ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1995. Том 2, № 3, 10–17

УДК 519.71

# О ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКЕ ДЛИНЫ ЗМЕИ В ЕДИНИЧНОМ $n$-МЕРНОМ КУБЕ

*П. Г. Емельянов*

Уточнением некоторых деталей доказательства из работы [1] получена более точная верхняя оценка длины произвольной змеи в единичном $n$-мерном кубе.

Единичным $n$-мерным кубом $Q_n$ называется *неориентированный двудольный граф*, множество вершин которого образуют всевозможные двоичные наборы длины $n$ и две вершины $v_1$ и $v_2$ смежны тогда и только тогда, когда наборы $v_1$ и $v_2$ различаются в одной позиции. Исследуется длина максимального цикла $S_n$ (называемого также *змеей*) в кубе $Q_n$, обладающего следующим свойством: если в цикле $S_n$ вершины $v_1$ и $v_2$ не являются последовательными, то расстояние Хемминга $\rho_{Q_n}(v_1, v_2) \geqslant 2$. Подробнее об используемых определениях и истории уточнения верхней оценки для $|S_n|$ см. в [1–4], а нижней оценки — в [5, 6].

В [1] с помощью техники усреднения числа вершин в змее, являющихся соседними для вершин из множества $Y = V(Q_n) \setminus V(S_n)$, получена оценка

$$|S_n| \leqslant 2^{n-1} - \frac{2^{n-1}}{20n - 41} \quad \text{для} \quad n \geqslant 12, \tag{1}$$

которая при $n \geqslant 39$ лучше следующей оценки из [2]:

$$|S_n| \leqslant 2^{n-1} - \frac{2^n}{n^2 - n + 2} \quad \text{для} \quad n \geqslant 7. \tag{2}$$

В настоящей статье показано, что при любом $n \geqslant 19$ справедлива оценка

$$|S_n| \leqslant 2^{n-1} - \frac{2^{n-1}}{6n - 13}, \tag{3}$$

которая лучше оценки из [2] при $n \geqslant 19$. Кроме того, получены улучшения верхних оценок для $14 \leqslant n \leqslant 18$.

Оценка (1) следует из доказанного в [1] неравенства

$$\frac{\Sigma_{v \in Y} |N(v) \cap V(S_n)|}{|Y|} \leqslant n - 2,1 \quad \text{для} \quad n \geqslant 12, \tag{4}$$

где $N(v)$ — множество вершин куба $Q_n$, смежных с вершиной $v$. Мы покажем, что при любом $n \geqslant 19$ справедливо неравенство

$$\frac{\Sigma_{v\in Y}|N(v)\cap V(S_n)|}{|Y|} \leqslant n - \frac{7}{3}. \tag{5}$$

Приведем необходимые определения и утверждения из [1]. Пусть $Y_m = \{v \in Y \mid |N(v)\cap V(S_n)| = m\}$, т. е. $Y_m$ есть множество вершин, каждая из которых не принадлежит змее и имеет в точности $m$ соседей из змеи. Обозначим $Y_{\leqslant w} = \bigcup\limits_{i=0}^{w} Y_i$. Основу доказательства в [1] составляют следующие девять лемм. (Нумерация лемм и используемая терминология взяты из [1].)

**Лемма 2.** $Y_n = \varnothing$.

**Лемма 3.** *Если $x, y \in Y_{n-1}$, то $\rho_Y(x,y) \geqslant 3$.*

**Лемма 4.** *Если $x \in Y_{n-1}$ и $y \in Y_{n-2}$, то путь вида $x - z - y$ невозможен в $Y$.*

**Лемма 5.** *Если $Y$ содержит путь вида $x - y - z$, где $x \in Y_{n-1}$ и $y \in Y_{n-2}$, то $z \in Y_{\leqslant n-5}$.*

**Лемма 6.** *Если $Y$ содержит путь вида $x_1 - x_2 - x_3$, то существует $i, 1 \leqslant i \leqslant 3$, такое, что $x_i \in Y_{\leqslant n-3}$.*

**Лемма 7.** *Если $Y$ содержит конфигурацию вида $x_1 - y < {x_2 \atop x_3}$ и $x_i \in Y_{n-2}$ для любого $i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, то $y \in Y_{\leqslant 3}$.*

