ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1995. Том 2, № 3, 3–9

УДК 519.17

ОКРЕСТНОСТИ РЕБЕР В НОРМАЛЬНЫХ КАРТАХ*)

С. В. Августинович, О. В. Бородин

Лебег [1], изучая эйлеровы многогранники, каждому ребру e такого многогранника поставил в соответствие неубывающую четверку чисел (тип ребра), два из которых задают степени вершин, инцидентных ребру e, а остальные — числа ребер в гранях, содержащих ребро e. Он доказал, что в любом эйлеровом многограннике существует ребро, тип которого мажорируется одной из четверок $(3\ 3\ 3\ \infty)$, $(3\ 3\ 4\ 11)$, $(3\ 3\ 5\ 7)$ и $(3\ 4\ 4\ 5)$. Некоторые параметры здесь допускают улучшение.

В настоящей статье решена аналогичная задача для нормальных карт, расположенных на торе (теорема 1), и установлено (теорема 2), что достаточно большие нормальные карты на произвольных ориентируемых поверхностях устроены так же, как и тороидальные.

В работе используются определения из [2]. Вершины и грани конечной карты, расположенной на произвольной ориентируемой поверхности, будем называть *элементами*, а степень вершины и число ребер в грани — *рангом соответствующего элемента*. Карта называется *нормальной*, если в ней ранги всех элементов не меньше трех. Типом ребра назовем *упорядоченную по возрастанию четверку рангов окружающих его элементов*. Будем говорить, что тип $(t_1t_2t_3t_4)$ мажорирует тип $(t'_1t'_2t'_3t'_4)$, если $t_i \geqslant t'_i$, $i = 1,2,3,4$.

Теорема 1. *Всякая нормальная карта на торе содержит ребро, тип которого мажорируется одной из следующих четверок:*

$$(3\ 3\ 3\ \infty),\ (3\ 3\ 4\ 10),\ (3\ 3\ 5\ 7),\ (3\ 3\ 6\ 6),\ (3\ 4\ 4\ 6),\ (4\ 4\ 4\ 4),$$

причем ни один из параметров каждой четверки не улучшаем.

---

*) Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (грант NQ4300) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–011–1484), работа второго автора — при финансовой поддержке Международного научного фонда (грант NQ4300) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–01–01486).

Доказательство. Объясним, что означает неулучшаемость параметров четверок. Карты (рис. 1, *а* — *е*) удовлетворяют утверждению теоремы (каждый рисунок естественным образом отображается на тор путем отождествления его левой и правой, а также верхней и нижней границ). Однако если уменьшить любой параметр какой-либо четверки, то одна из карт становится контрпримером к соответствующему утверждению. Действительно, любое отмеченное ребро в картах на рис. 1 имеет тип, мажорирующий хотя бы одну из четверок, указанных в теореме, причем на всех рисунках есть ребро (выделено), тип которого совпадает с одной из этих четверок. Под каждым рисунком указана четверка, неулучшаемость которой он доказывает.

Теперь приступим к доказательству теоремы. Предположим, что некоторая нормальная карта M с множеством вершин V, граней F и ребер E является контрпримером к теореме. Формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 0$ для M можно переписать в виде

$$\sum_{x \in V \cup F} (r(x) - 4) = 0, \tag{1}$$

где $r(x)$ — ранг элемента x, т. е. число ребер, инцидентных x.

Каждому элементу ранга n поставим в соответствие число $n-4$, называемое *зарядом* элемента, $n > 2$. Из формулы (1) следует, что сумма зарядов всех элементов M равна нулю. Распределим заряд каждого элемента ранга n поровну (в точности по $(n-4)/n$) на окружающие его ребра. Такое распределение зарядов будем называть *равномерным*. Каждое ребро при этом приобретет заряд, однозначно вычисляемый по его типу, причем если тип одного ребра строго мажорирует тип другого, то первое приобретет больший заряд. Сумма зарядов по всем ребрам останется равной нулю. Отсюда следует, что либо все ребра M имеют нулевой заряд, либо найдется ребро с отрицательным зарядом. Рассмотрим какое-либо ребро типа (n_1, n_2, n_3, n_4). Заряд такого ребра окажется неположительным только в том случае, если

$$(n_1 - 4)/n_1 + (n_2 - 4)/n_2 + (n_3 - 4)/n_3 + (n_4 - 4)/n_4 \leqslant 0,$$

т. е.

