ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 1995. Том 2, № 2, 49–61

УДК 519.716

О ЗАМКНУТЫХ КЛАССАХ В k-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ, СОДЕРЖАЩИХ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНУЮ ОДНОРОДНУЮ ФУНКЦИЮ*)

С. С. Марченков

Доказано, что при любом k, $k \geqslant 2$, в k-значной логике существует лишь конечное число замкнутых классов, содержащих переключательную однородную функцию $s(x, y, z)$, которая равна z при $x = y$, y при $x = z$ и x в остальных случаях. Каждый такой класс состоит из всех функций, сохраняющих конечное множество отношений трех явно указанных типов.

Обозначим через P_k множество всех функций на $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, принимающих значения из E_k.

В универсальной алгебре и в теории функций многозначной логики заметную роль играют однородные функции [1], т. е. функции, самодвойственные относительно любых подстановок на E_k. Отличительная особенность этих функций состоит в том, что их можно задавать с использованием лишь переменных и отношения равенства между переменными. Однородные функции и замкнутые классы однородных функций довольно интенсивно изучались, и в настоящее время при любом k, $k \geqslant 2$, описаны все замкнутые классы однородных функций из P_k. При $k = 2$ понятия однородной функции и самодвойственной функции совпадают. Все 6 замкнутых классов самодвойственных функций при $k = 2$ описаны, например, в работе [2]. При $k = 3$ имеется 8 замкнутых классов однородных функций, при $k = 4$ имеется 14 классов и при любом $k \geqslant 5$ имеется $4k - 3$ классов (см. [3–6]). Каждый замкнутый класс однородных функций имеет конечный базис по суперпозиции.

Согласно исследованиям по замкнутым классам однородных функций наличие в произвольном замкнутом классе нетривиальной (неселекторной) однородной функции является условием, которое во многих случаях позволяет установить существование конечного базиса в этом

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-16006).

классе. В частности, в [7] было показано, что любой замкнутый класс в P_k $(k \geqslant 3)$, содержащий хотя бы одну из однородных функций

$$d(x,y,z) = \begin{cases} x & \text{при} \quad x = y, \\ z & \text{при} \quad x \neq y; \end{cases}$$

$$l_3(x,y,z) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x, y, z \quad \text{попарно различны}, \\ z & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

и любой замкнутый класс в P_3, содержащий однородную функцию $r_3(x,y) = 2x + 2y$, имеют конечные базисы. Однако из доказательств, предложенных в [7] и опирающихся на результаты работ [8, 9], не удается извлечь базисы явным образом, а также получить эффективное описание всех исследуемых классов.

В настоящей работе мы предлагаем прием, с помощью которого можно получать эффективное описание всех замкнутых классов, содержащих заданные функции (не обязательно однородные). В основе приема лежит теория Галуа для алгебр Поста [10]. Мы применяем этот прием для изучения замкнутых классов, в которые входит многозначное обобщение линейной самодвойственной функции $x + y + z$ — однородная функция

$$s(x,y,z) = \begin{cases} z, & \text{если} \quad x = y, \\ y, & \text{если} \quad x = z, \\ x & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

При $k = 2$ функция $s(x,y,z)$, как легко видеть, совпадает с функцией $x + y + z$, образующей базис класса L_4 всех линейных α-функций [2]. При $k \geqslant 3$ функция s является базисом замкнутого класса однородных функций, который в [5, 6] обозначен через $S_k L_4^*$.

Отметим, что при любом k, $k \geqslant 3$, класс $S_k L_4^*$ содержит однородную функцию $l_3(x,y,z)$. Поэтому в силу результатов из [7] любой замкнутый класс, содержащий функцию s, имеет конечный базис. Однако из [7] даже не вытекает, будет ли конечным число таких замкнутых классов. Ниже покажем, что при $k \geqslant 2$ любой замкнутый класс из P_k, содержащий функцию s, является классом всех функций, сохраняющих подходящее конечное множество отношений на E_k. Отсюда вытекает, в частности, что при любом фиксированном k число указанных замкнутых классов конечно.

Дадим необходимые определения. Понятия суперпозиции, замыкания относительно суперпозиции и замкнутого класса предполагаем известными [11]. Если $Q \subseteq P_k$, то через $[Q]$ обозначается замыкание множества Q относительно операции суперпозиции. В отличие от [11] мы рассматриваем лишь замкнутые классы, содержащие селекторные функции $e_n^i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, $n = 1, 2, \ldots$. Через $\mathfrak{A}_k$

обозначим решетку всех замкнутых классов из P_k, содержащих селекторные функции. Наименьшим элементом решетки $\mathfrak{A}_k$ является замкнутый класс, состоящий только из селекторных функций, наибольшим — класс P_k.

