ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь – март 1995. Том 2, № 1, 57–67

УДК 519.8

ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

П. И. Шарыгин

Изучается задача календарного планирования при двух разных критериях. В случае критерия минимума длины расписания значение целевой функции исследуемой задачи является нижней оценкой целевой функции для задачи упаковки в полосу. На примере показывается, что существуют списки работ, для которых отношение значений оптимальных функций для этих задач может достигать величины 5/4. В случае критерия максимума суммарного получаемого дохода на примерах показывается, что значения целевой функции, получаемые с использованием списочных алгоритмов, могут сколь угодно сильно отличаться от оптимальных. Предлагаются точные нижние оценки при некоторых ограничениях на параметры работ.

В работе рассматривается частный случай задачи календарного планирования (ЗКП) в условиях ограниченных ресурсов и директивных сроков (общую формулировку ЗКП см. в [1]). Предполагается, что выполнены следующие условия:

— имеется ограниченный нескладируемый ресурс одного вида, интенсивность выделения которого постоянна на всем протяжении времени выполнения проекта,

— все работы независимы,

— начальные и директивные сроки работ отсутствуют, интенсивность потребляемого работой ресурса постоянна на всем протяжении времени выполнения работы.

Если каждой работе сопоставить прямоугольник, высота и длина которого равны интенсивности потребления ресурса и длительности выполнения работы, данную задачу можно интерпретировать как укладку прямоугольников в полубесконечную полосу, высота которой равна интенсивности выделяемого суммарного ресурса. При этом каждый прямоугольник разрешается разрезать вертикальными линиями

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-00489).

на полосы, которые будем называть *ломтиками*. Во всякой допустимой укладке совокупность горизонтальных проекций ломтиков образует отрезок, равный длине прямоугольника. Допускаются также вертикальные перемещения ломтиков.

В § 1 задача рассматривается с критерием минимума длины расписания ($ЗКП_{\min}$). Из постановки видно, что без разбиения прямоугольников на ломтики $ЗКП_{\min}$ является задачей упаковки прямоугольников в полосу (ЗУП) минимальной длины. Дополнительные возможности, обусловленные допущением вертикальных перемещений ломтиков, позволяют в ряде случаев построить из оптимального решения ЗУП (которое, безусловно, является расписанием) еще более короткое расписание в $ЗКП_{\min}$. Следовательно, из решения $ЗКП_{\min}$ получается нижняя оценка для ЗУП. Поэтому определенный интерес представляет отношение оптимальных значений целевых функций ЗУП и $ЗКП_{\min}$.

Оптимальное значение длины расписания в $ЗКП_{\min}$ для списка работ L обозначим через $S(L)$, а оптимальное значение длины упаковки в ЗУП для списка прямоугольников, соответствующих работам из L, — через $P(L)$. Пусть

$$\rho = \sup_L \frac{P(L)}{S(L)}.$$

Из доказательства верхней оценки для $P(L)$, полученной в [2] с помощью алгоритма NFDH, легко вывести оценку $P(L) \leqslant 3S/B$ для любого списка L, где S — общая площадь прямоугольников, B — высота полосы. Из этой оценки и очевидного неравенства $S(L) \geqslant S/B$ следует неравенство $\rho \leqslant 3$. Автору неизвестны другие оценки величины $P(L)$ через общую площадь прямоугольников.

В [1] содержится пример списка работ, в котором $\rho \geqslant 6/5$. В настоящей работе приводится список работ, с помощью которого нижняя оценка ρ может быть улучшена до $5/4$.

В § 2 рассмотрена задача с критерием максимума суммарного получаемого дохода ($ЗКП_{\max}$), когда доход от выполнения работы равен произведению продолжительности выполнения работы и интенсивности потребления ресурса. Показано, что значение целевой функции, полученное с помощью списочных алгоритмов, может значительно отличаться от оптимального. Приведены точные нижние оценки при некоторых ограничениях на параметры работ.

Отметим, что эти задачи являются NP-трудными [3].