$$1/n_1 + 1/n_2 + 1/n_3 + 1/n_4 \geqslant 1.$$

Ясно, что n_1 может быть равным 3 или 4. Если $n_1 = 4$, то должно быть $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 4$. Если $n_1 = 3$, то

$$1/n_2 + 1/n_3 + 1/n_4 \geqslant 2/3,$$

а n_2 может быть равно 3 или 4. Если $n_2 = 3$, то

$$1/n_3 + 1/n_4 \geqslant 1/3,$$

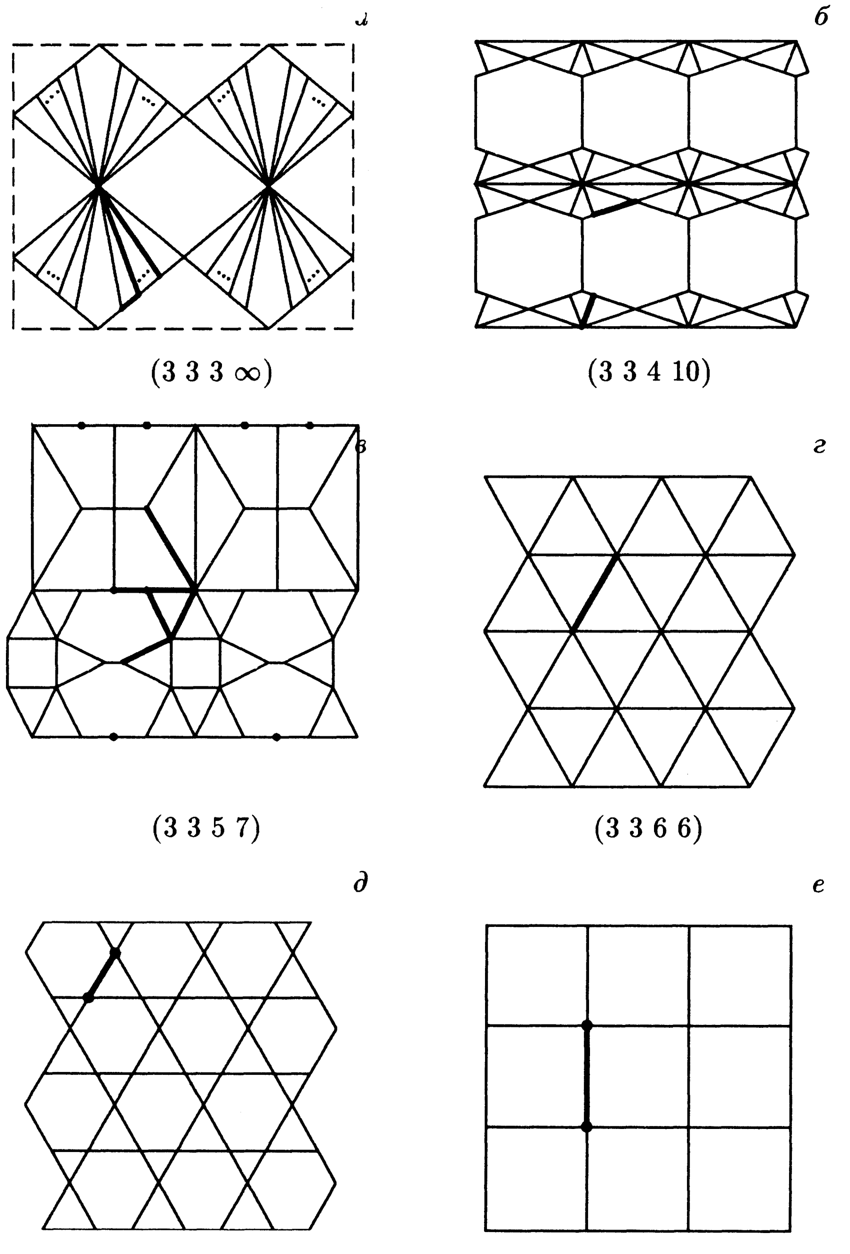

Рис. 1

и в этом случае возможны только следующие четверки:

(3 3 6 6), (3 3 5 7), (3 3 5 6), (3 3 5 5), (3 3 4 12), (3 3 4 11), …, (3 3 4 4).

