ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1995. Том 2, № 3, 24–48

УДК 519.95

ВЕРШИННЫЙ ВАРИАНТ ЗАДАЧИ КЛЕЙТМАНА — ВЕСТА*)

Б. Лист

Изучается задача об отыскании m-элементного множества A вершин n-го слоя в единичном d-мерном кубе с минимальным числом вершин n-го слоя, находящихся на расстоянии 2 от A (т. е. границы множества A). Основными результатами статьи являются нижние и верхние оценки для отношения мощности границы к мощности множества и точные формулы для мощности границы идеалов.

Под изопериметрическими задачами (ИЗ) понимаются задачи об отыскании геометрической фигуры максимальной площади при заданном периметре. В случае дискретных пространств рассматриваются задачи об отыскании множества наибольшей мощности с заданной границей или множества заданной мощности с наименьшей границей (дискретные ИЗ). Такими задачами занимались, например, Ж. Б. Краскал [1], Д. Катона [2], Л. Х. Харпер [3] и др.

В ряде случаев [1, 2] дискретные ИЗ допускают в качестве решения лексикографический отрезок. Вместе с тем существуют дискретные ИЗ, для которых это не так. К ним относится известная проблема Клейтмана — Веста [3], состоящая в том, чтобы для произвольного подмножества вершин слоя единичного куба оценить число пар вершин на расстоянии 2, где одна вершина принадлежит данному множеству, а другая не принадлежит.

В настоящей статье исследуется вершинный вариант задачи Клейтмана — Веста о минимизации вершинной границы с расстоянием 2. Оценки мощности такой границы используются, например, для получения асимптотики числа монотонных булевых функций из разных классов [4, 5]. Кроме того, эта задача представляет и самостоятельный интерес. Работа предпринята с целью проверки гипотезы о том, что минимум отношения мощности вершинной границы множества к мощности множества при некотором ограничении на его мощность по порядку равен

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95–01–01595).

$1/\sqrt{d}$, где d — размерность куба. Получены верхние и нижние оценки минимума отношения мощности границы к мощности множества при условии, что мощность множества не превосходит половины мощности слоя B_n^d. Доказано, что верхняя оценка достигается на шарах, мощность которых близка к половине мощности слоя, и что шары локально оптимальны относительно мощности границы множества. Однако доказать или опровергнуть упомянутую выше гипотезу в общем случае не удалось.

§ 1. Постановка задачи

Сначала введем понятия, которые используются для формулировки задачи. Множество

$$B^d = \{\tilde{x}^d = (x_1, \ldots, x_d) \mid x_i \in \{0,1\},\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$$

называется *d-мерным единичным кубом*, а множество

$$B_n^d = \left\{\tilde{x}^d \in B^d \mid \sum_{i=1}^{d} x_i = n\right\}$$

называется *n-м слоем куба B^d*. Положим $m = d - n$. Без уменьшения общности можно считать, что $m \geqslant n$. Пусть A — произвольное подмножество вершин из B_n^d. Множество

$$\delta(A) = \{\tilde{\beta} \in B_n^d \setminus A \mid (\exists \tilde{\alpha} \in A)\, \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 2,$$
$$\text{где } \rho \text{ — расстояние Хемминга}\}$$

называется *вершинной границей* множества A.

Пусть

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= |\delta(A)|/|A|, \\ \Phi(p,n) &= \min_{A \in B_n^d : |A| = p} \Phi(A), \\ \varphi(d,n) &= \min_{p \leqslant \frac{1}{2}|B_n^d|} \Phi(p,n). \end{aligned}$$

Задача состоит в оценке функционалов $\Phi(A)$, $\Phi(p,n)$ и $\varphi(d,n)$ при любом $n \leqslant d/2$.

§ 2. Структура оптимальных множеств

В настоящем параграфе доказывается, что оптимальные множества можно искать среди множеств, представимых в виде объединения так называемых начальных отрезков, и устанавливаются некоторые свойства таких отрезков.

Из теоремы 1 следует, что метод стабилизации, описанный в [3] для реберного варианта задачи Клейтмана — Веста, также применим для вершинного варианта. Можно указать конечное число отображений семейства всех подмножеств из B_n^d в себя, при которых граница $\delta(A)$ произвольного множества A не увеличивается. В результате последовательного циклического применения этих отображений любое множество $A \subseteq B_n^d$ за конечное число шагов преобразуется в множество той же мощности, стабильное относительно данных отображений (т. е. множество, которое является неподвижной точкой для всех этих отображений). Таким образом, оптимальные множества можно искать среди стабильных множеств.

Рассмотрим следующие множества $T_{i,j}(A)$ (см. [6]), порождаемые отображениями T_{ij}, $i < j$:

$$T_{i,j}(A) = (A \setminus A_{(i,j)}) \cup \pi_{i,j}(A_{(i,j)}),$$

где $\pi_{i,j}$ — отображение, переставляющее i-ю и j-ю координаты,

$$A_{(i,j)} = \{\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in A \mid \pi_{i,j}(\tilde{\alpha}) \notin A,\ \alpha_i = 0,\ \alpha_j = 1\}.$$

Множество A называется *стабильным*, если $T_{i,j}(A) = A$ для любых $i, j (1 \leqslant i, j \leqslant d, i \neq j)$.

Аналогично теореме Харпера [3] доказывается следующая теорема (доказательство приведено в [7]).

Теорема 1. *Пусть A — произвольное подмножество из B_n^d и $\{T_{i(k),j(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность отображений таких, что $i(k) = \lfloor k/d \rfloor \pmod{d+1}$ и $j(k) = k \pmod{d+1}$. Положим $A^{(0)} = A$ и $A^{(k+1)} = T_{i(k),j(k)}(A^{(k)})$. Тогда существует k_0 такое, что $A^{(k+1)} = A^{(k)}$ для любого $k \geqslant k_0$, причем $|A^{k_0}| = |A|$ и $|\delta(A^{k_0})| \leqslant |\delta(A)|$.*

Множество A называется *идеалом* (*верхним множеством*) относительно некоторого произвольного частичного порядка $\leqslant$, если для любых точек $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ таких, что $\tilde{\alpha} \in A$ и $\tilde{\beta} \leqslant \tilde{\alpha}$ (соответственно $\tilde{\beta} \geqslant \tilde{\alpha}$), следует, что $\tilde{\beta} \in A$.

На множестве вершин из B_n^d введем частичный порядок $\leqslant_1$. Будем говорить, что вектор $\tilde{v}_1$ *предшествует* вектору $\tilde{v}_2$ (обозначение: $\tilde{v}_1 \leqslant_1 \tilde{v}_2$), если существует последовательность π перестановок $\pi_{i,j}$ координат вершин из B_n^d такая, что $\tilde{v}_1 = \pi(\tilde{v}_2)$. При этом допускаются только такие перестановки $\pi_{i,j}$ координат, при которых одна единица перемещается налево и один нуль направо. Другими словами, вектор $\tilde{v}_1$ предшествует вектору $\tilde{v}_2$, если при любом $i = 1, 2, \ldots, d$ среди первых i координат вектора $\tilde{v}_2$ число единиц не превосходит числа единиц среди первых i координат вектора $\tilde{v}_1$.

Теорема 2. *Всякое стабильное множество является идеалом относительно порядка $\leqslant_1$, и каждый идеал является стабильным.*

Доказательство теоремы приведено в [3].