§ 1. Критерий минимума длины расписания

Приведем постановку задачи. Рассмотрим полубесконечную полосу высоты B и список $L = \{(b_i, t_i)_{i=1}^n\}$ прямоугольников (предметов). Пусть высота предмета i равна $b_i \leqslant B$, длина предмета i равна t_i. Требуется упаковать предметы в полосу так, чтобы минимизировать длину использованной части полосы. Предметы не разрешается поворачивать и накладывать друг на друга. Допускается разбиение каждого предмета на ломтики и вертикальные перемещения ломтиков.

Утверждение 1. *Существует список L_0 такой, что*

$$P(L_0)/S(L_0) = 5/4.$$

Доказательство. Пусть полоса имеет высоту 12. Рассмотрим список L_0, состоящий из 9 предметов. Информация о предметах приведена в таблице.

Предмет	Высота	Длина	Время
1	3	2	0
2	2	1	2
3	5	1	3
4	2	2	1
5	8	1	0
6	5	1	1
7	6	2	2
8	1	3	0
9	1	3	1

В колонках указаны номер, высота, длина предмета и момент начала соответствующей предмету работы в оптимальном расписании.

Как видно из рис. 1,*а*, ниже, оптимальное расписание имеет длину 4. Докажем, что найти упаковку длины 4 невозможно. Рассмотрим прямоугольник высоты 12 и длины 4 и список предметов, указанный выше.

Разобьем прямоугольник на непересекающиеся прямоугольники

— $\{S_i\}_{i=1}^{4}$ высоты 12 и ширины 1 и назовем их *столбцами*,

— $\{R_i\}_{i=1}^{12}$ высоты 1 и ширины 4 и назовем их *полосами*.

Предметы $A_1, \ldots, A_k$ назовем

— *зацепленными по горизонтали* (обозначаем $A_1 h \ldots h A_k$), если существует столбец, имеющий в пересечении с каждым из этих предметов ненулевую площадь,

— ***зацепленными по вертикали*** (обозначаем $A_1v \dots vA_k$), если существует полоса, имеющая в пересечении с каждым из этих предметов ненулевую площадь.

Введем следующие обозначения:

$$\overline{A_1h\dots hA_k} \iff \text{не выполняется } A_1h\dots hA_k;$$

$$\overline{A_1v\dots vA_k} \iff \text{не выполняется } A_1v\dots vA_k.$$

Отметим простое свойство зацепленных предметов $A_1, \dots, A_k$: если $A_ihA_j, 1 \leqslant i < j \leqslant k$, то $A_1h\dots hA_k$. Действительно, пусть x_i и y_i — номера левого и правого столбцов, зацепляющих предмет A_i. Интервалы $[x_i, y_i]$ и $[x_j, y_j]$ пересекаются тогда и только тогда, когда $(x_i \leqslant y_j)\&(x_j \leqslant y_i)$. Если интервалы $[x_i, y_i]$, $i = 1, \dots, k$, попарно пересекаются, то $x_i \leqslant y_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$. Поэтому $x = \max_i x_i \leqslant \min_i y_j = y$, и интервал $[x, y]$ непуст. Аналогичным свойством обладают предметы, зацепленные по вертикали.

Введем следующие обозначения:

$$H(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) \iff b_{i_1} + \dots + b_{i_k} > 12,$$

$$L(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) \iff t_{i_1} + \dots + t_{i_k} > 4.$$

Покажем, что без перемещения ломтиков некоторых предметов не существует расположения всех предметов внутри большого прямоугольника. Допустим, что это не так. Поскольку запрещено наложение предметов друг на друга, для любых двух предметов A и B имеем $(AhB)\&(AvB)$ =FALSE.

Рассмотрим четыре возможных случая.