Наряду с функциями из P_k будем рассматривать отношения на E_k. Множество всех отношений на E_k обозначим через Π_k. Если $\rho(x_1, \ldots, x_m) \in \Pi_k$, то отношение ρ отождествляем с множеством всех тех наборов из E_k^m, на которых ρ истинно. В связи с этим используем следующие термины: полное (тождественно истинное) отношение, пустое (тождественно ложное) отношение, отношение ρ есть расширение ($\sigma \subseteq \rho$) или сужение ($\rho \subseteq \sigma$) отношения σ.

На множестве Π_k определим ряд операций (см. также [10]). *Конъюнкцией* отношений $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ и $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ назовем $(m+n)$-местное отношение

$$\rho(x_1, \ldots, x_m) \& \sigma(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}).$$

Проекцией отношения $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ по переменной x_i называется $(m-1)$-местное отношение

$$(\exists x_i)\rho(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m),$$

где область действия квантора $\exists x_i$ есть множество E_k. Операции перестановки и отождествления переменных предполагаем известными.

Диагоналями называем отношения, которые можно получить из элементарных диагоналей вида $x_i = x_j$ с помощью операций конъюнкции и отождествления переменных. Пустое отношение удобно причислять к диагоналям.

Пусть $R \subseteq \Pi_k$. *Замыканием* множества R (обозначение $[R]$) назовем наименьшее множество отношений из Π_k, которое содержит все диагонали, все отношения из R и замкнуто относительно применения операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных. Через $\mathscr{L}_k$ обозначим решетку всех замкнутых множеств отношений на E_k. *Наименьшим элементом* решетки $\mathscr{L}_k$ является множество всех диагоналей, *наибольшим* — множество Π_k.

Пусть

$$f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k, \quad \rho(x_1, \ldots, x_m) \in \Pi_k.$$

Будем говорить, что функция f *сохраняет отношение* ρ, если для любых n наборов $(a_{11}, \ldots, a_{m1}), \ldots, (a_{1n}, \ldots, a_{mn})$, удовлетворяющих отношению ρ, набор $(f(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, f(a_{m1}, \ldots, a_{mn}))$ также удовлетворяет отношению ρ. Если $Q \subseteq P_k$, $R \subseteq \Pi_k$, то будем говорить, что Q сохраняет R, если каждая функция из Q сохраняет любое отношение из R. Множество всех функций из P_k, сохраняющих R, обозначим через $\operatorname{Pol} R$, а множество всех отношений из Π_k, сохраняемых функциями из Q, — через $\operatorname{Inv} Q$. Если Q — множество всех селекторных функций из P_k, а R —

множество всех диагоналей из Π_k, то нетрудно видеть, что $\mathrm{Pol}\, R = \Pi_k$, $\mathrm{Inv}\, P_k = R$, $\mathrm{Pol}\,\Pi_k = Q$, $\mathrm{Inv}\, Q = \Pi_k$.

Известно [10], что отображения Pol и Inv задают антиизоморфизм решеток $\mathfrak{A}_k$ и $\mathscr{L}_k$. Более точно, если $Q \subseteq P_k$, $R \subset \Pi_k$, то $\mathrm{Pol}\, R$ — замкнутый класс из $\mathfrak{A}_k$, $\mathrm{Inv}\, Q$ — замкнутое множество из $\mathscr{L}_k$, $[Q] = \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}\, Q$ и $[R] = \mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}\, R$. Таким образом, замкнутые классы функций из P_k можно определять через соответствующие замкнутые множества отношений на E_k.

Эти результаты применим для описания всех замкнутых классов из P_k, содержащих функцию s. С этой целью сначала определим множество отношений $\mathrm{Inv}\{s\}$.

Пусть C_k обозначает совокупность следующих отношений на E_k: все отношения вида $x \in E$, где E — собственное (непустое и отличное от E_k) подмножество E_k; все отношения вида

$$\pi(x_1) = x_2, \tag{1}$$

где π — подстановка на E_k; отношение

$$\lambda_k(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 \in E_2)\&(x_2 \in E_2)\&(x_3 \in E_2)\&(x_1 + x_2 + x_3 = 0),$$

где сложение берется по модулю 2.

