde{\pi}$, $z \in \widetilde{\pi}$ выполнены неравенства*

$$\mu(x, z) \geqslant \mu(x, y), \text{ если } (y - x) \in K_i,$$
$$\mu(z, x) \geqslant \mu(y, x), \text{ если } (x - y) \in K_i.$$

Более того, имеет место

Лемма 2. *Для любых четырех точек x, $\overline{x}$, y, $\overline{y}$ из $\mathbb{R}^k$ таких, что $(\overline{x} - x) \in K_i$, $(\overline{y} - y) \in K_i$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant m$, имеет место неравенство*

$$\mu(x, \overline{x}) + \mu(y, \overline{y}) \leqslant \mu(x, \overline{y}) + \mu(y, \overline{x}).$$

Доказательство. Без ограничений общности считаем, что точки x, $\overline{x}$, y, $\overline{y}$ принадлежат конусу K_i и $f(x) \leqslant f(y)$. Возможны три случая:

Случай 1: $f(x) \leqslant f(\overline{x}) \leqslant f(y) \leqslant f(\overline{y})$.

Случай 2: $f(x) \leqslant f(y) \leqslant f(\overline{x}) \leqslant f(\overline{y})$.

Случай 3: $f(x) \leqslant f(y) \leqslant f(\overline{y}) \leqslant f(\overline{x})$.

В случае 1 через точки $\overline{x}$, y проведем гиперплоскости, параллельные гиперграни Γ_i. Пусть x_1, y_1 — точки пересечения отрезка $[x, \overline{y}]$ с построенными гиперплоскостями. Тогда по лемме 1 выполнены неравенства

$$\mu(x,\overline{x}) \leqslant \mu(x,x_1), \quad \mu(y,\overline{y}) \leqslant \mu(y_1,\overline{y})$$

или

$$\mu(x,\overline{x}) + \mu(y,\overline{y}) \leqslant \mu(x,\overline{y}) \leqslant \mu(x,\overline{y}) + \mu(y,\overline{x}).$$

В случае 1 лемма 2 доказана.

В случаях 2 и 3 проведем через y гиперплоскость, параллельную гиперграни Γ_i. Пусть x_1, y_1 — точки пересечения отрезков $[x,\overline{x}]$, $[x,\overline{y}]$ с этой гиперплоскостью. Тогда по лемме 1

$$\begin{aligned}\mu(x,\overline{x}) + \mu(y,\overline{y}) &= \mu(x,x_1) + \mu(x_1,\overline{x}) + \mu(y,\overline{y}) \\ &\leqslant \mu(x,y_1) + \mu(y,\overline{x}) + \mu(y_1,\overline{y}) = \mu(x,\overline{y}) + \mu(y,\overline{x}).\end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *При любых $n \in N$, $M_n \in \mathcal{M}_n$*

$$\arg h(S_n(\lfloor m/2 \rfloor), M_n) \subset \arg h(S_n, M_n).$$

Существует алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$, находящий подстановку из первого множества.

Доказательство. Обозначим через M_n матрицу попарных расстояний для множества точек $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ из $\mathbb{R}^k$. Известны алгоритмы (см., например, [5]), которые с трудоемкостью $O(n^3)$ находят подстановку $s \in \arg h(S_n, M_n)$. Очевидно, что s не содержит петель, поскольку все точки множества X_n различны.

Пусть $s = (c_1, c_2, \dots, c_t)$ — представление подстановки s в виде циклов c_i, $1 \leqslant i \leqslant t$. Попарно перебирая элементы из различных циклов подстановки s, находим элементы $\overline{n} \in c_v$, $\widetilde{n} \in c_w$, $v \neq w$, $1 \leqslant v, w \leqslant t$, такие, что

$$\mu_{\overline{n}s(\overline{n})} + \mu_{\widetilde{n}s(\widetilde{n})} \leqslant \mu_{\overline{n}s(\widetilde{n})} + \mu_{\widetilde{n}s(\overline{n})}.$$

Построим подстановку $\overline{s} \in \arg h(S_n, M_n) \cap \arg h(S_n(t-1), M_n)$:

$$\overline{s}(i) = \begin{cases} s(i) & \text{при } i \notin \{\overline{n}, \widetilde{n}\}, \\ s(\widetilde{n}) & \text{при } i = \overline{n}, \\ s(\overline{n}) & \text{при } i = \widetilde{n}. \end{cases} \tag{1}$$

Вместо подстановки s возьмем подстановку $\overline{s}$ и повторим вышеописанный процесс.