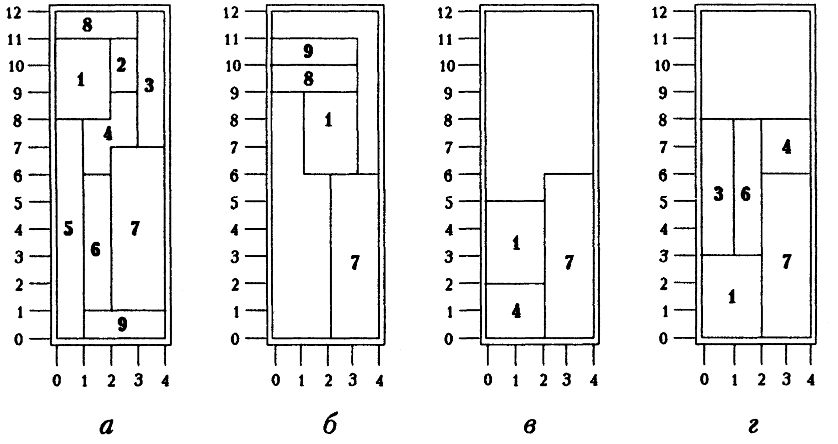

Рис. 1

Случай 1: $1h7$ (рис. 1,*б*). Из $1h7$, $1h8$, $1h9$, $7h8$, $7h9$, $8h9$ следует $1h7h8h9$, поэтому в столбце, зацепляющем одновременно предметы 1, 7, 8, 9, остается свободное пространство высоты 1, которое нельзя заполнить, так как предметов высоты 1 больше нет.

Случай 2: $\overline{(1h7)}\&\overline{(4h7)}$ (рис. 1,*в*). Из $H(1,4,5)$ и $H(5,7)$ следует, что не существует допустимого расположения предмета 5.

Случай 3: $\overline{(1h7)}\&\overline{(1h4)}$ (рис. 1,*г*). Из $H(3,4,7)$ и $H(6,4,7)$ получаем $1h3$ и $1h6$. Но из $H(4,7,5)$, $H(1,3,5)$ и $H(1,6,5)$ следует, что не существует допустимого расположения предмета 5.

Случай 4: $\overline{(1h7)}\&(1h4)\&(4h7)$ (см. рис. 2,*а–в*). Из $H(1,4,5)$ и $H(5,7)$ следует $1h5$ и $4h5$. Для определенности считаем, что столбец 1 зацеплен с предметами 1 и 5. Поскольку $b_1 + b_5 = 11$, в столбце 1 остается пробел высоты 1, который можно заполнить только предметом 8 или 9 (для определенности считаем 8). Таким образом, столбец 1 полностью заполнен. Из $H(1,3,6)$ следует $3h7$ или $6h7$ (для определенности считаем $3h7$). Тогда из $H(3,4,7)$ следует S_4h3h7, и оставшийся в столбце 4 пробел высоты 1 может быть заполнен только предметом 9. Итак, $S_4h3h7h9$. Наконец, из $H(4,6,7)$ следует $S_2h1h4h6h8h9$, т. е. столбец 2 полностью заполнен. Из $L(1,9)$, $L(8,9)$ следует $5v9$, а из $L(8,9)$, $L(8,7)$ следует $3v8$.

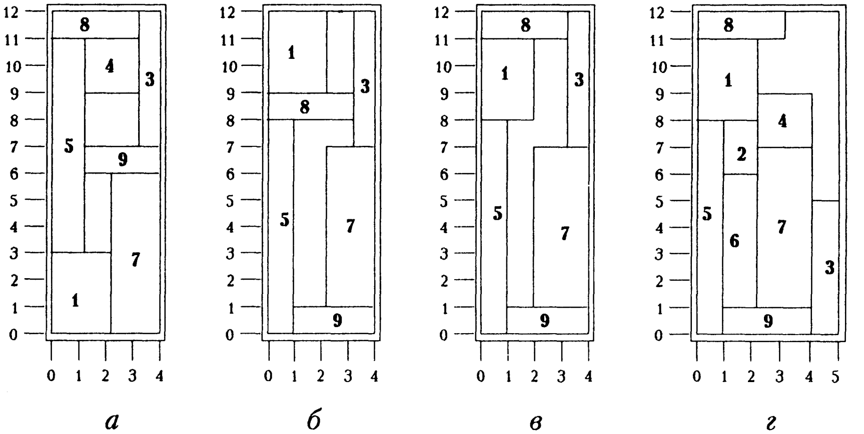

Рис. 2

Имеется три возможности взаимного расположения предметов 1, 5 и 8 по вертикали с точностью до симметрии.