Функция s, будучи структурной однородной функцией [1], по определению сохраняет все отношения вида $x \in E$ и (1). Кроме того, несложно проверить, что функция s сохраняет отношения λ_k. Значит, $s \in \mathrm{Pol}\, C_k$. Однако при $k = 2$ функция s образует базис класса L_4, а при $k \geqslant 3$ — базис класса $S_k L_4^*$. Таким образом, $L_4 \subseteq \mathrm{Pol}\, C_2$ и $S_k L_4^* \subseteq \mathrm{Pol}\, C_k$ при $k \geqslant 3$.

Убедимся, что $L_4 = \mathrm{Pol}\, C_2$. Предположим $L_4 \neq \mathrm{Pol}\, C_2$. Так как C_2 содержит все отношения (1), то замкнутый класс $\mathrm{Pol}\, C_2$ должен состоять только из самодвойственных функций. Известно [2], что класс L_4 непосредственно содержится только в одном замкнутом классе самодвойственных функций — классе L_5. Поэтому если $L_4 \neq \mathrm{Pol}\, C_2$, то $L_5 \subseteq \mathrm{Pol}\, C_2$. Однако в класс L_5 входит функция $x + 1$, которая не сохраняет отношения $x = 0$ из C_2. Следовательно, $L_4 = \mathrm{Pol}\, C_2$.

По этой же схеме доказывается равенство $S_k L_4^* = \mathrm{Pol}\, C_k$ при $k \geqslant 3$. В работах [4–6] установлено, что класс $S_3 L_4^*$ непосредственно содержится только в одном замкнутом классе однородных функций S_3^*, а при $k \geqslant 4$ класс $S_k L_4^*$ — только в замкнутых классах S_k^* и $S_k L_4$. Далее, при любом $k \geqslant 3$ в классе S_k^* содержится однородная функция

$$p(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{если} \quad x = y, \\ x, & \text{если} \quad x \neq y, \end{cases}$$

а при любом $k \geqslant 4$ в классе $S_k L_4$ — однородная функция

$$r_k(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \begin{cases} x_k, & \text{если } \{x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k\} = E_k, \\ x_1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что функция p не сохраняет отношения λ_k, а функция r_k — отношения $x \in E_{k-1}$. Таким образом, $S_k L_4^* = \operatorname{Pol} C_k$.

Согласно [10] имеем $\operatorname{Inv}\{s\} = \operatorname{Inv}[\{s\}]$ и $\operatorname{Pol} C_k = \operatorname{Pol}[C_k]$. Пользуясь доказанными равенствами $L_4 = [\{s\}] = \operatorname{Pol} C_2$ при $k = 2$ и $S_k L_4^* = [\{s\}] = \operatorname{Pol} C_k$ при $k \geqslant 3$, заключаем, что $\operatorname{Inv}\{s\} = [C_k]$.

Опишем отношения, входящие в множество $[C_k]$. Покажем, что множеству $[C_k]$ принадлежат все отношения вида

$$(x_1 \in F_1) \& \ldots \& (x_n \in F_n) \& (\pi_1(x_1) + \cdots + \pi_n(x_n) = 0), \tag{2}$$

где $n \geqslant 2$, $|F_1| = \cdots = |F_n| = 2$, $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — подстановки на E_k такие, что $\pi_1(F_1) = \cdots = \pi_n(F_n) = E_2$, сложение рассматривается по модулю 2 и $|F_i|$ обозначает число элементов множества F_i.

Замечаем, что если множеству $[C_k]$ принадлежит отношение

$$\tau_m(x_1, \ldots, x_m) \equiv (x_1 \in E_2) \& \ldots \& (x_m \in E_2) \& (x_1 + \cdots + x_m = 0),$$

где $m \geqslant 3$, то отношение $\tau_{m+1}(x_1, \ldots, x_{m+1})$ также принадлежит множеству $[C_k]$, поскольку

$$\tau_{m+1}(x_1, \ldots, x_{m+1}) \equiv (\exists y)(\tau_m(x_1, \ldots, x_{m-1}, y) \& \lambda_k(x_m, x_{m+1}, y)).$$

Кроме того, имеем

$$\tau_2(x_1, x_2) \equiv (\exists y)((y = 0) \& \lambda_k(x_1, x_2, y)).$$

Теперь отношение (2) получаем из отношения τ_n и отношений $\pi_i(x_1) = x_2$ по формуле

$$(\exists y_1) \ldots (\exists y_n)((\pi_1(x_1) = y_1) \& \ldots \& (\pi_n(x_n) = y_n) \& \tau_n(y_1, \ldots, y_n)).$$

