ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 1995. Том 2, № 2, 5–15

УДК 517.5+519.7

О ДИСКРЕТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ*)

Г. Г. Аманжаев

Вычисление непрерывной функции дискретным устройством ограниченного размера (сложности) с необходимостью является приближенным; более того, фактически происходит вычисление приближенных значений функции лишь на некотором конечном подмножестве области определения, т. е. реально вычисляется функция с конечными областью определения и множеством значений. При этом, естественно, каждый класс непрерывных функций порождает соответствующий класс дискретных функций.

В данной работе для класса функций

$$H_{2,c} = \{f : [0,1) \to [0,1) \mid |f'(x) - f'(y)| \leqslant c|x-y|\}$$

описываются соответствующие классы дискретных функций и исследуются их свойства; устанавливается связь между такой информационной характеристикой классов непрерывных функций, как ε-энтропия, и некоторой аналогичной характеристикой для дискретных функций, которая, в свою очередь, оказывается тесно связанной с их сложностью вычисления. Задача о такой приближенной реализации непрерывных функций была поставлена в [1].

§ 1. Определение классов

Будем исходить из следующего класса непрерывных функций:

$$H_{2,c} = \{f : [0,1) \to [0,1) \mid |f'(x) - f'(y)| \leqslant c|x-y|\}.$$

Взяв в $I = [0,1)$ дискретное подмножество $\tilde{I}_n = \left\{\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \ldots, \frac{2n-1}{2n}\right\}$, для каждой функции $f \in H_{2,c}$ рассмотрим «приближающую» ее дискретную функцию вида $g : \tilde{I}_n \to \tilde{I}_n$. В частности, в качестве g можно взять функцию

$$g(x) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\lfloor nf(x)\rfloor, \quad x \in \tilde{I}_n.$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-01527).

От множества $\tilde{I}_n$ можно взаимно однозначно перейти к множеству $I_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, взяв вместо значения $x \in \tilde{I}_n$ его «порядковый номер». При этом вместо функции g можно рассмотреть целочисленную дискретную функцию $h : I_n \to I_n$, заданную формулой

$$h(x) = \lfloor nf(1/2n + x/n) \rfloor, \quad x \in I_n.$$

Для множества всех таких функций введем обозначение $\widehat{H}^n_{2,c}$, т. е.

$$\widehat{H}^n_{2,c} = \{h : I_n \to I_n \mid (\exists f \in H_{2,c})(\forall x \in I_n) h(x) = \lfloor nf(1/2n + x/n) \rfloor\}.$$

Легко видеть, что задача определения принадлежности дискретной функции $h : I_n \to I_n$ классу $\widehat{H}^n_{2,c}$ сводится, в сущности, к перебору бесконечного множества непрерывных функций из $H_{2,c}$.

Чтобы избавиться от такого перебора, введем в рассмотрение более широкий класс дискретных функций, нежели $\widehat{H}^n_{2,c}$. С этой целью зафиксируем некоторый конечный набор Σ свойств, каждым из которых обладает любая функция из $\widehat{H}^n_{2,c}$, и рассмотрим класс $H^n_{2,c}(\Sigma)$ дискретных функций, задаваемых следующим образом:

$$H^n_{2,c}(\Sigma) = \{f : I_n \to I_n \mid f \text{ обладает всеми свойствами из } \Sigma\}.$$

Ясно, что $\widehat{H}^n_{2,c} \subset H^n_{2,c}(\Sigma)$.

Набор свойств возьмем таким, чтобы класс $H^n_{2,c}(\Sigma)$ не слишком сильно отличался от класса $\widehat{H}^n_{2,c}$ (смысл этого требования будет разъяснен ниже), число свойств в Σ было невелико, а свойства были легко проверяемыми.

