ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 1995. Том 2, № 2, 62–68

УДК 517.71

СИЛЬНО СУЩЕСТВЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ФУНКЦИЙ k-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

И. Мирчев

Устанавливается несколько условий, которые являются достаточными для существования сильно существенных и c-сильно существенных переменных у функций k-значной логики.

Введение

Задачи о сильно существенных переменных дискретных функций рассматривались рядом авторов. О. Б. Лупанов [1] показал, что любая булева функция, зависящая существенно не менее чем от двух переменных, имеет хотя бы одну сильно существенную переменную. Это утверждение было доказано также Н. А. Соловьевым [2]. Для произвольных функций аналогичное утверждение установил А. Саломаа [3]. Ю. Я. Брейтбарт [4] доказал, что любая булева функция, зависящая существенно хотя бы от двух переменных, имеет не менее двух сильно существенных переменных. Соответствующей проблематикой для функций k-значной логики занимался К. Н. Чимев [5] (см. также [6]).

В настоящей статье приводятся некоторые условия, достаточные для существования сильно существенных и c-сильно существенных переменных у функций k-значной логики.

§ 1. Основные понятия и определения

Определение 1 [5]. Функция k-значной логики $f(x_1, ..., x_n)$ *зависит существенно от переменной* $x_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, если для некоторых констант $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n$ функция $f(x_1 = c_1, \ldots, x_{i-1} = c_{i-1}, x_i, x_{i+1} = c_{i+1}, \ldots, x_n = c_n)$ принимает хотя бы два значения.

Несущественные переменные называются *фиктивными*.

Через $Ess(f)$ будем обозначать множество всех существенных переменных функции f, а через $F(n)$ — множество всех функций, которые зависят существенно от n переменных.

Определение 2 [7]. Пусть $N \subseteq Ess(f)$. Множество $M = \{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq Ess(f)$ будем называть *доминатором множества* N (у f), если существуют константы $c_1, \ldots, c_m$ такие, что

$$N \cap Ess(f(x_1 = c_1, \ldots, x_m = c_m)) = \varnothing,$$

и M — минимальное множество с указанным свойством (т. е. не существует $M_1 \subset M$, обладающего таким же свойством).

Запись $M \xrightarrow{\mathrm{d}} N$ будет означать, что N доминируется множеством M.

Определение 3 [8]. Пусть $Q \subseteq Ess(f)$. Множество $P = \{x_1, \ldots, x_p\} \subseteq Ess(f)$ будем называть *сильным доминатором множества* Q, если существует набор $\widetilde{P}^* = (c_1^*, \ldots, c_p^*)$ такой, что P является доминатором для Q относительно $\widetilde{P}^*$ и

$$\bigcup_{i=1}^{p} Zx_i = Q, \quad \text{где} \quad Zx_i = Q \setminus Ess(f(x_i = c_i^*)).$$

Запись $P \xrightarrow{\mathrm{sd}} Q$ означает, что Q сильно доминируется множеством P.

Множество Zx_i будем называть (*активной*) *зоной* x_i в Q.

Рассмотрим два примера, иллюстрирующие это определение.

Пример 1. Пусть $f = x_1x_5 + x_2x_5 + x_3x_5 + x_3x_5\bar{x}_6 + x_4x_6 \pmod 2$ — функция над $A = \{0, 1\}$, $P = \{x_5, x_6\}$ и $Q = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Ясно, что $P \xrightarrow{\mathrm{sd}} Q$ относительно $\widetilde{P}^* = (0, 0)$, где $Zx_5 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Zx_6 = \{x_4\}$.

Пример 2. Пусть $f = x_1x_3 + x_2x_3 \pmod 2$ — функция над $A = \{0, 1\}$, $P = \{x_1, x_2\}$ и $Q = \{x_3\}$. Очевидно, что $P \xrightarrow{\mathrm{d}} Q$ для f, но P не является сильным доминатором множества Q (у f).

Ряд результатов о сильно доминирующих множествах переменных дискретных функций приводится в [8].

Функцию f и все функции, которые можно получить из f заменой некоторых ее переменных константами, будем называть *подфункциями функции* f.

Определение 4 [5]. Пусть $f \in F(n)$, $n \geqslant 1$, и $\varnothing \neq M \subseteq Ess(f)$. Переменная $x \in M$ будет называться *сильно существенной для f относительно M*, если для некоторой константы c справедливо включение

$$M \setminus \{x\} \subseteq Ess(f(x = c)). \tag{1}$$

Если x является сильно существенной переменной функции f относительно всего множества $Ess(f)$, то x называется *сильно существенной переменной функции* f.