Если же $n_2 = 4$, то

$$1/n_3 + 1/n_4 \geqslant 5/12,$$

и в этом случае возможны только четверки:

(3 4 4 6), (3 4 4 5), (3 4 4 4).

Среди найденных нами четверок только (3 3 4 11) и (3 3 4 12) не мажорируются четверками, указанными в теореме. Таким образом, контрпример M содержит элемент ранга 11 или 12. Для определенности будем считать, что это некоторая вершина W. Случай грани (с точностью до перехода к двойственной карте) рассматривается совершенно аналогично. Все ребра, выходящие из вершины W, разделим на 4 класса:

1-й класс. Ребра, соединяющие W с вершинами степени не меньше 5.

2-й класс. Ребра, соединяющие W с вершинами степени 4 и инцидентные двум граням ранга 3, причем вершина степени 4 принадлежит двум граням ранга не меньше 6.

3-й класс. Ребра, соединяющие W с вершинами степени 4, к которым примыкает хотя бы одна грань ранга больше 3, а также ребра, разделяющие две грани ранга больше 3.

4-й класс. Все прочие ребра.

Ребра, попавшие в i-класс, будем называть *i-ребрами.*

Лемма 1. *Пусть карта M — контрпример к теореме 1, содержащий вершину W степени 11 или 12. Тогда среди любых пяти подряд идущих ребер в окружении W найдется ребро, принадлежащее одному из первых трех классов.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Пусть r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 — некоторые подряд идущие вокруг вершины W ребра, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 — концевые вершины этих ребер, а F_1, F_2, F_3, F_4 — соответствующие промежуточные грани. Возможны следующие три случая.

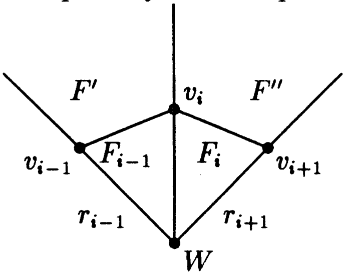

Рис. 2

Случай 1. Среди промежуточных граней есть два подряд идущих треугольника F_{i-1} и F_i (рис. 2), разделенных ребром r_i. По предположению, r_{i-1}, r_i, r_{i+1} не являются 1-ребрами, значит, v_i, v_{i-1}, v_{i+1} имеют степень меньше 5. Вершина v_i не может иметь степень 3, поскольку тип ребра r_i мажорировался бы четверкой (3 3 3 ∞). Тем самым $d(v_i) = 4$. Грани F' и F'' не могут

иметь ранг меньше 6, поскольку типы ребер $(v_{i-1}v_i)$ и (v_iv_{i+1}) мажорировались бы четверкой (3 4 4 6). Следовательно, r_i по определению является 2-ребром.

Случай 2. Среди промежуточных граней есть треугольник F_i, окруженный нетреугольниками. В этом случае либо v_i, либо v_{i+1} имеет степень не меньше 3, иначе тип ребра (v_iv_{i+1}) мажорировался бы четверкой $(3\ 3\ 3\ \infty)$. Соответственно либо r_i, либо r_{i+1} по определению является 3-ребром.

Случай 3. Среди промежуточных граней нет треугольников. Из определения следует, что ребра r_2, r_3 и r_4 попадают в 3-й класс.

Поскольку других случаев нет, лемма 1 доказана.

Следствие 1. *В окружении любой вершины степени* 11 *или* 12 *контрпримера* M *найдутся три ребра из первых трех классов.*

Для продолжения доказательства теоремы несколько видоизменим описанное выше правило распределения зарядов для элементов рангов 11, 12 и некоторых элементов ранга 4.

1. Каждая вершина степени 4 (грань ранга 4), инцидентная 2-ребру, посылает на него заряд, равный $+1/4$, а на ребро, разделяющее грани ранга (соединяющее вершины степени) не меньше 6, — заряд, равный $-1/4$. При этом собственный заряд такой вершины останется нулевым.

2. Каждая вершина степени (грань ранга) 11 или 12 посылает на окружающие ее 4-ребра заряды, равные $+2/3$, а на остальные ребра — заряды, равные $+1/2$.

3. Все остальные элементы распределяют свой заряд поровну окружающим ребрам.