Пусть $\widehat{s} = (\widehat{c}_1, \widehat{c}_2, \dots, \widehat{c}_q) \in \arg h(S_n, M_n) \cap \arg h(S_n(q), M_n)$ — тупиковая подстановка, полученная в результате повторения этого процесса. Покажем, что $q \leqslant \lfloor m/2 \rfloor$. Предположим противное. Заметим, что для любого цикла из $\widehat{s}$ множество точек $\{x_{\widehat{s}(j)} - x_j\}$ лежит не менее чем в двух конусах из множества $\{K_1, \dots, K_m\}$. По предположению найдутся два элемента $\overline{n}$ и $\widetilde{n}$ из разных циклов подстановки $\widehat{s}$ такие, что $x_{\overline{n}}$, $x_{s(\overline{n})}$, $x_{\widetilde{n}}$, $x_{s(\widetilde{n})}$ удовлетворяют условиям леммы 2. Это противоречит тупиковости подстановки $\widehat{s}$. Заметим, что для построения подстановки $\widehat{s}$ затрачивается $O(n^3)$ операций. Подстановка $\widehat{s}$ удовлетворяет всем требованиям леммы. Лемма 3 доказана.

В силу леммы 3 справедлива

Теорема 5. *В $\mathbb{R}^2$ при $m = 3$ ЗК разрешима с трудоемкостью $O(n^3)$.*

Поскольку для элементов матрицы M_n выполнено неравенство треугольника, имеет место

Лемма 4 [6]. *Пусть $s \in S_n(p)$, $p \leqslant n$. Тогда существует алгоритм с трудоемкостью $O(n \log n)$, находящий подстановку $s_0 \in S_n(1)$ такую, что справедливо неравенство*

$$h(s_0, M_n) \geqslant (1 - 1/n)^{p-1} h(s, M_n).$$

В силу лемм 3, 4 справедлива

Теорема 6. *Для ЗК существует алгоритм с использованием $O(n^3)$ операций и оценкой погрешности*

$$\varepsilon(n) \leqslant (\lfloor m/2 \rfloor - 1)/n .$$

4. Приближенный алгоритм для ЗК в $\mathbb{R}^k$. Пусть $\delta > 0$. По аналогии с [3] (в пространствах Минковского) легко показать, что существует описанный вокруг Ш выпуклый многогранник $Ш_1$ с конечным числом гиперграней такой, что $(1 - \delta) f(x) \leqslant f_1(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^k$, где f_1 — функционал Минковского для множества $Ш_1$. Пусть $Ш_1$ имеет наименьшее число $m = m(\delta)$ гиперграней среди таких многогранников.

Лемма 5. *Существует алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$ для нахождения подстановки $s' \in S_n(m)$ такой, что*

$$h(s', M_n) \geqslant (1 - \delta) h(S_n, M_n).$$

Доказательство. Пусть $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — множество точек из $\mathbb{R}^k$, а M_n — матрица его попарных расстояний. При помощи алгоритма решения задачи о назначениях [5] с трудоемкостью $O(n^3)$ находим подстановку $s = (c_1, c_2, \dots, c_t) \in \arg h(S_n, M_n)$.

В каждом цикле c_i выберем некоторый незапрещенный элемент n_i, $1 \leqslant i \leqslant t$ (вначале все элементы незапрещенные). Среди $\{n_i\}$ выберем пару $\{\overline{n}, \widetilde{n}\}$ такую, что

$$\mu_{\overline{n}s(\overline{n})} + \mu_{\widetilde{n}s(\widetilde{n})} \geqslant (1-\delta)(\mu_{\overline{n}s(\widetilde{n})} + \mu_{\widetilde{n}s(\overline{n})}).$$

Построим подстановку $\overline{s} \in S_n(t-1)$ вида (1). Для этой подстановки осуществляем процесс, аналогичный описанному выше, с тем лишь отличием, что элементы $\overline{n}$ и $\widetilde{n}$ становятся запрещенными на всех последующих шагах. Этот процесс перестройки текущей подстановки продолжаем, пока возможно.