Определим взаимно однозначное отображение f множества B_n^d на пространство

$$L_{m,n} = \{\tilde{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \mid 0 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_n \leqslant m = d - n\}$$

следующим образом: если $\tilde{v} \in B_n^d$, то $f(\tilde{v}) = i(\tilde{v}) = (i_1(\tilde{v}), i_2(\tilde{v}), \ldots, i_n(\tilde{v})) \in L_m, n$, где $i_k(\tilde{v})$ есть число нулей, предшествующих k-й единице в векторе $\tilde{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$ [3].

На множестве $L_{m,n}$ введем частичный порядок $\leqslant_2$. Будем говорить, что вектор $i(\tilde{v}) = (i_1(\tilde{v}), \ldots, i_n(\tilde{v}))$ предшествует вектору $i(\tilde{w}) = (i_1(\tilde{w}), \ldots, i_n(\tilde{w}))$, если $i(\tilde{v}) \neq i(\tilde{w})$ и $i_j(\tilde{v}) \leqslant i_j(\tilde{w})$ при любом $j, 1 \leqslant j \leqslant n$.

Легко видеть, что $\tilde{v} <_1 \tilde{w}$ тогда и только тогда, когда $i(\tilde{v}) <_2 i(\tilde{w})$. Следовательно, образ стабильного подмножества из B_n^d является идеалом в $L_{d-n,n}$.

Точка $\tilde{\alpha}^*$ называется *верхней точкой* идеала A, если в A нет точек, которым предшествует $\tilde{\alpha}^*$. *Начальным отрезком* с наибольшей точкой $\tilde{\alpha}^*$ мы будем называть идеал $I(\tilde{\alpha}^*) = \{\tilde{\alpha} \in B_n^d \mid \tilde{\alpha} \leqslant_1 \tilde{\alpha}^*\}$.

Непосредственно из определений идеала и начального отрезка следует

Замечание 1. Любой идеал A можно представить в виде объединения некоторых начальных отрезков:

$$A = \bigcup_{\tilde{\alpha} \in A} I(\tilde{\alpha}) = \bigcup_{\tilde{\alpha}^* \in A^*} I(\tilde{\alpha}^*),$$

где A^* — множество всех верхних точек идеала A.

В дальнейшем будет использоваться следующее очевидное

Замечание 2. Наименьшая вершина $\tilde{\beta}^0$ из $\delta(\tilde{\alpha})$ (т. е. $\tilde{\beta}^0 \leqslant_1 \tilde{\beta}$ для любой вершины $\tilde{\beta} \in \delta(\{\tilde{\alpha}\})$, отличной от $\tilde{\beta}^0$) получается из $\tilde{\alpha}$ перестановкой первого (слева) нуля и последней единицы. Аналогично наибольшая вершина $\tilde{\beta}^1$ из $\delta(\{\tilde{\alpha}\})$ получается из $\tilde{\alpha}$ перестановкой первой единицы и последнего нуля.

Замыканием множества A называется множество $\Delta(A) = \delta(A) \cup A$.

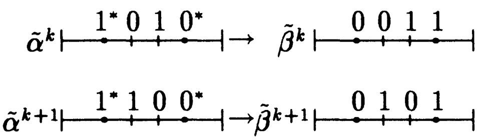
Ясно, что задачи минимизации мощности границы и мощности замыкания и функционала $\Phi(A)$ при фиксированной мощности множества эквивалентны. Заметим, что $\Phi(A) = |\delta(A)|/|A| = |\Delta(A)|/|A| - 1$.

Следующая теорема говорит о том, что замыкание начального отрезка является начальным отрезком.

Теорема 3. *Для любой точки $\tilde{\alpha}^* \in B_n^d$ существует точка $\tilde{\beta}^* \in B_n^d$ такая, что $\tilde{\beta}^* \geqslant_1 \tilde{\alpha}^*$ и $\Delta(I(\tilde{\alpha}^*)) = I(\tilde{\beta}^*)$.*

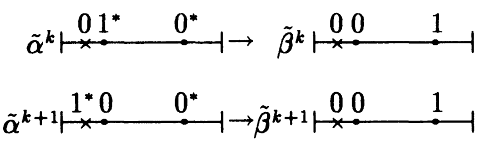
Доказательство. Определим точку $\tilde\beta^*$ как наибольшую точку из $\delta(\tilde\alpha^*)$. Заметим, что $\tilde\beta^*$ получается из $\tilde\alpha^*$ перестановкой первой единицы и последнего нуля.

Сначала докажем, что $I(\tilde\alpha^*)\cup\delta(I(\tilde\alpha^*)) \subseteq I(\tilde\beta^*)$. Для этого достаточно показать, что из соотношения $\tilde\beta \in I(\tilde\alpha^*) \cup \delta(I(\tilde\alpha^*))$ следует включение $\tilde\beta \in I(\tilde\beta^*)$, т. е. $\tilde\beta \leqslant_1 \tilde\beta^*$. Так как $I(\tilde\alpha^*)\cup\delta(I(\tilde\alpha^*)) = I(\tilde\alpha^*)\cup\bigcup_{\tilde\alpha\in I(\tilde\alpha)}\delta(\{\tilde\alpha\})$, то достаточно доказать, что $\tilde\beta \leqslant_1 \tilde\beta^*$ для любой вершины $\tilde\alpha \in I(\tilde\alpha^*)$ и наибольшей точки $\tilde\beta$ из $\delta(\tilde\alpha)$. По определению начального отрезка $\tilde\alpha \leqslant_1 \tilde\alpha^*$ для любой точки $\tilde\alpha \in I(\tilde\alpha^*)$. Поэтому из определения порядка $\leqslant_1$ на B_n^d следует существование последовательности π перестановок $\pi_{i,j}$, которая переводит $\tilde\alpha^*$ в $\tilde\alpha$ (т. е. $\pi(\tilde\alpha^*) = \tilde\alpha$). Соответственно имеем последовательность *соседних* (различающихся точно в двух координатах) вершин: $\tilde\alpha^* = \tilde\alpha^0, \tilde\alpha^1, \ldots, \tilde\alpha^s = \tilde\alpha$. Определим последовательность $\{\tilde\beta^k\}$ такую, что $\tilde\beta^k$ есть наибольшая точка из $\delta(\{\tilde\alpha^k\})$ (т. е. $\tilde\beta^k$ получается из $\tilde\alpha^k$ перестановкой первой единицы направо и последнего нуля налево). Выясним, какие $\tilde\alpha^{k+1}$ можно получить из $\tilde\alpha^k$, и покажем, что если $\tilde\alpha^k, \tilde\alpha^{k+1}$ — соседние вершины и $\tilde\alpha^k >_1 \tilde\alpha^{k+1}$, то $\tilde\beta^k \geqslant_1 \tilde\beta^{k+1}$.

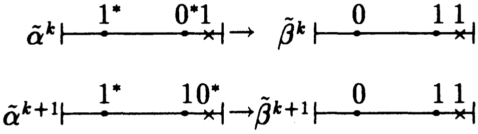


$\tilde\alpha^{k+1}$ получается из $\tilde\alpha^k$ перестановкой двух «внутренних» координат. Очевидно, $\rho(\tilde\beta^k, \tilde\beta^{k+1}) = 2$ и $\tilde\beta^k \geqslant_1 \tilde\beta^{k+1}$.