Через $Ess^*(f)$ будем обозначать множество всех сильно существенных переменных функции f.

Если включение (1) выполняется для любой константы c, то переменная x будет называться *с-сильно существенной относительно* M.

Если x является c-сильно существенной переменной для f относительно $Ess(f)$, то она называется *с-сильно существенной переменной для* f.

§ 2. Основные результаты

Будем считать, что P и Q непустые множества существенных переменных k-значной функции $f \in F(n)$ такие, что $P \cap Q = \varnothing$ и $P \cup Q = Ess(f)$.

Справедливы следующие два утверждения.

Предложение 1. *Любая существенная переменная произвольной подфункции f_1 функции f является существенной переменной функции f.*

Предложение 2. *Если x_i — фиктивная переменная для f, то при любой константе c_i*

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, c_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Теорема 1 [8]. *Если $P \xrightarrow{\text{sd}} Q$ для f, то для каждой переменной $x_i \in P$ справедливо соотношение $Zx_i \not\subset M$, где*

$$M = \bigcup_{\substack{x_j \in P \\ x_j \neq x_i}} Zx_j.$$

Следствие 1. *Если $P \xrightarrow{\text{sd}} Q$ для f, то $Zx_i \not\subset Zx_j$, где $x_i \in P$, $x_j \in P$ и $x_i \neq x_j$.*

Следствие 2. *Если $P \xrightarrow{\text{sd}} Q$ для f, то $Zx_i \neq \varnothing$ для любой $x_i \in P$.*

Следствие 3. *Если $P \xrightarrow{\text{sd}} Q$ для f, то $|P| \leqslant |Q|$.*

Теорема 2. *Если $P \xrightarrow{\text{sd}} Q$ для f относительно набора $\widetilde{P}^*$ и $|P| = |Q|$, то*

1) все переменные из множества Q являются сильно существенными для f;

2) для каждого $P_1 \subset P$, $P_1 \neq P$, в множестве Q существуют хотя бы $k = |P| - |P_1|$ переменных, являющихся с-сильно существенными для f относительно $P_1 \cup Q$.

Доказательство. 1. Используя теорему 1 и следствия из нее, заключаем, что каждая переменная из множества Q является активной зоной только для одной переменной множества P. Без ограничения общности положим $P = \{x_1, \ldots, x_p\}$, $Q = \{x_{p+1}, \ldots, x_{2p}\}$ и $Zx_i = \{x_{p+i}\}$, $i = 1, \ldots, p$. Покажем, что произвольная переменная из множества Q, например x_{2p}, является сильно существенной для f.

Поскольку переменная x_p существенна для f, из определения 1 и предложения 1 вытекает, что существует константа α_{2p} такая, что функция $f(x_{2p} = \alpha_{2p})$ зависит существенно от x_p, т. е.

$$x_p \in Ess(f(x_{2p} = \alpha_{2p})). \tag{2}$$

Докажем, что при подстановке вместо переменной x_{2p} любой константы c_{2p} полученная подфункция $f_1 = f(x_{2p} = c_{2p})$ зависит существенно от всех переменных из множества $(Q \setminus \{x_{2p}\}) \cup (P \setminus \{x_p\})$.

Допустим, что хотя бы одна переменная из множества $Q \setminus \{x_{2p}\}$ является фиктивной для $f_1 = f(x_{2p} = c_{2p})$. Без ограничения общности можно считать, что $x_{p+1} \notin Ess(f_1)$. Тогда для любой подфункции функции $f_1 = f(x_{2p} = c_{2p})$ переменная x_{p+1} тоже будет фиктивной. Значит, и для подфункции $f_2 = f(x_p = c_p^*,\, x_{2p} = c_{2p})$, где c_p^* — константа из набора $\widetilde{P}^* = (c_1^*, \ldots, c_p^*)$, переменная x_{p+1} остается фиктивной. Применяя предложение 2, получаем

$$f(x_p = c_p^*) = f(x_p = c_p^*,\, x_{2p} = c_{2p}).$$

Следовательно, x_{p+1} является фиктивной для $f(x_p = c_p^*)$, т. е. $x_{p+1} \in Zx_p$. Это противоречит тому, что $Zx_p = \{x_{2p}\}$. Таким образом, для любой переменной x_j из множества $Q \setminus \{x_{2p}\}$ имеем