Случай 1: предмет 5 находится между предметами 1 и 8 (рис. 2,*а*). Из $b_3+b_7 > b_8+b_5$ следует $1v7$. Тогда предмет 9 находится между предметами 3 и 7. В этом случае имеем однозначное расположение предметов 1, 3, 5, 7, 8, 9, которое противоречит допустимому расположению предмета 6.

Случай 2: предмет 8 находится между предметами 1 и 5 (рис. 2,*б*, с точностью до перестановки предметов 7 и 9).

Случай 3: предмет 1 находится между предметами 5 и 8 (рис. 2,*в*, с точностью до перестановки предметов 7 и 9).

В случаях 2, 3 существует единственная полоса R_i такая, что $R_i v 3 v 5$. Поэтому из $L(3,1,4)$, $L(3,8,4)$, $L(7,1,4)$, $L(7,5,4)$, $L(7,8,4)$, $L(9,1,4)$, $L(9,5,4)$, $L(9,8,4)$ следует противоречие с допустимым расположением предмета 4.

Итак, во всех случаях нет упаковки указанного списка в данный прямоугольник. Оптимальная упаковка показана на рис. 2,*г*. Утверждение 1 доказано.

Дальнейшее улучшение нижней оценки ρ указанным способом невозможно, поскольку при любом расписании длины 3 для работ с длительностями выполнения 1, 2 или 3 нетрудно построить упаковку соответствующих этим работам предметов в полосу длины 3.

§ 2. Критерий максимума суммарного дохода

Задачу ЗКП$_{\max}$ можно сформулировать следующим образом. Заданы прямоугольник (контейнер) высоты B и длины T и список $L = \{(b_i, t_i)_{i=1}^n\}$ прямоугольников (предметов). Высота предмета i равна $b_i \leqslant B$, а длина — $t_i \leqslant T$. Предмету i приписывается число c_i — стоимость предмета. Требуется выделить и упаковать подмножество L' предметов из списка L так, чтобы выполнялись следующие условия:

— все предметы целиком располагаются внутри контейнера,

— сумма чисел, приписанных предметам из L', максимальна по всем таким подмножествам.

Предметы не разрешается поворачивать и накладывать друг на друга. Допускаются разбиение каждого предмета на ломтики и вертикальные перемещения ломтиков.

Замечание. Если в результате работы какого-либо приближенного алгоритма окажется, что $L' = L$, то имеем оптимальную упаковку. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что хотя бы один предмет из списка L не содержится в L'.

Рассмотрим случай, когда стоимость предмета равна его площади, т. е. произведению высоты на длину. Тогда требуется найти заполнение контейнера предметами, которое давало бы максимальную суммарную площадь предметов, целиком уместившихся в контейнере.

Через $\mathrm{Opt}(L)$ обозначим значение оптимального решения задачи со списком L, а через $A(L)$ — значение решения, полученное при обработке списка L алгоритмом A.

Приведем примеры, которые показывают, что любой списочный алгоритм (т. е. алгоритм, обрабатывающий список в том порядке, в котором он дан для обработки), предварительно использующий приводимые ниже типы сортировок, дает решение со сколь угодно большим отклонением от оптимального, т. е. для любого $q > 1$ существует список L_0 такой, что $\mathrm{Opt}(L_0)/A(L_0) = q$.