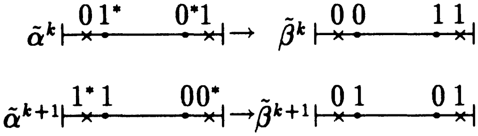
(Первые единицы и последние нули в векторах $\tilde\alpha^k$ и $\tilde\alpha^{k+1}$ помечены звездочкой.)



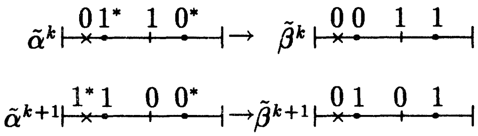
$\tilde\alpha^{k+1}$ получается из $\tilde\alpha^k$ перестановкой первой единицы и одного нуля, стоящего перед первой единицей; $\tilde\beta^k = \tilde\beta^{k+1}$.



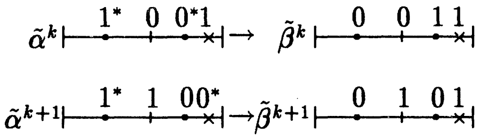
$\tilde\alpha^{k+1}$ получается из $\tilde\alpha^k$ перестановкой последнего нуля и одной единицы, стоящей за последним нулем; $\tilde\beta^k = \tilde\beta^{k+1}$.



$\tilde\alpha^{k+1}$ получается из $\tilde\alpha^k$ перестановкой одного нуля, стоящего перед первой единицей, и одной единицы, стоящей за последним нулем; $\rho(\tilde\beta^k, \tilde\beta^{k+1}) = 2$, $\tilde\beta^k \geqslant_1 \tilde\beta^{k+1}$.



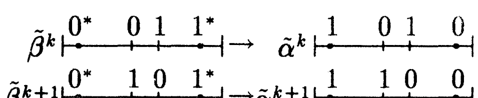
$\tilde{\alpha}^{k+1}$ получается из $\tilde{\alpha}^k$ перестановкой одного нуля, стоящего перед первой единицей, и одной «внутренней» единицы; $\rho(\tilde{\beta}^k, \tilde{\beta}^{k+1}) = 2$, $\tilde{\beta}^k \geqslant_1 \tilde{\beta}^{k+1}$.



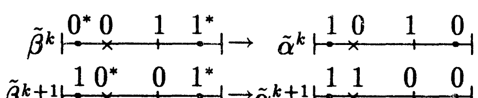
$\tilde{\alpha}^{k+1}$ получается из $\tilde{\alpha}^k$ перестановкой одного «внутреннего» нуля и одной единицы, стоящей за последним нулем; $\rho(\tilde{\beta}^k, \tilde{\beta}^{k+1}) = 2$, $\tilde{\beta}^k \geqslant_1 \tilde{\beta}^{k+1}$.

Итак, во всех случаях $\tilde{\beta}^k \geqslant_1 \tilde{\beta}^{k+1}$. Следовательно, $\tilde{\beta}^* \geqslant_1 \tilde{\beta}$.

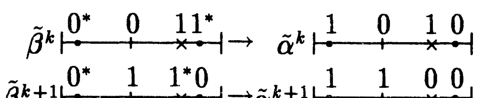
Теперь убедимся, что $I(\tilde{\alpha}^*) \cup \delta(I(\tilde{\alpha}^*)) \supseteq I(\tilde{\beta}^*)$. Для этого достаточно показать, что любая точка $\tilde{\beta} \in I(\tilde{\beta}^*)$ принадлежит множеству $I(\tilde{\alpha}^*) \cup \delta(I(\tilde{\alpha}^*))$. По определению, $\tilde{\beta} \leqslant_1 \tilde{\beta}^*$ для любой точки $\tilde{\beta} \in I(\tilde{\beta}^*)$, т. е. существуют последовательность π перестановок $\pi_{i,j}$, которая реализует цепочку отображений: $\tilde{\beta}^* = \tilde{\beta}^0 \to \tilde{\beta}^1 \to \dots \to \tilde{\beta}^k \to \dots \to \tilde{\beta}^t = \tilde{\beta}$. Определим последовательность $\{\tilde{\alpha}^k\}$ так, что $\tilde{\alpha}^k$ есть наименьшая точка из $\delta(\{\tilde{\beta}^k\})$ (т. е. $\tilde{\alpha}^k$ получается из $\tilde{\beta}^k$ перестановкой первого нуля и последней единицы). Очевидно, что $\tilde{\alpha}^* \geqslant_1 \tilde{\alpha}^0$. Покажем, что для любой вершины $\tilde{\beta} \leqslant_1 \tilde{\beta}^*$ существует $\tilde{\alpha}$ такое, что $\tilde{\alpha} \leqslant_1 \tilde{\alpha}^*$ (т. е. $\tilde{\alpha} \in I(\tilde{\alpha}^*)$ и $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 2$, $\tilde{\beta} \in \delta(\{\tilde{\alpha}\})$). Положим $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^t$. Поскольку $\rho(\tilde{\alpha}^k, \tilde{\beta}^k) = 2$ для любого k, имеем $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 2$. Просматривая все случаи, покажем, что из соотношения $\tilde{\beta}^k \geqslant_1 \tilde{\beta}^{k+1}$ следует $\tilde{\alpha}^k >_1 \tilde{\alpha}^{k+1}$.



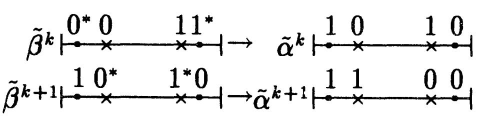
$\tilde{\beta}^{k+1}$ получается из $\tilde{\beta}^k$ перестановкой двух «внутренних» координат; $\tilde{\alpha}^k >_1 \tilde{\alpha}^{k+1}$.



$\tilde{\beta}^{k+1}$ получается из $\tilde{\beta}^k$ перестановкой первого нуля и одной «внутренней» единицы; $\tilde{\alpha}^k >_1 \tilde{\alpha}^{k+1}$.



$\tilde{\beta}^{k+1}$ получается из $\tilde{\beta}^k$ перестановкой последней единицы и одного «внутреннего» нуля; $\tilde{\alpha}^k >_1 \tilde{\alpha}^{k+1}$.



$\tilde{\beta}^{k+1}$ получается из $\tilde{\beta}^k$ перестановкой первого нуля и последней единицы; $\tilde{\alpha}^k >_1 \tilde{\alpha}^{k+1}$.

Итак, $\tilde{\alpha}^* \geqslant_1 \tilde{\alpha}^0 >_1 \tilde{\alpha}^1 >_1 \dots >_1 \tilde{\alpha}^k >_1 \tilde{\alpha}^{k+1} >_1 \dots >_1 \tilde{\alpha}^t = \tilde{\alpha}$ и $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 2$. Следовательно, $\tilde{\beta} \in I(\tilde{\alpha}^*) \cup \delta(I(\tilde{\alpha}^*))$. Теорема 3 доказана.

В следующих двух леммах утверждается, что замыкание объединения (пересечения) идеалов равно объединению (пересечению) замыканий этих идеалов.