Набор Σ определим следующим образом. Класс непрерывных функций $H_{2,c}$ зададим в эквивалентной форме:

$$H_{2,c} = \{f : [0,1) \to [0,1) | (\forall x, y, z \in [0,1), x < y < z) | |\Delta_2(f; x, y, z)| \leqslant c/2\},$$

где $\Delta_2(f; x, y, z)$ — вторая разделенная разность функции f, т. е.

$$\Delta_2(f; x, y, z) = \left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \right) \Big/ (x - z).$$

Пользуясь таким заданием, оценим $\Delta_2(g; x, y, z)$ для $g \in \widehat{H}^n_{2,c}$. Обозначая $x' = 1/2n + x/n$, $y' = 1/2n + y/n$, $z' = 1/2n + z/n$ и учитывая, что $g(x) = \lfloor nf(x/n + 1/2n) \rfloor$, получаем

$$\begin{aligned} &\Delta_2(g; x, y, z) \\ &\quad = \frac{(\lfloor nf(x') \rfloor - \lfloor nf(y') \rfloor)/(x - y) - (\lfloor nf(y') \rfloor - \lfloor nf(z') \rfloor)/(y - z)}{x - z} \\ &\quad = \frac{1}{n} \Delta_2(f; x', y', z') - \frac{(\alpha(x') - \alpha(y'))/(x - y) - (\alpha(y') - \alpha(z'))/(y - z)}{x - z}, \end{aligned}$$

где $\alpha(t) = nf(t) - \lfloor nf(t) \rfloor - 1/2$, т. е. $|\alpha(t)| \leqslant 1/2$. Следовательно, при $x < y < z$ имеем

$$\Delta_2(g; x, y, z) < \frac{c}{2n} + \varphi_2(x, y, z), \tag{1}$$

где $\varphi_2(x, y, x) = \frac{1}{(x-y)(y-z)} = \sup \Delta_2(h; x, y, z)$, а sup берется по всем функциям $h : \mathbb{R} \to [-1/2, 1/2]$.

Набор неравенств вида (1) и является искомым набором свойств Σ. В этом случае

$$H^n_{2,c} = \{g : I_n \to I_n | (\forall x, y, z \in [0,1), x < y < z) |\Delta_2(g; x, y, z)| < \frac{c}{2n} + \varphi_2(x, y, z)\}.$$

§ 2. Оценки мощности классов

Лемма. $2^n \leqslant |\widehat{H}^n_{2,c}| \leqslant |H^n_{2,c}| \leqslant 2^{n(1+o(1))}$.

Доказательство. В силу вложения $\widehat{H}^n_{2,c} \subset H^n_{2,c}$ достаточно доказать только первое и последнее неравенства в этой цепочке.

Сначала убедимся в справедливости первого неравенства. Рассмотрим функцию

$$d_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right], \\ \left(\frac{1}{2n} + x\right)^2 \left(\frac{1}{2n} - x\right)^2, & \text{если} \quad x \in \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция $d_n(x)$ дважды дифференцируема всюду, кроме точек $x = \pm 1/2n$, причем $|d''_n(x)| < 2n^{-2}$. Следовательно, при достаточно больших n и $a_k \in \{0, 1\}$ функция

$$f(x) = \frac{1}{n} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k d_n \left(x - \frac{1}{2n} - \frac{k}{n}\right)$$

принадлежит классу $H_{2,c}$. Поэтому соответствующие функции $g(x)$, определенные в целых точках соотношением $g(x) = \lfloor nf(x/n + 1/2n) \rfloor$, содержатся в $\widehat{H}^n_{2,c}$. Но все функции $g(x)$ различны, ибо $g(k) = 1 - a_k$. Следовательно,

$$|\widehat{H}^n_{2,c}| \geqslant 2^n.$$

Теперь убедимся в справедливости второго неравенства. Обозначим через $B(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k)$ совокупность функций из $H^n_{2,c}$ таких, что при $x = x_i$ эти функции принимают значение y_i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Пусть $x_1 = 0$, $x_k = n - 1$, а остальные точки x_i разбивают отрезок I_n на части, длина которых не больше r, где r — целочисленный параметр.

Пусть $r = o(\sqrt{n})$. При $x \in \{x_i, x_i+1, \dots, x_{i+1}\}$ рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1})\right). \tag{2}$$

Можно показать, что при достаточно больших n имеет место хотя бы одна из следующих ситуаций:

α) $|h(x)| < 1$;

β) $-0,5 < h(x) < 1,5$;

γ) $-1,5 < h(x) < 0,5$.

Поэтому при $x \in \{x_i, x_i + 1, \dots, x_{i+1}\}$ функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1}) + h(x),$$

где $h(x) = \theta + h_1(x)$, θ — константа из $\{-1/2, 0, 1/2\}$, $|h_1(x)| < 1$.