$$x_j \in Ess(f_1). \tag{3}$$

Предположим теперь, что хотя бы одна переменная из множества $P \setminus \{x_p\}$ является фиктивной переменной функции $f_1 = f(x_{2p} = c_{2p})$. Пусть это будет x_1. Тогда в силу предложения 2 для любой константы β_1

$$f_1 = f(x_{2p} = c_{2p}) = f(x_{2p} = c_{2p},\, x_1 = \beta_1).$$

Значит, у функции $f_1 = f(x_{2p} = c_{2p}) = f(x_{2p} = c_{2p},\, x_1 = c_1^*)$, где c_1^* — константа из набора $\widetilde{P}^* = (c_1^*, \ldots, c_p^*)$, переменная x_{p+1} является фиктивной. Это противоречит (3). Следовательно, для любой переменной x_k из множества $P \setminus \{x_p\}$ имеем

$$x_k \in Ess(f_1). \tag{4}$$

Из (2), (3) и (4) следует, что все переменные функции $f(x_{2p} = 2\alpha)$ существенны, т. е. $x_{2p} \in Ess^*(f)$. Так как x_{2p} выбрана произвольно, то все переменные из множества Q сильно существенны для f.

2. Если $P_1 \subset P$ и $P_1 \neq P$, то из доказательства п. 1 и определения c-сильно существенной переменной следует, что переменные из множества $Q \setminus \Big(\bigcup\limits_{x_1 \in P} Zx_i\Big)$ являются c-сильно существенными для f относительно $P_1 \cup Q$. Так как $|P| = |Q|$, то

$$\Big|Q \setminus \Big(\bigcup_{x_i \in P} Zx_i\Big)\Big| = |P| - |P_1| \geqslant 1.$$

Теорема 2 доказана.

Следствие 4. *Если $P \xrightarrow{\mathrm{sd}} Q$ для f и $Q \xrightarrow{\mathrm{sd}} P$ для f, то все переменные функции f сильно существенные.* (Пример 3.)

Следствие 5. *Если $P \xrightarrow{\mathrm{sd}} Q$ для f, то число сильно существенных переменных функции f, входящих в множество Q, не меньше числа одноэлементных зон множества Q.*

Следствие 6. *Если $P \xrightarrow{\mathrm{sd}} Q$ для f, то каждая одноэлементная зона Zx_i, $x_i \in P$, является c-сильно существенной для f относительно $Ess(f) \setminus \{x_i\}$.*

Пример 3. Пусть $f = x_1x_3 + x_2x_4 \pmod 2$. Если $P = \{x_1, x_2\}$ и $Q = \{x_3, x_4\}$, то $P \xrightarrow{\mathrm{sd}} P$ для f относительно набора $\widetilde{P}^* = (0,0)$, и $P \cup Q = Ess(f) = Ess^*(f)$.

Пример 3 показывает, что $P \xrightarrow{\mathrm{sd}} Q$ и $Q \xrightarrow{\mathrm{sd}} P$ для f, но не существует c-сильно существенной переменной у f.

Следующий пример 4 показывает, что при выполнении условий теоремы 2 в множестве P может найтись переменная, не являющаяся сильно существенной.

Пример 4. Пусть $f = x_1x_2x_3 + \bar{x}_1x_4 \pmod 2$. Если $P = \{x_1, x_2\}$ и $Q = \{x_3, x_4\}$, то $P \xrightarrow{\mathrm{sd}} Q$ для f относительно набора $\widetilde{P}^* = (1,0)$, но $x_1 \notin Ess^*(f)$.

Если $P \xrightarrow{\mathrm{d}} P$ для f, то P будем называть *самодоминирующимся множеством* функции f.

Теорема 3. *Если Q — самодоминирующееся множество функции f и $Q \subseteq Ess(f)$, то каждая переменная из Q является c-сильно существенной для f относительно Q.*

Доказательство. Пусть $Q = \{x_1, \ldots, x_q\}$, $q \leqslant |Ess(f)|$. Без ограничения общности допустим, что существует хотя бы одна переменная x_i, $1 \leqslant i \leqslant q$, которая не является c-сильно существенной для f относительно Q. Тогда найдется константа α_i такая, что у $f_1 = f(x_i = \alpha_i)$ хотя бы одна переменная x_j из множества $Q \setminus \{x_i\}$ будет фиктивной. Значит, у всех подфункций функции $f_1 = f(x_i = \alpha_i)$ переменная x_j тоже фиктивна, т. е. у функции g; получаемой из f_1 заменой переменных из $Q \setminus \{x_j\}$ константами, переменная x_j фиктивна. Следовательно, при замене переменных из множества $Q \setminus \{x_j\}$ некоторыми константами получается подфункция, у которой все переменные из множества Q фиктивны. Это противоречит условию $Q \xrightarrow{\mathrm{d}} Q$ (условие минимальности). Теорема 3 доказана.