Пусть $\widehat{s} = (\widehat{c}_1, \widehat{c}_2, \dots, \widehat{c}_q)$ — построенная таким образом тупиковая подстановка. Очевидно, $h(\widehat{s}, M_n) \geqslant (1-\delta)h(S_n, M_n)$, поскольку на каждом шаге проводилась замена пары элементов из $\{\mu_{is(i)}\}$ новыми элементами матрицы M_n. Покажем, что $q \leqslant m$. Предположим противное. Тогда среди элементов $n_1, \dots, n_q$ найдутся элементы $\overline{n}$, $\widetilde{n}$ такие, что $(x_{s(\overline{n})} - x_{\overline{n}})$ и $(x_{s(\widetilde{n})} - x_{\widetilde{n}})$ находятся в одном конусе многогранника $Ш_1$. По лемме 2

$$\mu_1(x_{\overline{n}}, x_{s(\overline{n})}) + \mu_1(x_{\widetilde{n}}, x_{s(\widetilde{n})}) \leqslant \mu_1(x_{\overline{n}}, x_{s(\widetilde{n})}) + \mu_1(x_{\widetilde{n}}, x_{s(\overline{n})}),$$

где $\mu_1(x,y) = f_1(y-x)$, $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^k$. Следовательно,

$$(1-\delta)(\mu_{\overline{n}s(\overline{n})} + \mu_{\widetilde{n}s(\widetilde{n})}) \leqslant \mu_{\overline{n}s(\widetilde{n})} + \mu_{\widetilde{n}s(\overline{n})}.$$

Это означает, что подстановка $\widehat{s}$ не является тупиковой. Трудоемкость описанного алгоритма равна $O(n^3)$. Теперь можно положить $s' = \widehat{s}$. Лемма 5 доказана.

Теорема 7. *При любом заданном $\delta > 0$ для ЗК существует алгоритм, использующий $O(n^3)$ операций, с оценкой погрешности*

$$\varepsilon(n) = \delta + O(1/n).$$

Доказательство. Пользуясь леммами 4 и 5, находим подстановку $s_0 \in S_n(1)$ такую, что

$$\begin{aligned}\inf\{h(s_0, M_n)/h(S_n(1), M_n) | M_n \in \mathcal{M}_n\} \\ \geqslant \inf\{h(s_0, M_n)/h(S_n, M_n) | M_n \in \mathcal{M}_n\} \\ \geqslant (1-1/n)^{q-1}(1-\delta) \geqslant (1-q/n)(1-\delta).\end{aligned}$$

Следовательно, $\varepsilon(n) \leqslant 1 - (1-q/n)(1-\delta) = \delta + O(1/n)$. Теорема 7 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Косточка А. В., Сердюков А. И.** Полиномиальные алгоритмы с оценками 3/4 и 5/6 для задачи коммивояжера на максимум // Управление и оптимизация. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. С. 55–59. (Управляемые системы; Вып. 26).
2. **Сердюков А. И.** Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Методы целочисленной оптимизации. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. С. 79–87. (Управляемые системы; Вып. 27).
3. **Сердюков А. И.** Асимптотические свойства оптимальных решений экстремальных задач на подстановках в конечномерных нормированных пространствах // Методы дискретного анализа в синтезе реализаций булевых функций. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1991. С. 105–111. (Дискретный анализ; Вып. 51).
4. **Сердюков А. И.** Экстремальные задачи на подстановках для специальных классов матриц // Целочисленная оптимизация и ее приложения. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. С. 57–60. (Управляемые системы; Вып. 30).
5. **Диниц Е. А., Кронрод М. А.** Один алгоритм решения задачи о назначении // Докл. АН СССР. 1969. Т. 189, № 1. С. 23–25.
6. **Сердюков А. И.** Полиномиальные алгоритмы с оценками точностей решений для одного класса задач коммивояжера на максимум // Комбинаторно-алгебраические методы в дискретной оптимизации. Нижний Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 1991. С. 107–114.

Адрес автора:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики СО РАН

Статья поступила

23 декабря 1994 г.