Лемма 1. *Пусть $I(\tilde{\alpha})$ и $I(\tilde{\beta})$ — любые начальные отрезки в слое B_n^d. Тогда*

$$I(I(\tilde{\alpha}) \cap I(\tilde{\beta})) = I(I(\tilde{\alpha})) \cap I(I(\tilde{\beta})). \tag{1}$$

Доказательство. Ясно, что $I(\tilde{\alpha}) \cap I(\tilde{\beta}) = I(\tilde{\gamma})$, причем $\tilde{\gamma}$ получается из векторов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ следующим образом:

$$i_j(\tilde{\gamma}) = \min\{i_j(\tilde{\alpha}), i_j(\tilde{\beta})\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{2}$$

Рассмотрим левую часть равенства (1). Учитывая (2), имеем $I(I(\tilde{\alpha}) \cap I(\tilde{\beta})) = I(I(\tilde{\gamma}))$, где $\tilde{\gamma}$ такая, что $\tilde{i}(\tilde{\gamma}) = (i_1(\tilde{\gamma}), \ldots, i_n(\tilde{\gamma}))$, $i_j(\tilde{\gamma}) = \min\{i_j(\tilde{\alpha}), i_j(\tilde{\beta})\}$. Из теоремы 3 следует, что $\Delta(I(\tilde{\gamma})) = I(\tilde{\varepsilon})$, где $\tilde{\varepsilon}$ такая, что

$$\tilde{i}(\tilde{\varepsilon}) = ((i_2(\tilde{\gamma}) + 1), (i_3(\tilde{\gamma}) + 1), \ldots, (i_n(\tilde{\gamma}) + 1), m),$$

т. е.

$$\tilde{i}(\tilde{\varepsilon}) = ((\min\{i_2(\tilde{\alpha}), i_2(\tilde{\beta})\} + 1), (\min\{i_3(\tilde{\alpha}), i_3(\tilde{\beta})\} + 1), \\ \ldots, (\min\{i_n(\tilde{\alpha}), i_n(\tilde{\beta})\} + 1), m).$$

Рассмотрим правую часть равенства (1). По теореме 3 $\Delta(I(\tilde{\alpha})) \cap \Delta(I(\tilde{\alpha})) = I(\tilde{\lambda}) \cap I(\tilde{\mu})$, а из (2) следует, что $I(\tilde{\lambda}) \cap I(\tilde{\mu}) = I(\tilde{\nu})$. При этом величины λ, μ и ν получаются из соотношений

$$\tilde{i}(\tilde{\lambda}) = ((i_2(\tilde{\alpha}) + 1), (i_3(\tilde{\alpha}) + 1), \ldots, (i_n(\tilde{\alpha}) + 1), m),$$
$$\tilde{i}(\tilde{\mu}) = ((i_2(\tilde{\beta}) + 1), (i_3(\tilde{\beta}) + 1), \ldots, (i_n(\tilde{\beta}) + 1), m),$$
$$\tilde{i}(\tilde{\nu}) = (i_1(\tilde{\nu}), \ldots, i_n(\tilde{\nu})), i_j(\tilde{\nu}) = \min\{i_j(\tilde{\lambda}), i_j(\mu)\}.$$

Следовательно,

$$\tilde{i}(\nu) = ((\min\{i_2(\tilde{\alpha}), i_2(\tilde{\beta})\} + 1), (\min\{i_3(\tilde{\alpha}), i_3(\tilde{\beta})\} + 1), \\ \ldots, (\min\{i_3(\tilde{\alpha}), i_3(\tilde{\beta})\} + 1), m).$$

Поэтому $\tilde{i}(\tilde{\varepsilon}) = \tilde{i}(\tilde{\nu})$, значит, $I(\tilde{\varepsilon}) = I(\tilde{\nu})$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть A и B — любые идеалы в слое B_n^d. Тогда*

$$\Delta(A \cup B) = \Delta(A) \cup \Delta(B), \tag{3}$$

$$\Delta(A \cap B) = \Delta(A) \cap \Delta(B). \tag{4}$$

Утверждение (3) доказывается непосредственной проверкой, а (4) вытекает из представления идеала в виде объединения начальных отрезков и из леммы 1.

Шаром радиуса r с центром в точке $\tilde{\beta}$ называется множество $S_r(\tilde{\beta}) = \{\tilde{\alpha} \in B_n^d \mid \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leqslant r\}$.

Ясно, что шары бывают лишь четного радиуса.

Для многих изопериметрических задач шары являются оптимальными множествами. Докажем, что шары с центром в наименьшей точке слоя являются идеалами.

Утверждение 1. *Шар с центром в* $\tilde{\alpha}^0 = (\overbrace{1, \ldots, 1}^{n}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{m=d-n})$ *является начальным отрезком. Если идеал S является шаром, то центром шара S является точка* $\tilde{\alpha}^0 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m})$.

Доказательство. Сначала убедимся, что если $\tilde{\alpha} \in S_{2r}(\tilde{\alpha}^0)$, то любая точка $\tilde{\beta}$, которая предшествует $\tilde{\alpha}$, также принадлежит шару $S_{2r}(\tilde{\alpha}^0)$.

Рассмотрим произвольную точку $\tilde{\alpha} \in S_{2r}(\tilde{\alpha}^0)$. Ясно, что среди первых n координат вектора $\tilde{\alpha}$ есть по меньшей мере $n - r$ единиц и не более r нулей. Но тогда перед $(n - r)$-й единицей вектора $\tilde{\alpha}$ имеется не более r нулей, значит, $i_{n-r}(\tilde{\alpha}) \leqslant r$. Для любой точки $\tilde{\beta}$ такой, что она предшествует $\tilde{\alpha}$, по определению порядка $\leqslant_2$ справедливо неравенство $i_j(\tilde{\beta}) \leqslant i_j(\tilde{\alpha})$ для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant n$, и существует j^* такое, что $i_{j^*}(\tilde{\beta}) \leqslant i_{j^*}(\tilde{\alpha})$. Следовательно, $i_{n-r}(\tilde{\beta}) \leqslant i_{n-r}(\tilde{\alpha})$, значит, $i_{n-r}(\tilde{\beta}) \leqslant r$. Тем самым мы доказали, что $\tilde{\beta} \in S_{2r}(\tilde{\alpha}^0)$ и $S_{2r}(\tilde{\alpha}^0)$ есть идеал. Легко проверить, что множество

$$\begin{aligned} S_{2r}(\tilde{\alpha}^0) &= \{\tilde{\alpha} \in B_n^d \mid \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^0) \leqslant 2r\} = \{\tilde{\alpha} \in B_n^d \mid i_{n-r}(\tilde{\alpha}) \leqslant r\} \\ &= \{\tilde{\alpha} \in B_n^d \mid \tilde{i}(\tilde{\alpha}) \leqslant (\underbrace{r, \ldots, r}_{n-r}, \underbrace{m, \ldots, m}_{r})\} = I(\tilde{\alpha}^0) \end{aligned}$$

является начальным отрезком с крайней точкой $\tilde{\alpha}^* = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-r}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-r}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{r})$.

Первое утверждение доказывается от противного. Убедимся в справедливости второго утверждения. Пусть множество $S = S_{2r}(\tilde{\alpha}^0)$ является шаром и идеалом. Допустим, что существует шар $S' = S_{2r}(\tilde{\alpha}^1)$ с центром в точке $\tilde{\alpha}^1$, отличной от точки $\tilde{\alpha}^0$, и пусть этот шар является идеалом. Тогда найдутся две точки $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$ такие, что $\tilde{\beta} \in S' \setminus S$, а $\tilde{\gamma} \in S \setminus S'$. При этом окажется, что $\tilde{i}(\tilde{\beta}) >_2 \tilde{i}(\tilde{\gamma})$, и, следовательно, $\tilde{\gamma} \in S'$. Это противоречит сделанному предположению.