Пусть $(\theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{n-1})$ — набор, в котором $\theta_i \in \{-1/2, 0, 1/2\}$, $\chi_i \in \{0, 1\}$. Рассмотрим в $B(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k)$ подмножество, состоящее из функций, у которых при $x \in \{x_i, \dots, x_{i+1}\}$

$$\theta = \theta_i, \quad \chi_x = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad h_1(x) \leqslant 0; \\ 1, & \text{если} \quad h_1(x) > 0. \end{cases}$$

В силу целочисленности функции f рассматриваемому набору соответствует не более одной функции из $B(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k)$. Поэтому мощность множества B не превосходит величины $3^{k-1}2^n$. Так как $y_i \in I_n$, то число множеств B не превосходит n^k. Следовательно, $|H^n_{2,c}| \leqslant 3^{k-1}2^n n^k$.

Остается выбрать значения x_i. Положим $r = \lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor$, $x_1 = 0$, $x_2 = r, \dots, x_{k-1} = (k-2)r$, $x_k = n - 1$, где $k = \lceil n/r + 1\rceil \sim n^{2/3}$.

Итак,

$$\log|H^n_{2,c}| \lesssim n^{2/3}\log 3 + n + n^{2/3}\log n = n(1 + o(1)).$$

Лемма доказана.

Рассматривая логарифм мощности дискретного класса как меру информации, необходимой для задания его элементов (длину кода, по которому однозначно восстанавливается функция), получаем, что для точного задания функций из $\widehat{H}^n_{2,c}$ и $H^n_{2,c}$ требуются коды, длины которых близки к n.

Поскольку смысл дискретных функций класса $\widehat{H}^n_{2,c}$ состоит в приближенном представлении непрерывных функций из $H_{2,c}$, такое количество информации (n бит), содержащееся в дискретных функциях, является избыточным. В самом деле, мы рассматриваем приближения $f \in H_{2,c}$ в точках из $\tilde{I}_n$ с точностью $\leqslant 1/2n$, но даже более подробную информацию — значения на всей области определения $[0, 1)$ с такой точностью — можно получить, имея код, длина которого по порядку равна $\sqrt{n}$ (точнее, $\sqrt{cn}$; см. оценки ε-энтропии из [2]). Использование кодов такой большой длины для $\widehat{H}^n_{2,c}$ и $H^n_{2,c}$ объясняется тем, что последний разряд в таблице приближенных значений функции ведет себя практически как случайная величина с равномерным дискретным распределением. Поэтому для его задания мы вынуждены указать все его значения, число которых равно мощности области определения.

§ 3. 1-приближающие множества

Вместо точной реализации функций из классов $\widehat{H}^n_{2,c}$ и $H^n_{2,c}$ рассмотрим 1-приближающие множества для этих классов.

Множество M функций вида $f : I_n \to I_n$ назовем *1-приближающим* для функций из класса K, если выполнено условие

$$(\forall g \in K)(\exists f \in M)(\forall x \in I_n)|f(x) - g(x)| \leqslant 1.$$

Мощность наименьшего 1-приближающего множества для K обозначим через $\mathrm{Approx}(K)$.

Заметим, что переход к 1-приближающим множествам и добавление погрешности являются допустимыми, так как рассматриваемые классы дискретных функций дают лишь приближение для исходного класса $H_{2,c}$.

Оценки для $\mathrm{Approx}(H^n_{2,c})$ и $\mathrm{Approx}(\widehat{H}^n_{2,c})$ приведены в теоремах 1 и 2 (здесь и далее $\log x$ обозначает $\log_2 x$).

Теорема 1. $\log \mathrm{Approx}(H^n_{2,c}) \leqslant c_1\sqrt{cn}$, *где* $c_1 > 0$ — *абсолютная константа.*

Теорема 2. $\log \mathrm{Approx}(\widehat{H}^n_{2,c}) \geqslant c_2\sqrt{cn}$, *где* $c_2 > 0$ — *абсолютная константа.*

Доказательство теоремы 1. Пусть r — натуральное число. Положим $x_1 = 0$, $x_2 = r, \ldots, x_{k-1} = (k-2)r$, $x_k = n-1$, где $k = k(r) = 1 + \left\lceil\frac{n-1}{r}\right\rceil$. Пусть, как и выше, множество $B(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k)$ состоит из таких функций класса $H^n_{2,c}$, которые в точках $x = x_i$ принимают значения y_i.