Лемма 1. *Каждое отношение из $[C_k]$ представимо в виде конъюнкции (не обязательно с непересекающимися множествами переменных) одноместных отношений, двуместных отношений вида (1) и отношений вида (2).*

Доказательство. Проведем индукцию по построению отношений в множестве $[C_k]$. Заметим, что двуместные диагонали имеют вид (1). Далее, чтобы в отношении $\rho(x_1, \ldots, x_n)$ переменную x_j отождествить с переменной x_i, достаточно рассмотреть отношение

$$(\exists x_j)(\rho(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \& (x_i = x_j)).$$

Для доказательства леммы остается установить, что к требуемому в лемме виду можно привести отношение

$$(\exists x_i)\rho(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n), \tag{3}$$

где ρ представимо в виде конъюнкции K одноместных отношений, а также отношений вида (1) и (2). Без ограничения общности считаем, что $i = n$.

Пусть $(x_n \in G_1), \ldots, (x_n \in G_m)$ — все одноместные отношения из K, которые содержат переменную x_n. Очевидно, что

$$(x_n \in G_1) \& \ldots \& (x_n \in G_m) \equiv (x_n \in G),$$

где $G = G_1 \cap \cdots \cap G_m$. Если переменная x_n в конъюнкции K входит только в одноместные отношения, то

$$\rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv (x_n \in G) \& \sigma(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

где отношение σ реализуется конъюнкцией сомножителей из K, не содержащих переменной x_n. Поэтому в данном случае отношение (3) совпадает с отношением

$$(\exists x_n)(x_n \in G) \& \sigma(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Так как первый сомножитель этого отношения представляет собой либо полное отношение при $G \neq \varnothing$, либо пустое отношение при $G = \varnothing$, отношение (3) соответственно либо совпадает с отношением $\sigma(x_1, \ldots, x_{n-1})$, либо пусто. Пустое отношение можно представить, например, в виде $(x \in \{0\}) \& (x \in \{1\})$.

Предположим, что переменная x_n в конъюнкции K входит хотя бы в одно неодноместное отношение. Рассмотрим сначала случай, когда этим отношением является отношение вида (1). Так как

$$(\pi(x_1) = x_2) \equiv (x_1 = \pi^{-1}(x_2)),$$

где π^{-1} — обратная к π подстановка на E_k, то можно предполагать, что переменная x_n входит в отношение $\pi(x_j) = x_n$. Следовательно, отношение ρ представимо в виде

$$\rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv (\pi(x_j) = x_n) \& \sigma(x_1, \ldots, x_n),$$

где отношение $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ реализуется конъюнкцией сомножителей из K, отличных от $\pi(x_j) = x_n$. Согласно логическим правилам имеем

$$(\exists x_n)((\pi(x_j) = x_n) \& \sigma(x_1, \ldots, x_n)) \equiv \sigma(x_1, \ldots, x_{n-1}, \pi(x_j)).$$

Легко видеть, что замена x_n на $\pi(x_j)$ в одноместных отношениях и в отношениях типа (1) приводит к отношениям этих же типов. Рассмотрим замену x_n на $\pi(x_j)$ в отношении (2):

$$(x_1 \in F_1)\& \ldots \&(x_{n-1} \in F_{n-1})\&(\pi(x_j) \in F_n)$$
$$\&(\pi_1(x_1) + \cdots + \pi_{n-1}(x_{n-1}) + \pi_n(\pi(x_j)) = 0). \quad (4)$$

Очевидно, что отношению

$$(x_j \in F_j)\&(\pi(x_j) \in F_n) \quad (5)$$

удовлетворяют не более чем два элемента. Если отношение (5) пусто, то и отношение (4) будет пустым. Если отношению (5) удовлетворяет один элемент a, то отношение (4) эквивалентно отношению

$$(x_1 \in F_1)\& \ldots \&(x_{j-1} \in F_{j-1})\&(x_{j+1} \in F_{j+1}))\&$$
$$\ldots \&(x_{n-1} \in F_{n-1})\&(\pi'_1(x_1) + \pi_2(x_2) + \cdots + \pi_{j-1}(x_{j-1}) + \pi_{j+1}(x_{j+1}) +$$
$$\cdots + \pi_{n-1}(x_{n-1}) = 0)\&(x_j = a),$$