Итак, пусть $\tilde{\beta}$ — произвольная точка, находящаяся на расстоянии $2(r+k)$ от $\tilde{\alpha}^0$ и на расстоянии $2r$ от $\tilde{\alpha}^1$. Пусть вектор $\tilde{\alpha}^1$ отличается от $\tilde{\alpha}^0$ в координатах с номерами $j_1, \ldots, j_k, j_{k+1}, \ldots, j_{2k}$ $(1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{2k} \leqslant d)$.

Ясно, что в векторе $\tilde{\alpha}^1$ на местах $j_1, \ldots, j_k$ находятся нули, а на местах $j_{k+1}, \ldots, j_{2k}$ — единицы. В качестве $\tilde{\gamma}$ выберем точку, отличающуюся от $\tilde{\beta}$ только в координатах с номерами $j_1, \ldots, j_k, j_{k+1}, \ldots, j_{2k}$. Ясно, что в векторе $\tilde{\gamma}$ на местах $j_1, \ldots, j_k$ должны находиться единицы, а на местах $j_{k+1}, \ldots, j_{2k}$ — нули. Эта точка находится на расстоянии $2r$ от $\tilde{\alpha}^0$ и на расстоянии $2(r+k)$ от $\tilde{\alpha}^1$. Очевидно, что $\tilde{\beta} \in S' \setminus S$, а $\tilde{\gamma} \in S \setminus S'$. Так как $\tilde{\gamma}$ получается из $\tilde{\beta}$ посредством k перестановок типа $\pi_{i,j}$, то точка $\tilde{\gamma}$ предшествует точке $\tilde{\beta}$ (в порядке $\leqslant_1$). Поскольку S' — идеал, $\tilde{\gamma}$ должна принадлежать S'. Но это противоречит тому, что $\tilde{\gamma} \in S \setminus S'$. Значит, предположение о существовании шара с центром, отличным от $\tilde{\alpha}^0$, является неверным. Утверждение 1 доказано.

§ 3. Точные формулы мощности границы идеалов

В настоящем параграфе мы установим точные формулы для мощностей начального отрезка и его замыкания в зависимости от верхней точки начального отрезка, а также формулу для мощности замыкания произвольного идеала.

Замечание 3. Напомним, что $i_j(\tilde{\alpha})$ есть число нулей, предшествующих j-й единице в $\tilde{\alpha} \in B_n^d$. Пусть $\tilde{\beta}^*$ — наибольшая точка из границы точки $\tilde{\alpha}^* \in B_n^d$. Тогда с учетом замечания 2 получаем следующую формулу:

$$i_j(\tilde{\beta}^*) = \begin{cases} i_{j+1}(\tilde{\alpha}^*) + 1, & \text{если } (j < n)\&(i_{j+1}(\tilde{\alpha}^*) < d - n); \\ d - n, & \text{если } ((j < n)\&(i_{j+1}(\tilde{\alpha}^*) = d - n)) \vee (j = n). \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 4. *При любых n, d и любом $\tilde{\alpha}^*$ справедливы следующие соотношения:*

$$|I(\tilde{\alpha}^*)| = \sum_{i_1=0}^{i_1(\tilde{\alpha}^*)} \sum_{i_2=i_1}^{i_2(\tilde{\alpha}^*)} \cdots \sum_{i_n=i_{n-1}}^{i_n(\tilde{\alpha}^*)} 1, \tag{6}$$

$$|\Delta(I(\tilde{\alpha}^*))| = \sum_{i_1=0}^{i_2(\tilde{\alpha}^*)+1} \sum_{i_2=i_1}^{i_3(\tilde{\alpha}^*)+1} \cdots \sum_{i_{j^*-1}=i_{j^*-2}}^{i_{j^*}(\tilde{\alpha}^*)+1} \sum_{i_{j^*}=i_{j^*-1}}^{d-n} \cdots \sum_{i_n=i_{n-1}}^{d-n} 1, \tag{7}$$

где j^* — наибольшее число j такое, что $i_j(\tilde{\alpha}^*) < d - n$.

Доказательство. По определению имеем $I(\tilde{\alpha}^*) = \{\tilde{\alpha} \in B_n^d \mid i_j(\tilde{\alpha}) \leqslant i_j(\tilde{\alpha}^*),\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Кроме того, координаты любой точки $\tilde{i} = (i_1, \ldots, i_n) \in L_{m,n}$ не убывают. Подсчитаем все точки $\tilde{i} \in L_{m,n}$ такие, что $i_j \leqslant i_j(\tilde{\alpha}^*)$ для всех j, $1 \leqslant j \leqslant n$, и $0 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_n \leqslant m = d - n$; при этом индекс i_1 принимает значения от 0 до $i_1(\tilde{\alpha}^*)$, при каждом фиксированном i_1 индекс i_2 принимает значения от i_1 до $i_2(\tilde{\alpha}^*)$ и т. д. Отсюда следует равенство (6).

Далее из теоремы 3 следует, что $\Delta(I(\tilde{\alpha}^*)) = \delta(I(\tilde{\alpha}^*)) \cup I(\tilde{\alpha}^*)$ является начальным отрезком с некоторой верхней точкой $\tilde{\beta}^*$, причем $\tilde{\beta}^*$ — наибольшая точка из $\delta(\tilde{\alpha}^*)$. С учетом (5) из формулы (6) для $I(\tilde{\beta}^*)$ получаем (7). Теорема 4 доказана.

Теперь получим формулу для мощности замыкания произвольного идеала.

Если $\tilde{i} \in L_{m,n}$, $A' = I(\tilde{i}) \setminus \{\tilde{i}\}$ и $A'' = I(\tilde{i})$, то положим $\eta(\tilde{i}) = |\Delta(A'') \setminus \Delta(A')|$ и $\eta(\tilde{\alpha}) = \eta(\tilde{i})$, где $\tilde{i} = \tilde{i}(\tilde{\alpha})$.

Утверждение 2. *Пусть $\tilde{i}^0$ — наименьшая точка в $L_{m,n}$ (напомним, что вектору $\tilde{i}^0 \in L_{m,n}$ соответствует точка $\tilde{a}^0 = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n},\underbrace{0,\ldots,0}_{m}) \in B_n^d$), а точка $\tilde{i} \in L_{m,n}$ имеет вид $\tilde{i} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{s}, i_{s+1},\ldots,i_n)$. Тогда*

$$\eta(\tilde{i}) = \begin{cases} nm+1, & \text{если } \tilde{i} = \tilde{i}^0; \\ s(m-i_n), & \text{если } \tilde{i} \neq \tilde{i}^0. \end{cases}$$

Доказательство. Граница точки $\tilde{\alpha}^0$ состоит из точек, в которых среди первых n координат имеется по одному нулю, а среди последних m координат — по одной единице. Следовательно, $\eta(\tilde{\alpha}_0^0) = nm+1$.