Обозначим через $M(r)$ максимум (по $y_1, \ldots, y_k$) из $\mathrm{Approx}(B(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k))$. Очевидно, что при каждом r имеет место неравенство $\mathrm{Approx}(H^n_{2,c}) \leqslant n^k M(r)$.

Оценим сверху величину $M(r)$. Сначала найдем максимально возможное r такое, что $M(r) = 1$.

Пусть $f \in B(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k)$ и $x \in I_n$. Если $x = x_i$ при некотором i, то $f(x) = y_i$. Оценим $f(x)$ в случае, когда $x_i < x < x_{i+1}$. Рассмотрим функцию $h(x)$ из (2). Поскольку $h(x_i) = h(x_{i+1}) = 0$ и $\Delta_2(f) = \Delta_2(h)$, а также $x_i < x < x_{i+1}$ и $x_{i+1} \leqslant x_i + r$, из условия $|\Delta_2(h; x_i, x, x_{i+1})| < c/2n + \varphi(x_i, x, x_{i+1})$ получаем $|h(x)| < \frac{c}{2n}(x_{i+1} - x)(x - x_i) + 1$. Следовательно, $|h(x)| < cr^2/8n + 1$.

Пусть r удовлетворяет неравенству $r \leqslant 2\sqrt{n/c}$. Ясно, что в этом случае выполняется $cr^2/8n + 1 \leqslant 1{,}5$. Пусть $\tilde{f}(x)$ — ближайшее целое число к

$$\hat{f}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1}),$$

например, $\tilde{f}(x) = \lfloor \hat{f}(x) + 1/2 \rfloor$. Тогда $|\tilde{f}(x) - f(x)| \leqslant 1$, поскольку $|\tilde{f}(x) - f(x)| < 1,5 + 0,5$ и функции $\tilde{f}$, f целочисленные. Так как $\tilde{f}$ является 1-приближением каждой функции $f \in B$, значения $f(x_i)$ одни и те же и $\tilde{f}$ связана с f только через них, то одной функцией $\tilde{f}$ можно 1-приблизить любую функцию из B.

Итак, если $r \leqslant 2\sqrt{n/c}$, то $M(r) = 1$.

Теперь свяжем значения $M(r)$ и $M(2r)$. Покажем, что

$$M(2r) \leqslant M(r)(\lceil 2 + cr^2/n \rceil)^{k(r)-k(2r)}.$$

Это неравенство вытекает из того, что по значениям функции $f \in H^n_{2,c}$ в точках $0, 2r, 4r, \ldots$ и $n-1$ можно оценить ее значения в точках $r, 3r, 5r, \ldots$: функция $f(x)$ при $x = r(2t+1)$ может принимать не более $\lceil 2 + cr^2/n \rceil$ значений, а число точек x равно $k(r) - k(2r)$. Докажем это утверждение.

Пусть $x = r(2t+1)$ и x', x'' — ближайшие к x слева и справа точки из $\{n-1, 0, 2r, 4r, \ldots\}$, при этом $x' = 2rt$, $x'' \leqslant 2r(t+1)$.

Запишем $f(x)$ в виде $\hat{f}(x) + h(x)$, где

$$\hat{f}(x) = \frac{x'' - x}{x'' - x'} f(x') + \frac{x - x'}{x'' - x'} f(x'').$$

При этом $h(x') = h(x'') = 0$, $\Delta_2(f) = \Delta_2(h)$. Из оценки $|\Delta_2(f; x', x, x'')| < c/2n + \varphi(x', x, x'')$ следует, что

$$|h(x)| < \frac{c}{2n}(x'' - x)(x - x') + 1 \leqslant \frac{c}{2n}\left(\frac{x'' - x'}{2}\right)^2 + 1 \leqslant \frac{cr^2}{2n} + 1.$$

Поэтому значения $f(x)$ принадлежат множеству

$$(\hat{f}(x) - cr^2/2n - 1,\ \hat{f}(x) + cr^2/2n + 1) \cap \mathbb{Z},$$

которое содержит не более $\lceil 2 + cr^2/n \rceil$ точек.