где подстановка π'_1 определяется следующим способом:

$$\pi'_1(x_1) = \begin{cases} \pi_1(x_1) + \pi_j(a) + \pi_n(\pi(a)), & \text{если} \quad x_1 \in F_1, \\ \pi_1(x_1) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если же отношению (5) удовлетворяют два элемента, то, очевидно, отношения $x_j \in F_j$ и $\pi(x_j) \in F_n$ эквивалентны, а функции $\pi_j(x_j)$, $\pi_n(\pi(x_j))$ на множестве F_j либо совпадают, либо получаются одна из другой прибавлением 1 по модулю 2. Поэтому в данном случае отношение (4) эквивалентно отношению

$$(x_1 \in F_1)\& \ldots \&(x_{n-1} \in F_{n-1})\&(\pi'_1(x_1) + \pi_2(x_2) +$$
$$\cdots + \pi_{j-1}(x_{j-1}) + \pi_{j+1}(x_{j+1}) + \cdots + \pi_{n-1}(x_{n-1}) = 0),$$

где

$$\pi'_1(x_1) = \begin{cases} \pi_1(x_1) + 1, & \text{если } x_1 \in F_1 \text{ и функции } \pi_j(x_j),\ \pi_n(\pi(x_j)) \\ & \text{отличаются на множестве } F_j, \\ \pi_1(x_1) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Предположим, что конъюнкция K не содержит отношений вида (1) с переменной x_n. Так как для дальнейшего изложения существенны лишь те отношения из K, которые содержат переменную x_n, то в целях упрощения обозначений будем считать, что

$$\rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv (x_n \in G)\&\Big(\mathop{\&}_{1 \leqslant b \leqslant q} \sigma_b(x_1^b, \ldots, x_{p_b}^b, x_n)\Big),$$

где все отношения σ_b имеют вид (2), а переменные x_i^b принадлежат множеству $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Пусть в представлениях (2) отношений $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ с переменной x_n связаны соответственно подстановки $\pi_1, \dots, \pi_q$. Если множество

$$G \cap \pi_1^{-1}(E_2) \cap \dots \cap \pi_q^{-1}(E_2) \tag{6}$$

пусто, то отношение (3) также пусто. Если множество (6) состоит из одного элемента a, то отношение (3) эквивалентно отношению

$$\mathop{\&}_{1 \leqslant b \leqslant q} \sigma_b(x_1^b, \dots, x_{p_b}^b, a),$$

где в случае $p_b \geqslant 2$ отношение $\sigma_b(x_1^b, \dots, x_{p_b}^b, a)$, как и выше, приводим к виду (2).

Предположим, что множество (6) состоит из двух элементов (множество (6), очевидно, не может содержать более двух элементов). Тогда в представлении отношения ρ конъюнктивный сомножитель $(x_n \in G)$ можно опустить, а элиминирование квантора $\exists x_n$ в отношении (3) можно провести так же, как в соответствующем случае для P_2:

$$(\exists x_n)\Big(\mathop{\&}_{1 \leqslant b \leqslant q} (x_1^b + \dots + x_{p_b}^b + x_n = 0)\Big)$$
$$\equiv \mathop{\&}_{1 \leqslant b < c \leqslant q} (x_1^b + \dots + x_{p_b}^b + x_1^c + \dots + x_{p_c}^c = 0).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть отношение $\rho(x_1, \dots, x_n)$ из множества $[C_k]$ представимо в виде конъюнкции одноместных отношений и отношений вида (1) и (2). Тогда ρ представимо в виде конъюнкции одноместных отношений, отношений типа (2) и типа*

$$(y_1 \in E) \& (\pi(y_1) = y_2), \tag{7}$$

где $E \subseteq E_k$, π — подстановка на E_k, причем отношения всех входящих в конъюнкцию типов будут принадлежать множеству $[\{\rho\}]$.

Доказательство. Пусть конъюнкция K одноместных отношений и отношений типа (1) и (2) представляет отношение ρ. Пусть $\sigma(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ — одно из отношений, входящих в конъюнкцию K. Обозначим через $\tau(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ проекцию отношения $\rho(x_1, \dots, x_n)$ по всем переменным, отличным от $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$. Очевидно, что $\tau \in [\{\rho\}]$. Из определения проекции следует, что отношение τ, рассматриваемое от всех переменных $x_1, \dots, x_n$, является расширением отношения ρ. С другой стороны, так как отношение $\sigma(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ является конъюнктивным сомножителем в представлении K отношения ρ, то отношение τ может быть только сужением отношения σ. Следовательно, конъюнкция, составленная из всех отношений τ, отвечающих отношениям σ из конъюнкции K, реализует отношение ρ.