Пусть $\tilde{\alpha} \neq \tilde{\alpha}^0$, а $\tilde{\beta}$ — наибольшая точка границы $\delta(\{\tilde{\alpha}\})$. Тогда из (5) следует, что

$$\tilde{i}(\tilde{\beta}) = (\underbrace{1,\ldots,1}_{s-1}, \min\{(i_{s+1}+1),m\}, \min\{(i_{s+2}+1),m\},$$
$$\ldots, \min\{(i_n+1),m\}, m).$$

Так как $\eta(\tilde{\alpha}) = |\Delta(I(\tilde{\alpha})) \setminus \Delta(I(\tilde{\alpha}) \setminus \{\tilde{\alpha}\})|$, то

$$\eta(\tilde{\alpha}) = |\{\tilde{\gamma}|\tilde{\gamma} \leqslant \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \notin \delta(I(\tilde{\alpha}) \setminus \{\tilde{\alpha}\})\}| = |\{\tilde{\gamma}|\tilde{i}(\tilde{\gamma})$$
$$= (\underbrace{0,\ldots,0}_{p\geqslant 0},\underbrace{1,\ldots,1}_{q\geqslant 0}, \min\{(i_{s+1}+1),m\},\ldots,\min\{(i_n+1),m\},j)\}|,$$

где $p+q = s-1$ и $j \in \{\min\{(i_n+1),m\}, \min\{(i_n+2),m\},\ldots,m\}$. Поэтому $\eta(\tilde{\alpha}) = s(m-i_n)$. Утверждение 2 доказано.

Теорема 5. $|\Delta(A)| = \sum\limits_{\tilde{\alpha}\in A} \eta(\tilde{\alpha})$.

Доказательство. Теорема доказывается индукцией по мощности p множества A. Для $p=1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение доказано для всех множеств мощности $p-1$. Рассмотрим произвольный p-элементный идеал. Он представим в виде

$$A = I(\tilde{\alpha}') \cup \bigcup I(\tilde{\alpha}^j), \tag{8}$$

где $\tilde{\alpha}' \notin I(\tilde{\alpha}^j)$ для всех j (т. е. $A \setminus \{\tilde{\alpha}'\}$ есть идеал). Тогда из леммы 1 следует, что

$$\Delta(A) = \Delta(I(\tilde{\alpha}')) \cup \bigcup \Delta(I(\tilde{\alpha}^j)). \tag{9}$$

Поскольку $A \setminus \{\tilde{\alpha}'\} = (I(\tilde{\alpha}') \setminus \{\tilde{\alpha}'\}) \cup \bigcup I(\tilde{\alpha}^j)$, имеем

$$\Delta(A \setminus \{\tilde{\alpha}'\}) = \Delta(I(\tilde{\alpha}') \setminus \{\tilde{\alpha}'\}) \cup \bigcup \Delta(I(\tilde{\alpha}^j)). \tag{10}$$

Так как $\tilde{\alpha}' \notin I(\tilde{\alpha}^j)$ для всякого j, то $I(\tilde{\alpha}') \cap I(\tilde{\alpha}^j) \subseteq I(\tilde{\alpha}') \setminus \{\tilde{\alpha}'\}$. Отсюда и из леммы 2 получаем

$$\Delta(I(\tilde{\alpha}')) \cap \Delta(I(\tilde{\alpha}^j)) = \Delta(I(\tilde{\alpha}') \cap I(\tilde{\alpha}^j)) \subseteq \Delta(I(\tilde{\alpha}') \setminus \{\tilde{\alpha}'\}).$$

Заметим, что если $B \cap C \subseteq D$, то

$$(B \cup C) \setminus (D \cup C) = (B \cup C) \setminus D \cap (B \cup C) \setminus C = B \setminus D \cap B \setminus C = B \setminus D.$$

Тогда из (9) и (10) следует, что

$$\Delta(A) \setminus \Delta(A \setminus \{\tilde{\alpha}'\}) = \Delta(I(\tilde{\alpha}')) \setminus \Delta(I(\tilde{\alpha}') \setminus \{\tilde{\alpha}'\}).$$

Поэтому $|\Delta(A) \setminus \Delta(A \setminus \{\tilde{\alpha}'\})| = \eta(\tilde{\alpha}')$. Отсюда получаем

$$|\Delta(A)| = \eta(\tilde{\alpha}') + |\Delta(A \setminus \{\tilde{\alpha}'\})| = \eta(\tilde{\alpha}') + \sum_{\tilde{\alpha} \in A \setminus \{\tilde{\alpha}'\}} \eta(\tilde{\alpha}) = \sum_{\tilde{\alpha} \in A} \eta(\tilde{\alpha}).$$

Теорема 5 доказана.

Для произвольного множества A введем следующие специальные подмножества:

$$[A]^s_t = \{\tilde{i} = (i_1, \ldots, i_n) \in A \mid i_1 = \cdots = i_s = 0,\ i_n \leqslant m - t\}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} A^s_t &= \{\tilde{i} \in A \mid i_1 = \cdots = i_s = 0,\ i_{s+1} > 0,\ i_n = m - t\} \\ &= \{\tilde{\alpha} \in A \mid \tilde{\alpha} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, 0, \alpha_{s+2}, \ldots, \alpha_{d-t-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{t})\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Непосредственно из определений (11) и (12) множеств A^s_t и $[A]^s_t$ вытекают следующее

Утверждение 3. (a) $A = [A]^0_0$, *а для всех* s *и* t, $0 \leqslant s \leqslant n$, $0 \leqslant t \leqslant m$, *справедливы включения* $[A]^{s+1}_t \subset [A]^s_t$, $[A]^s_{t+1} \subset [A]^s_t$, $[A]^{s+1}_{t+1} \subset [A]^s_t$.

(b) *Множества* A^s_t *попарно не пересекаются, и* $A = \bigcup\limits_{s=0}^{n} \bigcup\limits_{t=0}^{m} A^s_t$.

(c) $\eta(\tilde{i}) = st$ *для всякой точки* $\tilde{i} \in A^s_t$, $\tilde{i} \neq \tilde{i}^0$, *где* $\tilde{i}^0$ — *наименьшая точка в* $L_{m,n}$.

(d) $\eta(\tilde{i}) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{i} \in A^0_0 \cup A^0_1 \cup A^1_0$; $\eta(\tilde{i}) \neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{i} \in [A]^1_1$. (*Заметим, что* $[A]^1_1 = A \setminus (A^0_0 \cup A^0_1 \cup A^1_0)$.)

(e) $|A^s_t| = |[A]^s_t| - |[A]^{s+1}_t| - |[A]^s_{t+1}| + |[A]^{s+1}_{t+1}|$.

Теорема 6. $|\Delta(A)| = \left(\sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{t=1}^{m} |[A]_t^s|\right) + 1.$

Доказательство. По теореме 5 и в силу утверждения 3, пп. (b), (c) имеем

$$|\Delta(A)| = \sum_{\tilde{i}\in A}\eta(\tilde{i}) = \sum_{s=0}^{n}\sum_{t=0}^{m}\sum_{\tilde{i}\in A_t^s}\eta(\tilde{i}) = \left(\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=0}^{m}|A_t^s|\cdot s\cdot t\right) + 1.$$

Пользуясь этим фактом и утверждением 3, п. (b), с помощью стандартных преобразований сумм получаем

$$\begin{aligned}
|\Delta(A)| &= \left(\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=0}^{m}(|[A]_t^s| - |[A]_t^{s+1}| - |[A]_{t+1}^s| + |[A]_{t+1}^{s+1}|)st\right) + 1\\
&= \left(\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=0}^{m}|[A]_t^s|st\right) - \left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=0}^{m}|[A]_t^s|(s-1)t\right)\\
&- \left(\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=1}^{m}|[A]_t^s|s(t-1)\right) + \left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}|[A]_t^s|(s-1)(t-1)\right) + 1\\
&= \left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}|[A]_t^s|(st - s(t-1) - (s-1)t + (s-1)(t-1))\right) + 1\\
&= \left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}|[A]_t^s|\right) + 1.
\end{aligned}$$

Теорема 6 доказана.