Пример 1. Сортировка по невозрастанию длины предметов:

$$L_0 = \{(B/q,T),\ (B,0.5T),\ (B,0.5T)\},\ \mathrm{Opt}(L_0) = BT,\ A(L_0) = BT/q.$$

Пример 2. Сортировка по невозрастанию высоты предметов:

$$L_0 = \{(B,T/q),\ (0.5B,T),\ (0.5B,T)\},\ \mathrm{Opt}(L_0) = BT,\ A(L_0) = BT/q.$$

Пример 3. Сортировка по невозрастанию площади предметов:

$$L_0 = \{(B/q,T),\ ((B,0.5T/q)_{i=1,\dots,2q})\},\ \mathrm{Opt}(L_0) = BT,\ A(L_0) = BT/q.$$

Пример 4. Сортировка по неубыванию длины, высоты или площади предметов:

$$L_0 = \{(B/\sqrt{q},T/\sqrt{q}),(B,T)\},\ \mathrm{Opt}(L_0) = BT,\ A(L_0) = BT/q.$$

Далее будем рассматривать задачу при некоторых ограничениях на длину и высоту предметов. Докажем некоторые оценки для следующего простого алгоритма.

АЛГОРИТМ А1

— Обрабатываемый список упорядочивается по невозрастанию длины предметов и затем начинаем обрабатывать полученный список.

— Обрабатываемый предмет располагается в верхнем левом углу контейнера вплотную к верхней и левой граням контейнера. Продвигая его вдоль верхней грани контейнера, ищется такое положение предмета, когда он впервые не пересекается с текущей упаковкой.

— Если такое положение находится до того момента, когда правая граница предмета пересекает правую грань контейнера, перемещение предмета прекращается. Предмет опускается, а его ломтики перемещаются вниз для того, чтобы не осталось пустого места под предметом. Получается новая текущая упаковка и осуществляется переход к следующему предмету.

— Если такого положения нет, то предмет отбрасывается и осуществляется переход к следующему предмету.

Так последовательно обрабатывается весь список.

Результат применения алгоритма A1 к списку L_0 из § 1 для контейнера высоты 12 и длины 4 показан на рис. 3. Алгоритм A1 после сортировки обрабатывает список в порядке

$$(8, 9, 1, 4, 7, 2, 3, 5, 6).$$

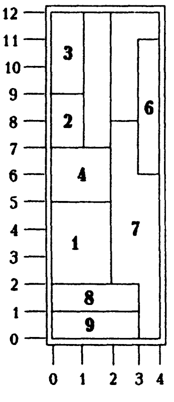

Рис. 3

Предмет 5 в упаковку не вошел. Пусть числа b и t такие, что параметры предметов в обрабатываемом списке

$$L = \{(b_i, t_i)_{i=1,\dots,n}\}$$

удовлетворяют ограничениям

$$0 < b_i \leqslant b, \quad 0 < t_i \leqslant t.$$

Площадь заполнения контейнера при работе алгоритма A1 при вышеуказанных ограничениях на параметры списка обозначим $S_{\mathrm{A1}}(b, t)$.

Введем некоторые определения и обозначения.

— Линию, параллельную боковым граням контейнера и находящуюся на расстоянии τ от левой грани контейнера, будем называть *моментом* τ.

— Линию, параллельную верхней и нижней граням контейнера на расстоянии β от нижней грани контейнера, будем назвать *уровнем* β.

Обозначим через $\tau + 0$ ($\tau - 0$) момент, сколь угодно близкий справа (слева) к моменту τ, но не совпадающий с ним. Высоту упаковки в момент τ обозначим через $y(\tau)$.

При $\tau < 0$ и $\tau > T$ полагаем $y(\tau) = 0$.

Для моментов $\tau \in [0, T]$, не совпадающих с левой или правой границей какого-либо предмета, $y(\tau) = \sum b_i$, где суммирование осуществляется по всем предметам, которые пересекает момент τ.

Для моментов $\tau \in [0, T]$, совпадающих с левой или правой границей какого-либо предмета, положим $y(\tau) = \max\{y(\tau - 0), y(\tau + 0)\}$.

Утверждение 2. *При любых $b \in (0, B]$ и $t \in (0, T]$ справедливо неравенство*

$$S_{\mathrm{A1}}(b,t) > (B-b)\max\{(T-t), tT\lfloor T/t\rfloor/(T+t)\}.$$

Доказательство. Рассмотрим упаковку, получаемую сразу после отбрасывания первого непоместившегося предмета. Длину этого предмета обозначим через θ.