Итак,

$$M(2r) \leqslant M(r) \lceil 2 + cr^2/n \rceil^{k(r)-k(2r)}.$$

Используя также оценки $\mathrm{Approx}(H^n_{2,c}) \leqslant n^{k(r)} M(r)$ и $M(r) = 1$ при $r \leqslant 2\sqrt{n/c}$, получаем оценку для $\mathrm{Approx}(H_{2,c})$ в явном виде.

Пусть $r_t = \lfloor 2\sqrt{n/c} \rfloor 2^t$. Положим $m_t = \log M(r_t)$. Тогда $m_0 = 0$,

$$m_t \leqslant m_t + (k(r_t) - k(r_{t+1})) \log \lceil 2 + cr^2_{q-1}/n \rceil.$$

Поэтому

$$m_t \leqslant \sum_{q=1}^{t} (k(r_{q-1}) - k(r_q)) \log \left\lceil 2 + \frac{cr^2_{q-1}}{n} \right\rceil.$$

Найдем верхнюю оценку этой суммы. Сначала заметим, что

$$k(r_{q-1}) - k(r_q) = \left\lceil \frac{n-1}{r_{q-1}} \right\rceil - \left\lceil \frac{n-1}{2r_{q-1}} \right\rceil \leqslant 1 + \frac{n-1}{2r_{q-1}} < 1 + \frac{n}{2^q r_0}.$$

Далее, при достаточно больших n имеем $cr_{q-1}^2/n \geqslant cr_0^2/n = \frac{c}{n}\lfloor 2\sqrt{n/c}\rfloor^2$. Поэтому

$$\lceil 2 + cr_{q-1}^2/n \rceil < 3 + cr_{q-1}^2/n < 2cr_{q-1}^2/n.$$

Следовательно,

$$m_t \leqslant \sum_{q=1}^{t} \left(1 + \frac{n}{2^q r_0}\right)\left(2q + 1 + \log\frac{cr_0^2}{4n}\right).$$

Поскольку $r_0 = \lfloor 2\sqrt{n/c}\rfloor$, имеем $\log(cr_0^2/4n) \leqslant 0$ и

$$m_t \leqslant \sum_{q=1}^{t} \left(1 + \frac{n}{2^q r_0}\right)(2q+1) \leqslant t^2 + 2t + \frac{5n}{r_0}.$$

Наконец,

$$\begin{aligned}\log \operatorname{Approx}(H_{2,c}^n) &\leqslant m_t + k(r_t)\log n \\ &= m_t + \left(1 + \left\lceil \frac{n-1}{2^t r_0}\right\rceil\right)\log n \leqslant t^2 + 2t + \frac{5n}{r_0} + 2\log n + \frac{n\log n}{2^t r_0}.\end{aligned}$$

Выбрав t таким, чтобы выполнялись соотношения $t = o(n^{1/4})$ и $\log n = o(2^t)$, получим

$$\log \operatorname{Approx}(H_{2,c}^n) \leqslant \frac{5}{2}\sqrt{nc}\,(1 + o(1)).$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $d(x) = \frac{1}{2}(\max(0, x(1-x)))^2$. Функция $d(x)$ дифференцируема, а ее производная, равная нулю при $x \notin [0,1]$ и равная $x - 3x^2 + 2x^3$ при $x \in [0,1]$, удовлетворяет условию Липшица с константой 1.

Пусть r — целочисленный параметр. Рассмотрим множество A функций $f : [0,1) \to [0,1)$ вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} \frac{cr^2 a_k}{n^2} d\left(\frac{nx - 1/2}{r} - k + 1\right),$$

где $K = \lfloor \frac{n-1}{r} \rfloor$, $a_k \in \{0,1\}$.

Множество A является подмножеством $H_{2,c}$. Поэтому дискретные функции вида $g(x) = \lfloor nf(x/n + 1/2n)\rfloor$ принадлежат множествам $\widehat{H}_{2,c}^n$, $H_{2,c}^n$.

Оценим расстояние (в равномерной метрике) между различными функциями g. Для этого оценим величину $\rho = \max\limits_{x\in I_n}|D_k(x)|$, где $D_k(x) = \left\lfloor \frac{cr^2}{n} d\left(\frac{x}{r}+1-k\right)\right\rfloor$. Поскольку $\max\limits_{x\in I_n}|D_k(x)| \geqslant |D_k(r(k-1)+\lfloor r/2\rfloor)|$, имеем $\rho \geqslant \frac{c}{4n}\left(\frac{r}{2}-1\right)^2 - 1$. Следовательно, $\rho \geqslant 3$ при любом $r \geqslant 2+8\sqrt{n/c}$.