§ 4. Верхняя оценка функционала $\varphi(d, n)$

В этом параграфе доказывается, что $\varphi(2n, n) \leqslant c/\sqrt{n}$, где с — подходящая константа. Приводится пример множества, который показывает, что с точностью до порядка эта оценка неулучшаема. Мы будем рассматривать начальные отрезки $I(\tilde{\alpha}^*) = \{\tilde{\alpha} \in B_n^d \mid \tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\alpha}^*\}$ в среднем слое $(d = 2n)$, у которых наибольшая точка $\tilde{\alpha}^* \in B_n^d$ имеет следующий вид:

$$\tilde{\alpha}^* = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n-k},\underbrace{1,\ldots,1}_{n-k+1},\underbrace{0,\ldots,0}_{k},\underbrace{1,\ldots,1}_{k-1}).$$

По теореме 3 имеем $\delta(I(\tilde{\alpha}^*)) \cup I(\tilde{\alpha}^*) = I(\tilde{\beta}^*)$, где $\tilde{\beta}^*$ есть наибольшая точка из границы точки $\tilde{\alpha}^*$ $(\tilde{\alpha}^*, \tilde{\beta}^* \in B_n^d)$. В нашем случае точка $\tilde{\beta}^*$ имеет вид

$$\tilde{\beta}^* = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n-k+1},\underbrace{1,\ldots,1}_{n-k},\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{k}).$$

Отсюда

$$|I(\tilde{\alpha}*)| = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1}{i} \binom{2n-2k+1}{n-i} \tag{13}$$

и

$$|\delta(I(\tilde{\alpha}^*))| = \binom{2k-1}{k} \binom{2n-2k+1}{n-k}. \tag{14}$$

По определению $\Phi(I(\tilde{\alpha}^*)) = |\delta(I(\tilde{\alpha}^*))|/|I(\tilde{\alpha}^*)|$. Пользуясь этим соотношением, а также (13) и (14), получаем

$$\begin{aligned}\Phi(I(\tilde{\alpha}^*)) &= \frac{\binom{2k-1}{k}\binom{2n-2k+1}{n-k}}{\sum\limits_{i=0}^{k-1}\binom{2k-1}{i}\binom{2n-2k+1}{n-i}} \\ &= \frac{\binom{2k-1}{k}\binom{2n-2k+1}{n-k}}{\sum\limits_{i=0}^{k-1}\binom{2k-1}{i}\binom{2n-2k+1}{n-k}\prod\limits_{j=1}^{k-i}\frac{2n-2k+1-(n-k+j-1)}{n-k+j}} \\ &= \frac{\binom{2k-1}{k}}{\sum\limits_{i=0}^{k-1}\binom{2k-1}{i}\prod\limits_{j=1}^{k-i}\frac{n-k-j+2}{n-k+j}} = \binom{2k-1}{k}/S,\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$S = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1}{i} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n-k-j+2}{n-k+j}.$$

Теорема 7. 1. *Если* k — *константа* $(0 \leqslant k \leqslant n)$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(I(\tilde{\alpha}^*)) = \frac{2}{\sqrt{\pi k}}.$$

2. *Если* $k = k(n) \leqslant \lambda n$, *где* λ — *произвольная фиксированная константа,* $0 < \lambda < 1$, *то*

$$\Phi(I(\tilde{\alpha}^*)) = \Omega(1/\sqrt{k}).$$

Доказательство. Если k — константа, то

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n-k-j+2}{n-k+j} = 1.$$

Отсюда и из (15) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(I(\tilde{\alpha}^*)) = \binom{2k-1}{k} / \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1}{i}$$

$$= 2^{-2k+2}\binom{2k-1}{k} = 2^{-2k+1}\binom{2k}{k}.$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга, получаем

$$\binom{2k}{k} \sim \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(I(\tilde{\alpha}^*)) = \frac{2}{\sqrt{\pi k}}. \tag{16}$$

Рассмотрим второй случай. Сначала найдем нижнюю оценку для S из (15). Имеем

$$\begin{aligned} S &\geqslant \sum_{i=\lfloor k-\sqrt{k}\rfloor}^{k-1} \binom{2k-1}{i} \prod_{j=1}^{k-i}\left(1-\frac{2j}{n-k}\right) \\ &> \sum_{i=\lfloor k-\sqrt{k}\rfloor}^{k-1} \binom{2k-1}{i} \left(1-\frac{2(k-i)}{n-k}\right)^{k-i} \\ &> \sum_{i=\lfloor k-\sqrt{k}\rfloor}^{k-1} \binom{2k-1}{i} \left(1-\frac{2\sqrt{k}}{n-k}\right)^{\sqrt{k}}. \end{aligned}$$

Поскольку $n-1 \geqslant n(1-\lambda)$, где $\lambda < 1$, имеем

$$\left(1-\frac{2\sqrt{k}}{n-k}\right)^{\sqrt{k}} = \Omega(1).$$

Поэтому

$$S > \Omega(1) \sum_{i=\lfloor k-\sqrt{k}\rfloor}^{k-1} \binom{2k-1}{i} = \Omega(2^{2k}).$$

Так как

$$\prod_{j=1}^{k-i} \frac{n-k-j+2}{n-k+j} < 1,$$

то

$$S = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1}{i} = \Omega(2^{2k}).$$

Следовательно,

$$S = \Omega(2^{2k}). \tag{17}$$

Подставляя (17) в (15), получаем

$$\Phi(I(\tilde{\alpha}^*)) = \frac{1}{S}\binom{2k-1}{k} = \Omega(2^{-2k})\binom{2k-1}{k} = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right). \tag{18}$$

Из (16) и (18) следует справедливость теоремы 7.

Итак, мы доказали, что при любой константе $\lambda < 1$ существует константа c такая, что $\Phi(I(\tilde{\alpha}^*))\,\big|_{k(n)=\lambda n} \leqslant c/\sqrt{n}$. Пользуясь этим фактом и тем, что мощность рассматриваемых нами отрезков не превосходит $\frac{1}{2}|B_n^d|$, получаем следующее утверждение.

Теорема 8. *При некоторой константе c справедливо неравенство*

$$\varphi(2n, n) \leqslant c/\sqrt{n}. \tag{19}$$

Докажем, что в случае среднего слоя верхняя оценка из (19) достигается с точностью до порядка на шарах радиуса $n - O(\sqrt{n})$ с центром в точке $\tilde{\alpha}^0$. Объем таких шаров близок к половине мощности всего слоя B_n^d. Заметим, что наибольший шар, объем которого не превосходит $\frac{1}{2}|B_n^d|$, имеет радиус $r = 2\lfloor n/2 \rfloor$.

Утверждение 4. *Если $n = \lfloor d/2 \rfloor$ и $r = \lfloor n/2 \rfloor - O(\sqrt{n})$, то справедливо соотношение*

$$\Phi(S_{2r}(\tilde{\alpha}^*)) = \Omega(1/\sqrt{d}).$$

Доказательство. Если $n = \lfloor d/2 \rfloor$ и $r = \lfloor n/2 \rfloor - O(\sqrt{n})$, то

$$|S_{2r}(\tilde{\alpha}^0)| = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{n-k}\binom{d-n}{k} = \Omega(4n). \tag{20}$$

Докажем, что шар является «локально оптимальным» множеством относительно мощности границы.