Докажем, что упаковка покрывает прямоугольник высоты $B-b$ и длины $T-\theta$. Следовательно, $S_{\mathrm{A1}}(b,t) > (B-b)(T-\theta)$. Поскольку обрабатываемый предмет мы опускаем вниз, не оставляя под ним пустого места, для любого момента $\tau \in [0, T]$ пустое место целиком находится над упаковкой.

Докажем, что в каждый момент $\tau \in [0, T-\theta]$ высота упаковки выше уровня $B-b$. Для доказательства потребуется следующая

Лемма 1. *При любом $\tau \in [0, \tau_0]$, $\tau_0 > T-\theta$, высота упаковки $y(\tau)$ удовлетворяет неравенству $y(\tau) > B-b$.*

Доказательство. Пусть τ_0 — первый момент, в который выполнено соотношение $y_0 = y(\tau_0+0) \leqslant B-b$. Возможны следующие случаи.

Случай 1: существует момент $\tau > \tau_0$ такой, что $y(\tau) > B-b$.

Случай 2: для любого $\tau \in (\tau_0, T]$ высота упаковки удовлетворяет неравенству $y(\tau) \leqslant B-b$.

В случае 1 предположим, что $\tau_1 > \tau_0$ — первый после τ_0 момент, когда высота упаковки выше $B-b$, т. е. $y(\tau_1-0) \leqslant B-b < y(\tau_1)$. Тогда в упаковке существует предмет p, левая граница которого совпадает с τ_1. Вернемся к тому шагу алгоритма, на котором мы упаковывали p. Обозначим через $y'(\tau)$ высоту упаковки на этом шаге в момент τ. При упаковке предмета p мы видим, что при продвижении p вдоль верхней грани контейнера мы должны остановиться не позднее момента τ_0, поскольку $y'(\tau) \leqslant y(\tau) \leqslant B-b \leqslant B-b_p$ для любого момента $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ и $y'(\tau) \leqslant y(\tau) - b_p \leqslant B - b_p$ для любого $\tau \in [\tau_1, \tau_1 + t_p - 0]$. Поэтому в момент τ_0 предмет p не пересекается с упаковкой, и перемещение его до более позднего момента τ_1 противоречит принципам алгоритма A1. Противоречие доказывает невозможность случая 1.

В случае 2 имеем $\tau_0 > T-\theta$, поскольку иначе существует незаполненная область в правом верхнем углу контейнера высоты b и длины θ, достаточная для расположения непоместившегося предмета. Лемма 1 доказана.

Таким образом, $y(\tau) > B-b$ для любого $\tau \in [0, T-\theta]$, т. е. заполненный прямоугольник имеет площадь бо́льшую, чем $(B-b)(T-t)$. Следовательно

$$S_{\mathrm{A1}}(b,t) > (B-b)(T-t). \qquad (1)$$

Предположим, что $\theta \leqslant tT/(T+t)$. Тогда имеем

$$(B-b)(T-t) \geqslant (B-b)\left(T - \frac{tT}{T+t}\right) = (B-b)T^2/(T+t)$$
$$\geqslant (B-b)tT\lfloor T/t \rfloor/(T+t).$$

Допустим, что θ удовлетворяет неравенствам

$$tT/(T+t) < \theta \leqslant t. \tag{2}$$

На каждом шаге алгоритма граница между свободным пространством контейнера и упаковкой представляет собой ступенчатую ломаную, и обрабатываемый предмет p при движении вдоль верхней грани контейнера останавливается или в момент 0, или в некоторый момент $\tau' > 0$, образующий «нисходящую ступеньку», т. е. $y'(\tau' - 0) > y'(\tau' + 0)$, где $y'(\tau)$ — высота упаковки на данном шаге алгоритма. Следовательно, левая граница предмета p совпадает или с левой гранью контейнера, или с правой границей некоторого предмета q.