Следующий пример показывает, что несамодоминирующиеся множества существуют, а утверждение, обратное теореме 3, неверно.

Пример 5. Пусть $f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \pmod 2$. Каждая переменная из множества $Q = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Q = Ess(f)$, является c-сильно существенной для f, но множество Q не является самодоминирующимся, потому что его собственное подмножество $Q_1 = \{x_1, x_2\}$ доминирует Q.

Теорема 4. *Пусть $P \xrightarrow{\mathrm{sd}} Q$ для f относительно набора $\widetilde{P}^*$ и переменная $x_i \in P$ имеет активную зону Zx_i такую, что $|Zx_i| \geqslant 2$. Тогда любая c-сильно существенная переменная x_j функции f относительно Zx_i является c-сильно существенной переменной для f.*

Доказательство. Так как x_j — c-сильно существенная переменная функции f относительно Zx_i, то при подстановке любой константы c_j вместо переменной x_j остальные переменные из зоны Zx_i остаются существенными для $f_1 = f(x_j = c_j)$.

Далее, из доказательства теоремы 2 следует, что все переменные множества $(P \setminus \{x_i\}) \cup (Q \setminus Zx_i)$ являются существенными переменными функции f_1.

Покажем, что $x_i \in Ess(f_1)$. Допустим противное, т. е. $x_i \notin Ess(f_1)$. Тогда

$$f_1 = f(x_j = c_j) = f(x_j = c_j, x_i = c_i^*), \quad \text{где } c_i^* \in \widetilde{P}^*.$$

Значит, хотя бы одна переменная из зоны Zx_i должна быть у f_1 одновременно и существенной, и фиктивной. Пришли к противоречию. Теорема 4 доказана.

Следствие 7. *Пусть $P \xrightarrow{\mathrm{sd}} Q$ для f и активные зоны $Zx_{i_1}, \ldots, Zx_{i_k}$ являются самодоминирующимися множествами, причем $|Zx_{i_j}| \geqslant 2$, $j = 1, \ldots, k$. Тогда число c-сильно существенных переменных у f не меньше чем $\left|\bigcup\limits_{j=1}^{k} Zx_{i_j}\right|$.*

Пример 3 показывает, что условие $|Zx_{i_j}| \geqslant 2$ опустить нельзя.

Существование объектов, удовлетворяющих условию теоремы 4, вытекает из следующего примера.

Пример 6. Пусть $f = x_1x_3 + x_2(x_4 + x_5) \pmod 2$, $P = \{x_1, x_2\}$, $Q = \{x_3, x_4, x_5\}$, $P \xrightarrow{\text{sd}} Q$ для f относительно набора $(0,0)$. Тогда $Zx_2 = \{x_4, x_5\}$ и переменные x_4 и x_5 являются c-сильно существенными для f относительно Zx_2 и c-сильно существенными для f.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лупанов О. Б.** Об одном классе схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. М.: Физматгиз, 1962. Вып. 7. С. 61–114.
2. **Соловьев Н. А.** К вопросу о существенной зависимости функций алгебры логики // Проблемы кибернетики. М.: Физматгиз, 1963. Вып. 9. С. 333–335.
3. **Salomaa A.** On essential variables of functions, especially in the algebra of logic // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 1963. N 339. P. 1–11.
4. **Брейтбарт Ю. Я.** О существенных переменных функций алгебры логики // Докл. АН СССР. 1967. Т. 172, № 1. С. 9–10.
5. **Chimev K. N., Mirchev I.** Separable and dominating sets of variables. Blagoevgrad: S. W. University, 1993.
6. **Ehrenfeucht A., Kahn J., Maddux R., Mucielski J.** On the dependance of functions of their variables // J. Combin. Theory. Ser. A. 1982. V. A-33, N 1. P. 106–108.
7. **Shtrakov S.** Dominating and annuling sets of variables for the functions. Blagoevgrad, 1987.
8. **Mirchev I., Shtrakov S.** Strongly dominating sets of variables // Közl.-MTA Számitástech. Automat. Kutató Inst. Budapest, 1988. N 39. P. 121–129.

Адрес автора:

Болгария,
2700 Благоевград,
ул. Ал. Величкова, 66,
Юго-Западный университет
им. Н. Рильского

Статья поступила
13 декабря 1994 г.