Если отношение σ имеет вид (1), то отношение τ, будучи сужением отношения σ, имеет вид (7). Пусть отношение σ имеет вид (2). Если τ совпадает с σ, то τ имеет вид (2). Если же τ отлично от σ, то согласно включениям $\tau \in [\{\rho\}]$, $\rho \in [C_k]$ и лемме 1 отношение τ представимо в виде конъюнкции одноместных отношений и отношений типа (1) и (2). Так как $\tau \in [C_k]$, то проведем индукцию по числу переменных отношения τ.

Ясно, что в случае $m = 2$ отношение σ можно представить в виде (7) и, значит, отношение τ также будет иметь вид (7). Теперь единственным препятствием на пути проведения индукции является случай $m = n$. Так как τ мы считаем отличным от σ, то в конъюнкцию K должно входить по крайней мере еще одно отношение $\sigma'(x_{j_1}, \dots, x_{j_q})$. Для упрощения записи предположим, что $j_1 = 1, \dots, j_q = q$.

Пусть $q = 1$, $\sigma'(x_1) \equiv (x_1 \in F)$ и F_1 — множество, отвечающее переменной x_1 из представления (2) отношения σ. Если $F_1 \subseteq F$, то отношение σ' в конъюнкции K можно опустить. В случае $F_1 \cap F = \varnothing$ получается пустое отношение ρ и, следовательно, пустое отношение τ. Предположим, что $F_1 \cap F = \{a\}$. Тогда так же, как в лемме 1, отношение $\sigma(x_1, \dots, x_n)$ будет эквивалентно конъюнкции одноместного отношения $x_1 = a$ и $(n-1)$-местного отношения

$$(x_2 \in F_2)\& \dots \&(x_n \in F_n)\&(\pi_2'(x_2) + \pi_3(x_3) + \dots + \pi_n(x_n) = 0),$$

где

$$\pi_2'(x_2) = \begin{cases} \pi_2(x_2) + 1, & \text{если } \pi_1(a) = 1 \text{ и } x_2 \in F_2, \\ \pi_2(x_2) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тем самым число переменных в отношении σ уменьшилось на единицу.

Пусть $q \geqslant 2$. Если $q = 2$ и отношение σ' имеет вид (1), т. е.

$$\sigma'(x_1, x_2) \equiv (\pi(x_1) = x_2),$$

то конъюнкция отношений σ и σ' будет эквивалентна конъюнкции отношения σ' и отношения

$$\begin{aligned}(x_1 \in F_1)\&(\pi(x_1) \in F_2)\&(x_3 \in F_3)\& \dots \&(x_n \in F_n)& \\ \&(\pi_1(x_1) + \pi_2(\pi(x_1)) + \pi_3(x_3) + \dots + \pi_n(x_n) = 0),&\end{aligned}$$

которое получается из отношения σ заменой x_2 на $\pi(x_1)$. Так же, как в лемме 1, последнее отношение приводит либо к пустому отношению, либо к конъюнкции одноместного отношения от переменной x_1 и $(n-2)$-местного отношения вида (2) от переменных $x_3, \dots, x_n$.

Предположим, что отношение σ' имеет вид (2), т. е.

$$\sigma'(x_1, \dots, x_q) \equiv (x_1 \in G_1)\& \dots \&(x_q \in G_q)\&(\varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_q(x_q) = 0),$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ — подстановки на E_k. Учитывая рассуждения для случая $q = 1$, будем считать, что $G_1 = F_1, \ldots, G_q = F_q$. Согласно свойствам линейных булевых функций при $x_1 \in F_1, \ldots, x_q \in F_q$ имеем

$$\varphi_1(x_1) + \cdots + \varphi_q(x_q) = \pi_1(x_1) + \cdots + \pi_q(x_q) + b,$$

где $b \in \{0, 1\}$. Поэтому при $q = n$ конъюнкция отношений σ, σ' либо эквивалентна отношению σ (при $b = 0$), либо является пустым отношением (при $b = 1$). Если же $q < n$, то конъюнкция отношений σ, σ' эквивалентна конъюнкции отношения σ' и отношения

$$(x_{q+1} \in F_{q+1})\&\ldots\&(x_n \in F_n)\&(b + \pi_{q+1}(x_{q+1}) + \cdots + \pi_n(x_n) = 0).$$

Последнее отношение в случае $b = 1$, как и выше, приводим к виду (2). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\rho(x_1, \ldots, x_n)$ — *отношение* (2), $m = \max(\lfloor k/2 \rfloor, 4)$ *и* R — *множество всех не более чем* m*-местных отношений из* $[\{\rho\}]$. *Тогда* $[\{\rho\}] = [R]$.