Пусть $g'(x) = \lfloor nf'(x/n+1/2n)\rfloor$ и $g''(x) = \lfloor nf''(x/n+1/2n)\rfloor$ — различные функции, где f', f'' принадлежат множеству A и задаются соответственно наборами коэффициентов a'_i, a''_i. Тогда

$$\max_{x\in I_n}|g'(x)-g''(x)| \geqslant \max_i |a'_i - a''_i|\rho \geqslant \rho = 3,$$

т. е. функции g являются 3-различимыми, поэтому $\log \operatorname{Approx} \widehat{H}^n_{2,c} \geqslant K$.

При $r = \lceil 2+8\sqrt{n/c}\rceil$ имеем $K \geqslant \frac{1}{8}\sqrt{nc}(1+o(1))$. Теорема 2 доказана.

Итак, справедливы оценки

$$\frac{1}{8}\sqrt{nc}(1+o(1)) \leqslant \log \operatorname{Approx} \widehat{H}^n_{2,c} \leqslant \log \operatorname{Approx} H^n_{2,c} \leqslant \frac{5}{2}\sqrt{nc}(1+o(1)),$$

которые согласуются с соотношением $\mathscr{H}_{1/n}(H_{2,c}) \asymp \sqrt{nc}$ (см. [2]). Здесь $\mathscr{H}_\varepsilon(K)$ — ε-энтропия множества K [2]; выражение $f(n) \asymp g(n)$ означает, что при всех достаточно больших n справедливы неравенства $c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n)$, где c_1, c_2 — подходящие положительные константы.

§ 4. Сложность точного и приближенного вычисления дискретных функций

При $n = 2^r$ дискретные функции $f : I_n \to I_n$ можно рассматривать как булевы операторы $f : \{0,1\}^r \to \{0,1\}^r$, ставя в соответствие каждому числу из I_n его двоичную запись. Такие операторы можно реализовать *схемами из функциональных элементов*, выполняющих некоторые элементарные операции (например, конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание); каждая схема S имеет *сложность* $L(S)$, равную числу ее элементов (необходимые определения см. в [3]). Сложность $L(f)$ оператора f определяется как сложность схем с наименьшим числом элементов, реализующих f; для последовательности классов операторов $\{K_1, K_2, \dots\}$, где K_i состоит из операторов $f : \{0,1\}^i \to \{0,1\}^{m_i}$, рассматривается функция $L(r) = \max\limits_{f\in K_r} L(f)$.

Введем сложность приближенной реализации функций. Операторы $f : \{0,1\}^r \to \{0,1\}^r$ будем рассматривать как функции $f : I_n \to I_n$. Положим $L^{\mathrm{Approx}}(f) = \min L(g)$, где min берется по всем $g : I_n \to I_n$ таким, что $|g(x)-f(x)| \leqslant 1$, и пусть $L^{\mathrm{Approx}}(r) = \max\limits_{f\in K_r} L^{\mathrm{Approx}}(f)$.

Нам требуются следующие известные результаты, относящиеся к сложности реализации функций и классов.

1. *Нижняя оценка* [3, следствие из теоремы Д. 1]: если K_r состоит из операторов $f : \{0,1\}^r \to \{0,1\}^r$ и $\frac{r \log\log|K_r|}{\log|K_r|} \to 0$, то $L(r) \geqslant \frac{\log|K_r|}{\log\log|K_r|}(1+o(1))$.

2. *Верхняя оценка* [3, теорема Д. 12]: если K_r состоит из всех операторов $f : \{0,1\}^r \to \{0,1\}^{m_r}$, то $L(r) \leqslant \frac{m_r 2^r}{r}(1+o(1))$.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Для $K_r = H^r_{2,c}$ и $K_r = \widehat{H}^r_{2,c}$ имеют место соотношения*

$$L(r) = \frac{2,\kappa}{r}(1+o(1)), \quad c_3\frac{2^{r/2}}{r} \leqslant L^{\text{Approx}}(r) \leqslant c_4\frac{2^{r/2}}{r},$$

где c_3, c_4 — положительные константы.