Остается проверить, что видоизмененное правило распределения зарядов по ребрам позволяет сделать неотрицательными все ребра в контрпримере M. Действительно,

1) каждое 1-ребро получит заряд не меньше $-1/3 - 1/3 + 1/5 + 1/2 = 1/30$;

2) каждое 2-ребро — не меньше $-1/3 - 1/3 + 1/2 + 1/4 = 1/12$;

3) каждое 3-ребро — не меньше $-1/3 + 0 + 0 + 1/2 = 1/6$;

4) каждое 4-ребро — не меньше $-1/3 - 1/3 + 0 + 2/3 = 0$;

5) каждое ребро, разделяющее две грани ранга не меньше 6, а также каждое ребро, соединяющее две вершины степени не меньше 6, получит заряд не меньше $-1/3 - 1/4 + 2/6 + 2/6 = 1/12$.

Более того, согласно следствию 1 данное правило позволяет каждому элементу рангов 11 и 12 оставить заряд не менее $7 - (8 \cdot 2/3 + 3 \cdot 1/2) = +1/6$. Это противоречит формуле Эйлера и тем самым завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Если нормальная карта M на ориентируемой поверхности рода P имеет более $576(P-1)$ ребер, то найдется ребро, тип которого мажорируется одной из четверок:* $(3\ 3\ 3\ \infty)$, $(3\ 3\ 4\ 11)$, $(3\ 3\ 5\ 7)$, $(3\ 3\ 6\ 6)$, $(3\ 4\ 4\ 6)$, $(4\ 4\ 4\ 4)$.

Доказательство. По-прежнему каждому элементу ранга n карты M придадим заряд $n-4$. Формулу Эйлера $|V|-|E|+|F| = -2P$ для M запишем в виде

$$\sum_{x\in V\cup F} (r(x)-4) = 8(p-1). \tag{2}$$

Понятно, что сумма всех зарядов ребер будет равна $8(P-1)$. Пусть M — контрпример к теореме 2. Докажем, что суммарный заряд можно так распределить по ребрам M, что на каждом ребре окажется заряд не меньше $+1/72$.

Лемма 2. *Если при равномерном распределении зарядов ребро e получит заряд $z > 0$, то $z > 1/39$.*

Доказательство. Тип $(t_1t_2t_3t_4)$ ребра назовем *критическим*, если при равномерном распределении зарядов ребро такого типа получит строго положительный заряд, но заряд становится неположительным при уменьшении на 1 любой координаты в $(t_1t_2t_3t_4)$. Перебирая в лексикографическом порядке различные четверки чисел, легко убедиться в том, что критическими будут типы $(3\ 3\ 4\ 13)$, $(3\ 3\ 5\ 8)$, $(3\ 3\ 6\ 7)$, $(3\ 4\ 4\ 7)$, $(3\ 4\ 5\ 5)$, $(4\ 4\ 4\ 5)$. Заряды ребер таких типов равны $+1/39, +1/30, +2/21, +2/21, +1/15, +1/5$ соответственно, что завершает доказательство леммы.

Применим теперь к M видоизмененное правило распределения зарядов. Оно относится к ребрам, окружающим элементы рангов 11 и 12, на которых, как показано при доказательстве теоремы 1, остается заряд не меньше $+1/6$. При равномерном распределении этого остатка заряд каждого ребра окажется не меньше $+1/72$. Остается рассмотреть ребро, примыкающее к элементу ранга 4, на которое был послан заряд $-1/4$. Поскольку такое ребро окружено двумя элементами ранга не меньше 6, его заряд станет не меньше $-1/3-1/4+2/6+2/6 = +1/12$.

Из приведенных рассуждений следует, что после перераспределения зарядов все ребра в M приобретут заряд не меньше $+1/72$. Если число таких ребер окажется больше $576(P-1)$, то суммарный заряд превысит величину $8(P-1)$ из (3), что завершает доказательство теоремы 2.

В заключение заметим, что в силу вертикальной симметрии (см. рис. 1) все соответствующие карты можно расположить на бутылке Клейна. Поэтому теорема 1 верна не только для тора, но и для бутылки Клейна.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lebesgue H.** Quelques consequences simple de la formule d'Euler // J. Math. Pure Appl. 1940. V. 9. P. 27–43.
2. **Ringel G.** Map Color Theorem. New York; Heidelberg: Springer-Verl., 1974.

Адрес авторов:

Россия,
630090 Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН

Статья поступила

27 марта 1995 г.