Доказательство. Включение $[R] \subseteq [\{\rho\}]$ очевидно, поэтому доказываем включение $[\{\rho\}] \subseteq [R]$. Так как соотношение $[\{\rho\}] \subseteq [R]$ справедливо при $n \leqslant m$, то считаем, что $n > m$.

Предположим, что в представлении (2) отношения ρ среди множеств $F_1, \ldots, F_n$ есть по крайней мере два одинаковых. Пусть, например, $F_1 = F_2$. Положим $\sigma_1(x_3, \ldots, x_n) \equiv (\exists x_2)(\rho(x_2, x_2, x_3, \ldots, x_n))$. Согласно определению отношения ρ имеем

$$\sigma_1(x_3, \ldots, x_n) \equiv (x_3 \in F_3)\& \ldots\&(x_n \in F_n)\&(a + \pi_3(x_3) + \cdots + \pi_n(x_n) = 0), \quad (8)$$

где $a = 0$, если подстановки π_1, π_2 совпадают на множестве F_1, и $a = 1$ в противном случае. Пусть

$$\sigma_2(x_1, x_2, x_3, y_3) \equiv (\exists x_4)\ldots(\exists x_n)(\rho(x_1, \ldots, x_n)\&\rho(x_1, x_1, y_3, x_4, \ldots, x_n)).$$

Тогда

$$\sigma_2(x_1, x_2, x_3, y_3) \equiv (x_1 \in F_1)\&(x_2 \in F_2)\&(x_3 \in F_3) \&(y_3 \in F_3)\&(a + \pi_1(x_1) + \pi_2(x_2) + \pi_3(x_3) + \pi_3(y_3) = 0).$$

Следовательно,

$$(\exists y_3)(\sigma_1(y_3, x_4, \ldots, x_n)\&\sigma_2(x_1, x_2, x_3, y_3)) \equiv \rho(x_1, \ldots, x_n).$$

Таким образом, $\rho \in [\{\sigma_1, \sigma_2\}]$, причем $\{\sigma_1, \sigma_2\} \subseteq [\{\rho\}]$, отношение σ_1 зависит от $n-2$ переменных, а отношение σ_2 — от четырех переменных.

Допустим теперь, что среди множеств $F_1, \dots, F_n$ имеются несовпадающие пересекающиеся множества, например множества F_1 и F_2. Если $F_1 \cap F_2 = \{b\}$, то для отношения σ_1, определенного в начале доказательства, будет справедлива эквивалентность (8), где $a = 0$, если $\pi_1(b) = \pi_2(b)$, и $a = 1$ в противном случае.

Пусть

$$\sigma_3(x_1, x_2) \equiv (\exists x_3) \dots (\exists x_n)(\rho(x_1, \dots, x_n) \& \sigma_1(x_3, \dots, x_n)).$$

Нетрудно видеть, что

$$\sigma_3(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in F_1) \& (x_2 \in F_2) \& (a + \pi_1(x_1) + \pi_2(x_2) = 0).$$

Отношение σ_3 можно представить также в виде (7), т. е.

$$\sigma_3(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in F_1) \& (\pi(x_1) = x_2),$$

где π — подстановка на E_k и $\pi(F_1) = F_2$. Пользуясь таким представлением отношения σ_3, множество F_2 в отношении ρ можно заменить множеством F_1. Действительно, пусть

$$\sigma_4(x_1, \dots, x_n) \equiv (\exists y_2)(\sigma_3(x_2, y_2) \& \rho(x_1, y_2, x_3, \dots, x_n)).$$

Тогда σ_4 представимо в виде

$$\begin{aligned}\sigma_4(x_1, \dots, x_n) \equiv{} & (x_1 \in F_1) \& (x_2 \in F_1) \& (x_3 \in F_3) \& \\ & \dots \& (x_n \in F_n) \& (\pi_1(x_1) + \pi_2(\pi(x_2)) + \pi_3(x_3) + \dots + \pi_n(x_n) = 0).\end{aligned}$$

Кроме того,

$$(\exists y_2)(\sigma_3(y_2, x_2) \& \sigma_4(x_1, y_2, x_3, \dots, x_n)) \equiv \rho(x_1, \dots, x_n).$$

Значит, $[\{\rho\}] \subseteq [\{\sigma_3, \sigma_4\}]$. Однако в представлении (2) отношения σ_4 множества F_1 и F_2 совпадают. Поэтому можно воспользоваться рассуждениями, приведенными в начале доказательства.