Доказательство. *Нижние оценки* следуют из нижних оценок соответственно для $|K_r|$ и $\mathrm{Approx}(K_r)$.

Верхняя оценка для $L(r)$ устанавливается следующим образом. Как указано при доказательстве леммы, функция f из $H^n_{2,c}$ однозначно восстанавливается по формуле

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}y_i + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}y_{i+1} + \theta_i \right\rfloor + \chi_x \tag{3}$$

при заданном наборе $(y_1,\ldots,y_k,\theta_1,\ldots,\theta_{k-1},\chi_0,\ldots,\chi_{n-1})$ и $n = 2^r$, $k = \lceil n/(\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor)+1\rceil = n^{2/3}(1+o(1))$, $y_i \in I_n$, $\theta_i \in \{-1/2,0,1/2\}$, $\chi_i \in \{0,1\}$, $i = \lfloor x/\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor\rfloor$, $x_i = i\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor$, $x_{i+1} = \min(x_i+\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor, n-1)$.

Можно показать, что при вычислении $f(x)$ по формуле (3) с наибольшей сложностью находится r-местная булева функция χ_x. Тем самым $L(f) \leqslant \frac{2^r}{r}(1+o(1))$.

Верхняя оценка для $L^{\text{Approx}}(r)$ устанавливается с помощью следующей конструкции.

Заметим, что если $f \in H^n_{2,c}$, то $g(x) = f(n-1-x)$ — также функция из $H^n_{2,c}$. Поэтому, рассматривая f и g как булевы операторы *) $\{0,1\}^r \to \{0,1\}$, можно вычислить f как

$$f(x_1,\ldots,x_r) = \bar{x}_1 f(0,x_2,\ldots,x_r) \vee x_1 g(0,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_r).$$

Тем самым достаточно уметь вычислять функции из $H^n_{2,c}$ на первой половине области определения.

Введем обозначения (здесь $x \in I_n$, $x = |(x_1,\ldots,x_r)|$):

$x|_m = |(x_1,\ldots,x_m,\underbrace{0,\ldots,0}_{r-m})|$;

$x|^m = x|_m + 2^{r-m} = |(x_1,\ldots,x_m,\underbrace{0,\ldots,0}_{r-m})| + |(\underbrace{0,\ldots,0}_{m-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{r-m})|$.

Заметим, что $x|_m \leqslant x < x|^m$.

Пусть $\delta_m(x) = f((x|_m + x|^m)/2) - \lfloor\frac{1}{2}(f(x|_m)+f(x|^m))\rfloor$. Тогда

$$f(x|_{m+1}) = \begin{cases} f(x|_m), & \text{если} \quad x_{m+1}=0,\\ \left\lfloor \frac{1}{2}\lfloor(f(x|_m)+f(x|^m))\right\rfloor + \delta_m(x), & \text{если} \quad x_{m+1}=1; \end{cases} \tag{4}$$

*) Имеется в виду следующее соответствие между булевым набором $\tilde{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ и числом $x \in I_{2^n}$: $x = 2^{n-1}x_1 + \cdots + 2^0 x_n$.

$$f(x|^{m+1}) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{1}{2}(f(x|_m) + f(x|^m)) \right\rfloor + \delta_m(x), & \text{если} \quad x_{m+1} = 0, \\ f(x|^m), & \text{если} \quad x_{m+1} = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Предлагается следующая схема вычисления $f(x)$.

Шаг 1. Вычисляя $\delta_m, \delta_{m+1}, \dots$ по формулам (4) и (5), последовательно находим $f(x|_{m+1})$ и $f(x|^{m+1})$, $f(x|_{m+2})$ и $f(x|^{m+2}), \dots, f(x|_{m_1})$ и $f(x|^{m_1})$.

Шаг 2. Для некоторого $m = m_0$ вычисляем $f(x|_m)$ и $f(x|^m)$.

Шаг 3. Находим приближенное значение $f(x)$ линейной интерполяцией из $f(x|_{m_1})$ и $f(x|^{m_1})$, т. е. вместо $f(x)$ вычисляем

$$\tilde{f}(x) = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{x - x|_{m_1}}{x|^{m_1} - x|_{m_1}} f(x|^{m_1}) + \frac{x|^{m_1} - x}{x|^{m_1} - x|_{m_1}} f(x|_{m_1}) \right\rfloor.$$

Оценим сложность такого вычисления и подберем m_0 и m_1 так, чтобы минимизировать сложность и добиться на шаге 3 погрешности не больше единицы.