**Лемма 8.** *Если $Y$ содержит конфигурацию вида $x_1 - y < {x_2 \atop x_3}$, $x_1 \in Y_{n-1}$ и $y \in Y_{n-3}$, то существует $i$, $2 \leqslant i \leqslant 3$, такое, что $x_i \in Y_{\leqslant (n+1)/2}$.*

**Лемма 9.** *Путь вида $x - y - z - y' - x'$ невозможен в $Y$, если $x, x' \in Y_{n-1}$ и $y, y' \in Y_{n-2}$.*

**Лемма 10.** *Путь вида $x - y - z - y' - x'$ невозможен в $Y$, если $x, x' \in Y_{n-1}$, $y \in Y_{n-2}$ и $y' \in Y_{n-3}$.*

Далее в [1] вводятся следующие понятия.

1. Пусть $y \in Y_{n-1}$ и $s_y$ — смежная с $y$ вершина из $Y$. Вершина $y$ называется вершиной *типа 1, 2* или *3*, если $s_y \in Y_{\leqslant n-4}$, $s_y \in Y_{n-2}$ или $s_y \in Y_{n-3}$ соответственно.

2. *Союзником* вершины $y$ типа 2 называется вершина $a_y \in N(s_y) \cap Y_{\leqslant n-5}$ (см. лемму 5). *Союзником* вершины $y$ типа 3 называется вершина $a_y \in N(s_y) \cap Y_{\leqslant (n+1)/2}$ (см. лемму 8).

3. Пусть $a_y$ — союзник некоторой вершины $y$ типа 2 или 3. Определим множества: $T = \{x \in Y_{n-1} \mid a_x = a_y\}$, $R = \{x \in N(a_y) \mid x \in$

$Y_{n-1} \cup Y_{n-2}\}$ и $P = \{x \in Y_{n-2} \cup Y_{n-3} \mid \exists z \in T$ такое, что $x = S_z\}$. *Локальным* множеством вершины $a_y$ называется множество $L = L_{a_y} = \{a_y\} \cup T \cup R \cup P$.

4. Двухэлементное множество, состоящее из вершины типа 1 и смежной с ней вершины из $Y$, называется *специальным*.

Пусть $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$ обозначают соответственно объединение локальных и специальных множеств и $H = Y \setminus (\mathbf{L} \cup \mathbf{S})$. Для доказательства неравенства (3) достаточно показать, что для каждого $\gamma \in \{\mathbf{L}, \mathbf{S}, H\}$ и любого $n \geqslant 19$

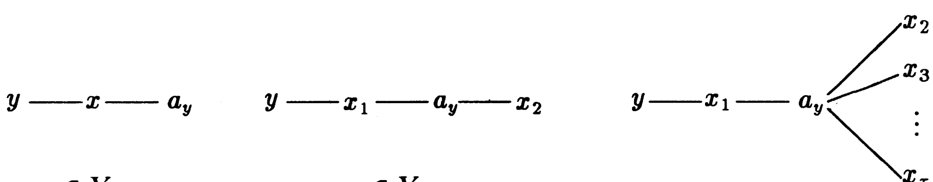
$$\frac{\sum\limits_{v\in\gamma} |N(v) \cap V(S_n)|}{|\gamma|} \leqslant n - 2,333.$$

При этом усиление оценки (4) будет достигнуто в результате более точного оценивания значения

$$\frac{\sum\limits_{v\in\gamma} |N(v) \cap V(S_n)|}{|\gamma|}$$

для локальных множеств и множества $H$.

Из лемм 4, 5, 7, 9 и 10 непосредственно следует, что локальные множества вершин типа 2 имеют структуры, изображенные на рис. 1.




| | | |
|---|---|---|
| $y \in Y_{n-1}$, | $y \in Y_{n-1}$, | $y \in Y_{n-1}$, $a_y \in Y_{\leqslant 3}$, |
| $x \in Y_{n-2}$, | $x_1, x_2 \in Y_{n-2}$, | $x_1, \ldots, x_\tau \in Y_{n-2}$ $(\tau \geqslant 3)$ |
| $a_y \in Y_{\leqslant n-5}$ | $a_y \in Y_{\leqslant n-5}$ | |
| Тип A | Тип B | Тип C |