Для завершения доказательства леммы 3 заметим, что в множестве E_k можно выбрать не более $\lfloor k/2 \rfloor$ попарно не пересекающихся двухэлементных подмножеств.

Теорема. *При любом k, $k \geqslant 2$, в P_k имеется конечное число замкнутых классов, содержащих однородную функцию s. Каждый такой класс представим в виде $\mathrm{Pol}\, R$, где R — конечное множество отношений на E_k, состоящее из одноместных отношений, двуместных отношений вида (7) и m-местных отношений вида (2), где $m \leqslant \max(\lfloor k/2 \rfloor, 4)$.*

Доказательство. Как установлено перед леммой 1, $[\{s\}] = L_4 = \mathrm{Pol}\, C_2 = \mathrm{Pol}[C_2]$ в булевом случае и $[\{s\}] = S_k L_4^* = \mathrm{Pol}\, C_k = \mathrm{Pol}[C_k]$ при

$k \geqslant 3$. В соответствии с [10] всякий замкнутый класс из P_k, содержащий функцию s (т. е. целиком включающий класс L_4 или класс $S_k L_4^*$ при $k \geqslant 3$), можно задать в виде $\operatorname{Pol} R$, где R — замкнутое множество отношений из $[C_k]$. В силу лемм 1 и 2 любое отношение ρ из R можно представить в виде конъюнкции одноместных отношений и отношений типа (2) и (7), причем отношения всех типов входят в множество $[\{\rho\}]$. Если это конечное множество отношений обозначить через R_1, то из включения $R_1 \subseteq [\{\rho\}]$ вытекает, что $\operatorname{Pol} \rho \subseteq \operatorname{Pol} R_1$. Вместе с тем конъюнкция отношений из R_1 определяет отношение ρ. Поэтому $\rho \in [R_1]$ и, значит, $\operatorname{Pol} R_1 \subseteq \operatorname{Pol} \rho$. Таким образом, $\operatorname{Pol} \rho = \operatorname{Pol} R_1$.

Используя лемму 3, выбираем в $[R_1]$ конечное подмножество R_2 не более чем m-местных отношений ($m = \max(\lfloor k/2 \rfloor, 4)$) так, чтобы выполнялось равенство $\operatorname{Pol} \rho = \operatorname{Pol} R_2$. Очевидно, что для получения класса $\operatorname{Pol} R$ вместо замкнутого множества отношений R достаточно взять конечное множество отношений $\cup R_2$, где объединение берется по всем конечным множествам R_2, построенным указанным выше способом для отношений ρ из R. Отсюда вытекает конечность числа замкнутых классов, содержащих функцию s. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что любой замкнутый класс, содержащий функцию s, представляет собой пересечение конечного числа замкнутых классов, каждый из которых определяется единственным отношением типа $x \in E$, (7) или (2), причем в последнем отношении $n \leqslant \max(\lfloor k/2 \rfloor, 4)$, а множества $F_1, \ldots, F_n$ попарно не пересекаются. Отношения $x \in E$ задают в P_k предполные классы. Отношения вида (7) определяют обобщения классов самодвойственных функций, отношения вида (2) — обобщения классов линейных булевых функций, где линейность проявляется на множестве $F_1 \times \cdots \times F_n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Marczewski E.** Homogeneous operations and homogeneous algebras // Fund. Math. 1964. V. 56, N 2. P. 81–103.

2. **Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.** Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

3. **Марченков С. С.** О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1979. Вып. 36. С. 5–22.

4. **Csakany B., Gavalcova T.** Finite homogeneous algebras. I // Acta Sci. Math. 1980. V. 42, N 1-2. P. 57–65.

5. **Марченков С. С.** Об однородных алгебрах // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 4. С. 787–790.

6. **Марченков С. С.** Однородные алгебры // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1982. Вып. 39. С. 85–106.
7. **Марченков С. С.** О замкнутых классах в P_k, содержащих однородные функции. М., 1984. 28 с. (Препринт / АН СССР. Ин-т прикладной математики; № 35).
8. **Baker K. A., Pixley A. F.** Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems // Math. Z. 1975. Bd 143, N 3. S. 165–174.
9. **Тайманов В. А.** О декартовых степенях P_2 // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 6. С. 1327–1330.
10. **Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.** Теория Галуа для алгебр Поста. I, II // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1–10; № 5. С. 1–9.
11. **Яблонский С. В.** Введение в теорию функций k-значной логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974. С. 9–66.

Адрес автора:

Россия,
125047 Москва,
Миусская пл., 4,
Институт
прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН

Статья поступила

31 января 1995 г.