Из определения $\delta_m(x)$ следует, что

$$\begin{aligned} |\delta_m(x)| &\leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left| f(x|^m) - 2f\left(\frac{x|^m + x|_m}{2}\right) + f(x|_m) \right| \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} 2^{2(r-m)} \left| \Delta_2\left(f; x|^m, \frac{x|^m + x|_m}{2}, x|_m\right) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2} + \frac{c2^{2(r-m)}}{82^r} + 1 \leqslant \max\left(3, \frac{c2^r}{42^{2m}}\right). \end{aligned}$$

Записывая значение δ_m как булевский набор длины r, представляющий $\delta_m(x)$ в кольце $\mathbb{Z}_n$, можно заметить, что старшие разряды этого набора одинаковы, т. е. количество тех разрядов, которые надо вычислять независимо, не превышает $\min(3, r - 2m + \log c + c_5)$, где c_5 — абсолютная константа. Поэтому сложность вычисления $\delta_m(x)$ не превышает

$$\frac{2^m}{m} \min(3, r - 2m + \log c + c_5)(1 + o(1)).$$

Проводя вычисления в $\mathbb{Z}_n$, можно показать, что остальная часть вычислений по формулам (4) и (5) имеет сложность $O(r)$, при этом сложность вычислений на шаге 2 не превышает

$$O(r^2) + \left(\sum_{m=m_0}^{m_1} \frac{2^m}{m} \min(3, r - 2m + \log c + c_5) \right) (1 + o(1)).$$

Сложность шага 3 можно оценить сверху величиной $O(r^2)$.

Параметр m_1 выбираем так, чтобы выполнялось неравенство $|f - \tilde{f}| \leqslant 1$. Так как f и $\tilde{f}$ целочисленные, то достаточно убедиться в том, что $|f - \tilde{f}| < 2$.

Имеем

$$
\begin{aligned}
|f-\tilde f| &\leqslant \frac12 + \left|\frac{x-x|_{m_1}}{x|^{m_1}-x|_{m_1}} f(x|^{m_1}) + \frac{x|^{m_1}-x}{x|^{m_1}-x|_{m_1}} f(x|_{m_1}) - f(x)\right| \\
&= \frac12 + (x-x|_{m_1})(x|^{m_1}-x)|\Delta_2(f;x|^{m_1},x,x|_{m_1})| \\
&< \frac12 + (x-x|_{m_1})(x|^{m_1}-x)\left(c/2^r + \frac{1}{(x-x|_{m_1})(x|^{m_1}-x)}\right) \\
&\leqslant \frac32 + \frac14\,\frac{c2^{2(r-m)}}{2^r} = \frac32 + \frac{c2^r}{4\cdot 2^{2m_1}}.
\end{aligned}
$$

Тем самым для выполнения неравенства $|f-\tilde f| < 2$ достаточно иметь $\frac{c\cdot 2^r}{4\cdot 2^{2m_1}} < \frac12$, т. е. $m_1 > \frac{r-1+\log c}{2}$. Поэтому, положив $m_0 = \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor$, $m_1 = \left\lfloor \frac{r+\log c+1}{2} \right\rfloor$, получаем, что сложность вычисления не превышает

$$
\left(2r\frac{2^{m_0}}{m_0} + \sum_{m=m_0}^{m_1} \frac{2^m}{m}\min(3, r-2m+\log c + c_5) + O(r^2)\right)(1+o(1)) \leqslant \mathrm{const}\, 2^{r/2}/r.
$$

Теорема 3 доказана.

Автор выражает признательность своему учителю О. Б. Лупанову за постановку задач и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аманжаев Г. Г.** Дискретные функции с заданным модулем непрерывности // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1992. № 5. С. 86-89.
2. **Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.** ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, вып. 2. С. 3–8.
3. **Лупанов О. Б.** Об одном методе синтеза управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1965. Вып. 14. С. 31–110.

Адрес автора:

Россия,
119899 Москва,
Воробьевы горы,
МГУ, мех.-мат. фак.

Статья поступила
2 декабря 1994 г.