*Рис. 1.* Локальные множества для вершин типа 2

Очевидно, что при любом $n$ для множества $L$ типа A справедлива оценка

$$\frac{\sum\limits_{v\in L} |N(v) \cap V(S_n)|}{|L|} \leqslant \frac{n - 1 + n - 2 + n - 5}{3} \leqslant n - 2,666, \tag{6}$$

а для множества $L$ типа B справедлива оценка

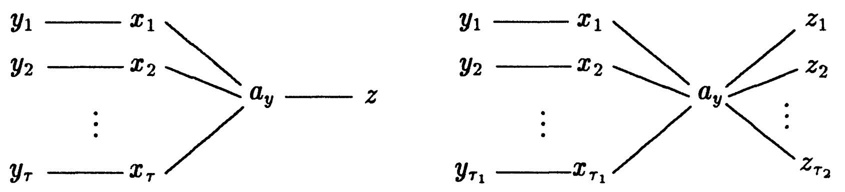
$$\frac{\sum\limits_{v\in L} |N(v) \cap V(S_n)|}{|L|} \leqslant \frac{n - 1 + n - 5 + 2(n - 2)}{4} \leqslant n - 2,5. \tag{7}$$

Для множества $L$ типа C имеем

$$\frac{\sum\limits_{v\in L}|N(v)\cap V(S_n)|}{|L|}\leqslant \max_{0\leqslant\tau\leqslant 3}\frac{n-1+\tau+(n-\tau)(n-2)}{n-\tau+2}\leqslant n-3+\frac{5}{n-1}. \quad (8)$$

Правая часть этого неравенства меньше $n-2,166$ при $n\geqslant 7$ и меньше $n-2,722$ при $n\geqslant 19$.

Из лемм 3, 4 и 10 следует, что локальные множества вершин типа 3 имеют структуры, изображенные на рис. 2.




$y_1,\dots,y_\tau,z\in Y_{n-1},\ x_1,\dots,x_\tau\in Y_{n-3},$ $a_y\in Y_{\leqslant(n+1)/2}$

Тип D

$y_1,\dots,y_{\tau_1}\in Y_{n-1},\ x_1,\dots,x_{\tau_1}\in Y_{n-3},$ $z_1,\dots,z_{\tau_2}\in Y_{n-2},\ a_y\in Y_{\leqslant(n+1)/2}$

Тип E

*Рис. 2.* Локальные множества для вершин типа 3

Если множество $L$ имеет тип D, то

$$\frac{\sum\limits_{v\in L}|N(v)\cap V(S_n)|}{|L|}\leqslant \max_{0\leqslant\tau\leqslant(n+1)/2}\frac{n-1+\tau+2(n-2)(n-1-\tau)}{2+2(n-1-\tau)} = n-2,5+\frac{3}{n-1}, \quad (9)$$

что меньше $n-2,125$ при $n\geqslant 9$ и меньше $n-2,333$ при $n\geqslant 19$.

Для множества $L$ типа E имеем

$$\frac{\sum\limits_{v\in L}|N(v)\cap V(S_n)|}{|L|}\leqslant \max_{\substack{(n-1)/2\leqslant\tau_1+\tau_2\leqslant n\\ 1\leqslant\tau_1\leqslant n\\ 0\leqslant\tau_2\leqslant n-1}}\frac{(n-2)(2\tau_1+\tau_2)+n-\tau_1-\tau_2}{2\tau_1+\tau_2+1} = n-2,5+\frac{5}{2n}, \quad (10)$$

что меньше $n-2,142$ при $n\geqslant 7$ и меньше $n-2,368$ при $n\geqslant 19$.

Очевидно, что при любом $n$ для всякого специального множества $S$ справедлива оценка

$$\frac{\sum\limits_{v\in \mathsf{S}}|N(v)\cap V(S_n)|}{|\mathsf{S}|}\leqslant\frac{n-1+n-4}{2}=n-2,5. \quad (11)$$

Относительно множества $H$ в [1] приведены некоторые рассуждения о его свойствах и делается вывод, что и для него оценка (4) также справедлива. Однако конкретный вид оценки для мощности множества $H$ не указан. Получим оценку для множества $H$. В [1] отмечено следующее:

1. $H$ не содержит вершин из множества $Y_{n-1}$, так как вершины из $Y_{n-1}$ находятся либо в локальных, либо в специальных множествах.

2. Для любого специального множества $\{y, s_y\}$ справедливо соотношение $N(s_y) \cap Y_{n-2} = \varnothing$ (см. лемму 4).