Рассмотрим предметы $\{p_i\}_{i=1}^{s}$, правые границы которых лежат строго правее момента $T - \theta$, а левые границы — не правее момента $T - \theta$. По лемме 1 такие предметы существуют. Длину предмета p_i обозначим через t_{i_1}. Его левая граница совпадает или с левой гранью контейнера, или с моментом, совпадающим с правой границей некоторого предмета, длину которого обозначим через t_{i2}. В свою очередь, левая граница этого предмета совпадает или с левой гранью контейнера, или с моментом, совпадающим с правой границей некоторого предмета, длину которого обозначим через t_{i3}. Продолжая этот процесс, дойдем до предмета, левая граница которого совпадает с левой границей контейнера. Длину этого предмета обозначим через t_{ik}.

Таким образом, правая граница предмета p_i совпадает с моментом, который находится на расстоянии $\tau_i = t_{i1} + \ldots + t_{ik}$ от левой границы контейнера. С учетом (2) и неравенства $i_j \geqslant \theta$, $1 \leqslant j \leqslant k$, получаем

$$T - t \leqslant T - \theta < \tau_i \leqslant kt, \quad ktT/(T+t) < k\theta \leqslant \tau_i \leqslant T,$$

откуда $T/t - 1 < k < T/t + 1$. Так как k целое, имеем $k = \lfloor T/t \rfloor$ или $k = \lceil T/t \rceil$, и величина τ_i не меньше величины $k\theta > tT\lfloor T/t \rfloor/(T+t)$. Это соотношение справедливо при любом i, $1 \leqslant i \leqslant s$.

По лемме 1 сумма высот предметов $\{p_i\}_{i=1}^{s}$ больше $B - b$. Поэтому вплоть до момента $\tau' = tT\,\lfloor T/t \rfloor\,/(T+t)$ высота упаковки больше $B - b$. Следовательно,

$$S_{\mathrm{A1}}(b,t) > (B-b)tT\lfloor T/t \rfloor/(T+t).$$

Вместе с (1) это дает требуемый результат. Утверждение 2 доказано.

Замечание. Нетрудно видеть, что временная сложность алгоритма A1 равна $O(n^2)$.

Следствие 1. *Если $T = kt$, k целое, то*

$$S_{\mathrm{A1}}(b,t) > (B-b)kT/(k+1).$$

Пусть параметры задачи зависят от количества предметов n, т. е. $b = b_n$, $B = B_n$, $T = T_n$. Тогда справедливо

Следствие 2. *Если $b_n = o(B_n)$, $t_n = o(T_n)$, то алгоритм* A1 *является асимптотически точным.*

Доказательство. Значение, полученное при помощи оптимального алгоритма, не превышает величины B_nT_n. Поэтому

$$1 \geqslant \frac{S_{\mathrm{A1}}(B_n,t_n)}{B_nT_n} \geqslant \frac{(B_n-b_n)(T_n-t_n)}{B_nT_n} = \left(1-\frac{b_n}{B_n}\right)\left(1-\frac{t_n}{T_n}\right) = 1-\varepsilon_n,$$

где

$$\varepsilon_n = \frac{b_n}{B_n} + \frac{t_n}{T_n} - \frac{b_n}{B_n}\frac{t_n}{T_n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следствие 2 доказано.

Плотность границы вытекает из следующего примера. Пусть $b = B$ и $t = T$. При достаточно малом $\varepsilon \in (0,B)$ возьмем список $L = \{(\varepsilon,T),(B,0.5T),(B,0.5T)\}$. Тогда значение $\varepsilon = \varepsilon T$, полученное при помощи алгоритма A1, будет достаточно близко к значению границы $(B-b)\max\{(T-t), tT[T/t]/(T+t)\} = 0\cdot 0.5T = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гимади Э. Х.** О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Наука, 1988. С. 89–115. (Тр./ АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 10).
2. **Coffman E. G.(jr.), Garey M. R., Johnson D. S., Tarjan R. E.** Performance bounds for level-oriented two-dimensional packing algorithms // SIAM J. Comput. 1980. V. 9, N 4. P. 808–826.
3. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

Адрес автора:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 2,
Новосибирский госуниверситет

Статья поступила

5 октября 1994 г.