3. Из леммы 4 следует, что для любого локального множества $L$ множество $\{v \in L | (N(v) \setminus L) \cap Y_{n-2} \neq \varnothing\}$ может состоять только из вершин, принадлежащих $Y_{n-2}$.

Из пп. 1–3 непосредственно следует

Замечание. Справедливо включение $H \subseteq Y_{\leqslant n-2}$, и если $H$ содержит некоторую вершину $v$ из $Y_{n-2}$, то в множестве $Y = V(Q_n) \setminus V(S_n)$ вершина $v$ смежна либо с вершинами из $H$ (причем по лемме 6 не более чем с одной вершиной из $Y_{n-2}$), либо с вершиной какого-то локального множества из $Y_{n-2}$ и вершиной множества $H$ из $Y_{\leqslant n-3}$ (см. лемму 6).

**Утверждение.** *Для любого непустого множества $H$ справедливо неравенство*

$$\frac{\sum\limits_{v\in H} |N(v) \cap V(S_n)|}{|H|} \leqslant n - 2,333. \tag{12}$$

Доказательство проведем индукцией по мощности множества $H$.

1. Пусть $|H| = 1$. Тогда согласно замечанию $H \subseteq Y_{\leqslant n-3}$ и неравенство (12) выполнено.

2. Пусть $|H| = 2$. Из замечания следует, что хотя бы одна вершина из $H$ принадлежит $Y_{\leqslant n-3}$, а значит, для любого $n$ справедливо неравенство

$$\frac{\sum\limits_{v\in H} |N(v) \cap V(S_n)|}{|H|} \leqslant \frac{n-2+n-3}{2} = n - 2,5.$$

3. Пусть $|H| = 3$. Из замечания следует, что оценка принимает максимальное значение, когда $H$ имеет вид цепи, изображенной на рис. 3, *a*. В этом случае для любого $n$

$$\frac{\sum\limits_{v\in H} |N(v) \cap V(S_n)|}{|H|} \leqslant \frac{2(n-2)+n-3}{3} = n - 2,333.$$

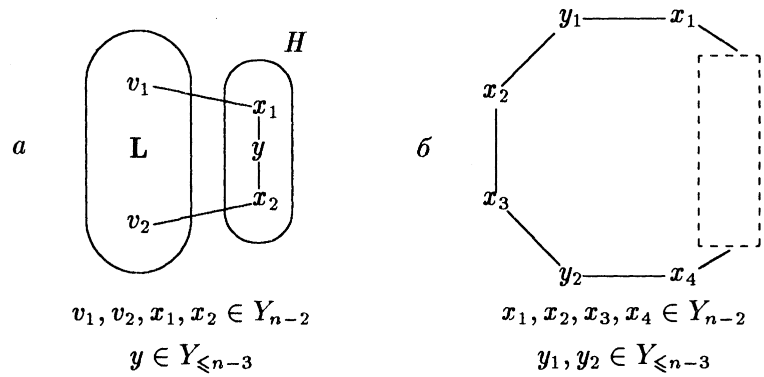



*Рис. 3.* Конфигурации множества $H$, насыщенные вершинами из $Y_{n-2}$

4. Пусть неравенство (12) справедливо для любого множества $H = H' \setminus \{v\}$ мощности $m$. Докажем неравенство (12) для множества $H'$ мощности $m+1$. Возможны следующие случаи.

**Случай 1.** Для множества $H$ оценка (12) достигается. Заметим, что эта оценка достигается всякий раз, когда мощность множества $H$ кратна трем и $H$ содержит $(2/3)|H|$ вершин из $Y_{n-2}$ и $(1/3)|H|$ вершин из $Y_{\leqslant n-3}$, причем каждая вершина из $Y_{\leqslant n-3}$ смежна в точности с двумя вершинами из $Y_{n-2}$. Поэтому $H$ образуют цепи из п. 3 и циклы длины $6k$, $k \geqslant 1$, изображенные на рис. 3, *б*. (Прямоугольник обозначает, что вершины $x_1, x_4$ либо являются смежными, либо соединены несколькими копиями левой цепи, соединяющей вершины $x_1$ и $x_4$.) Тогда вершина $v$ не может принадлежать $Y_{n-2}$, так как в этом случае по крайней мере одна вершина в $H$, с которой смежна вершина $v$, принадлежала бы $Y_{\leqslant 3}$ (по лемме 7), что противоречит достижимости оценки для $H$. Таким образом, $v \in Y_{\leqslant n-3}$ и неравенство (12) выполнено.

**Случай 2.** Для множества $H$ оценка (12) не достигается. Рассматривая возможные случаи $|H| \equiv r \pmod 3$, где $r = 0, 1, 2$, убеждаемся, что оценка (12) достигает наибольшего значения для множества $H$ тогда, когда $H$ содержит подмножество $H''$ мощности $m-2$, на котором оценка достигается, и еще две вершины, которые одновременно не могут принадлежать $Y_{n-2}$ (ввиду замечаний и леммы 7 это противоречило бы достижимости оценки (12) для подмножества $H''$). Добавляя такую вершину из $Y_{n-2}$, для $H'$ получаем неравенство

$$\frac{\sum\limits_{v\in H'} |N(v) \cap V(S_n)|}{|H'|} \leqslant \frac{(|H|-2)(\frac{2}{3}(n-2)+\frac{1}{3}(n-3)) + 2(n-2) + n - 3}{|H|+1}$$
$$= n - 2{,}333.$$

Утверждение доказано.

Из неравенств (6)–(12) непосредственно следует оценка (3). Заметим, что при $7 \leqslant n \leqslant 18$ среди оценок (6)–(12) наибольшей является оценка (9), выбрав которую для

$$\frac{\sum\limits_{v \in Y} |N(v) \cap V(S_n)|}{|Y|},$$

при этих значениях $n$ получаем лучшую верхнюю оценку длины произвольной змеи. Сравнение оценок приведено в таблице.

| $n$ | Оценка (2) | Оценка (1) | Оценка (3) | $n \leqslant 18$ |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 60 | — | — | — |
| 8 | 122 | — | — | — |
| 9 | 248 | — | — | — |
| 10 | 500 | — | — | — |
| 11 | 1004 | — | — | — |
| 12 | 2016 | 2036 | — | — |
| 13 | 4044 | 4076 | — | — |
| 14 | 8102 | 8156 | — | 8098 |
| 15 | 16228 | 16320 | — | 16200 |
| 16 | 32496 | 32650 | — | 32412 |
| 17 | 65056 | 65316 | — | 64846 |
| 18 | 130220 | 130660 | — | 129732 |
| 19 | 260618 | 261370 | 259548 | — |
| 20 | 521542 | 522826 | 519388 | — |
| 21 | 1043606 | 1045808 | 1039296 | — |
| 22 | 2088112 | 2091894 | 2079528 | — |
| 23 | 4177790 | 4184292 | 4160748 | — |
| 24 | 8358324 | 8369498 | 8324572 | — |
| 25 | 16721476 | 16740664 | 16654754 | — |
| 26 | 33451504 | 33484380 | 33319784 | — |
| 27 | 66918212 | 66974376 | 66658468 | — |
| 28 | 133863590 | 133959118 | 133351806 | — |
| 29 | 267775908 | 267937430 | 266768154 | — |
| 30 | 535639556 | 535910498 | 533656116 | — |

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Snevily H. S.** The snake-in-the-box problem: A new upper bound// Discrete Math. 1994. V. 133, N 1–3. P. 307–314.
2. **Соловьева Ф. И.** Верхняя оценка длины цикла в $n$-мерном единичном кубе// Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач: Сб.

науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. Вып. 45. С. 71–76.

3. **Евдокимов А. А., Малюгин С. А.** Код «змея в ящике» и пути в решетке на торе// Математика сегодня. Киев: Выща шк., 1987. С. 108–116.
4. **Deimer K.** A new upper bound for the length of snakes// Combinatorica. 1985. V. 5, N 2. P. 109–120.
5. **Abbot H. L., Katchalski M.** On the construction of snake in the box codes// Utilitas Math. 1991. V. 40. P. 97–116.
6. **Евдокимов А. А.** Вложение цепей и циклов в гиперкуб. I//Методы дискретного анализа в решении экстремальных задач: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. Вып. 50. С. 10–25.

Адрес автора:

Россия,
630090 Новосибирск,
пр. Лаврентьева, 6,
Институт систем информатики
СО РАН

Статья поступила

26 июня 1995 г.