Утверждение 5. *Для фиксированного $p \leqslant \frac{1}{2}|B_n^d|$ такого, что существует шар $S = S_{2r}(\{\tilde{\alpha}^0\})$ объема p, и произвольного p-множества $A \subseteq B_n^d$ такого, что $|(S \setminus A) \cup (A \setminus S)| = 2$, выполняется неравенство $\Phi(A) \geqslant \Phi(S)$.*

Доказательство. Пусть множество A такое, что $A \setminus S = \{\tilde{\beta}\}$ и $S \setminus A = \{\tilde{\alpha}\}$. Покажем, что $|\delta(A)| \geqslant |\delta(S)|$. Возможны следующие четыре случая.

Случай 1. Пусть $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^0) < 2r$ и $\rho(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}^0) < 2(r+1)$. Тогда, поскольку $\delta(A) = (\delta(S) \setminus \{\tilde{\beta}\}) \cup \{\tilde{\alpha}\} \cup (\delta(\{\tilde{\beta}\}) \setminus A)$ и $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ — разные точки из $\delta(S)$, имеем $|\delta(A)| = |\delta(S)| + |\delta(\tilde{\beta}) \setminus A|$. Поэтому $|\delta(A)| \geqslant |\delta(S)|$.

Случай 2. Пусть $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^0) < 2r$ и $\rho(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}^0) = 2(r+1)$. Очевидно, что $\delta(A) = \delta(S) \cup \{\tilde{\alpha}\} \cup (\delta(\{\tilde{\beta}\}) \setminus A)$ и $\delta(S) \cap \{\tilde{\alpha}\} \cap (\delta(\{\tilde{\beta}\}) \setminus A) = \varnothing$. Но тогда $|\delta(A)| = |\delta(S)| + |\delta(\{\tilde{\beta}\}) \setminus A| + 1$. Следовательно, $|\delta(A)| > |\delta(S)|$.

Случай 3. Пусть $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^0) = 2r$ и $\rho(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}^0) < 2(r+1)$. Поскольку $\delta(A) \supseteq (\delta(S) \cup \{\tilde{\alpha}\}) \setminus \{\tilde{\beta}\}$, имеем $|\delta(A)| \geqslant |\delta(S)|$.

Случай 4. Пусть $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^0) = 2r$ и $\rho(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}^0) = 2(r+1)$. Так как $\delta(A) = \delta(S) \cup \{\tilde{\alpha}\} \cup (\delta(\{\tilde{\beta}\}) \setminus A)$, то $|\delta(A)| > |\delta(S)|$.

Итак, в любом случае $|\delta(A)| \geqslant |\delta(S)|$. Следовательно, $|\Phi(A)| \geqslant |\Phi(S)|$. Утверждение 5 доказано.

§ 5. Нижние оценки функционала $\varphi(d, n)$

Приведенная в этом параграфе оценка вершинной границы опирается на известную теорему Краскала — Катоны [1, 2]. Под *нижней тенью* множества $A \subseteq B_n^d$ понимается множество $\partial(A)$ всех вершин, находящихся на расстоянии 1 от этого множества и лежащих в $(n-1)$-м слое, т. е.

$$\partial(A) = \{\tilde{\beta} \in B_{n-1}^d | (\exists \tilde{\alpha} \in A) |\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}| = 1\}.$$

Аналогично определяется *верхняя тень*:

$$d(A) = \{\tilde{\beta} \in B_{n+1}^d | (\exists \tilde{\alpha} \in A) |\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}| = 1\}.$$

Заметим, что $\partial(d(A)) = \delta(A) \cup A$. Множество $L(p)$ первых p вершин n-го слоя (в лексикографическом порядке) называется *левым лексикографическим отрезком.*

Теорема 9 (теорема Краскала — Катоны [1, 2]). *Для произвольного множества $A \subseteq B_n^d$, $n \leqslant d - n$ и $|A| = p$ справедливо неравенство $|\partial(A)| \geqslant |\partial(L_n(p))|$.*

Из теоремы Краскала — Катоны вытекает следующая лемма (доказательство см., например, в [8]).

Лемма 3. *Если $p \leqslant \binom{d-k}{n}$, то $|\partial(L_n(p))| \geqslant \frac{np}{d-n-k+1}$.*

Из теоремы Краскала — Катоны и леммы 3 вытекает следующее

Утверждение 6. *Если $|A| \leqslant \binom{d-k}{d-n}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, то*

$$\Phi(A) \geqslant \frac{(d-n)(n+1)}{(d-n-k+2)(n-k+1)} - 1. \tag{22}$$

Если $k \leqslant \frac{3-\sqrt{5}}{2} n - (1 + \frac{1}{\sqrt{5}})$, то

$$\Phi(A) \geqslant \frac{(d-n)(n+1)}{(d-n-k+1)(n-k+1)} - 1. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть $A \subseteq B_n^d$ и $|A| = p$. Обозначим через A^* множество, состоящее из точек, противоположных точкам из A. Ясно, что $A^* \subseteq B_{d-n}^d$ и $|A^*| = |A| = p$. По теореме Краскала — Катоны $|\partial(A^*)| \geqslant |\partial(L_{d-n}(p))| =: q$. Очевидно, что $\partial(L_{d-n}(p)) \in B_{d-n-1}^d$. Так как $|\partial(L_{d-n}\binom{d-k}{d-n})| = \binom{d-k}{d-n-1}$, то $q \leqslant \binom{d-k}{d-n-1}$. Кроме того, $|d(A)| = |\partial(A^*)| \geqslant |\partial(L_{d-n}(p))| = q$. Из включения $\partial(L_{n+1}(q)) \subseteq \partial(L_{n+1}(|d(A)|))$ и теоремы Краскала — Катоны следует, что

$$|\partial(d(A))| \geqslant |\partial(L_{n+1}(|d(A)|))| \geqslant |\partial(L_{n+1}(q))|. \tag{24}$$

Найдем константу $c = c(k)$ такую, что $\binom{d-k}{d-n-1} \leqslant \binom{d-c(k)}{n+1}$. Тогда из $q \leqslant \binom{d-k}{d-n-1}$ будет следовать $q \leqslant \binom{d-c(k)}{n+1}$. Без уменьшения общности можно считать, что $n \leqslant d/2$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\frac{\binom{d-k}{d-n-1}}{\binom{d-c(k)}{n+1}} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+2)}{(d-n-1)\dots(d-n-c(k))} \cdot \frac{(d-k)!}{(d-c(k))!}. \tag{25}$$

Покажем, что при $c(k) = k-2$ и $k \leqslant n$ величина (25) не превосходит 1:

$$\begin{aligned}\frac{\binom{d-k}{d-n-1}}{\binom{d-k+2}{n+1}} &= \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+2)}{(d-n-1)\dots(d-n-k+2)} \cdot \frac{1}{(d-k+1)(d-k+2)}\\ &\leqslant \frac{(n-1)}{(n-1)}\dots\frac{(n-k+2)}{(n-k+2)} \cdot \frac{(n+1)n}{(d-k+1)(d-k+2)}\\ &= \frac{(n+1)n}{(d-k+1)(d-k+2)} \leqslant 1.\end{aligned} \tag{26}$$

Аналогично доказывается, что если $k \leqslant \frac{3-\sqrt{5}}{2}n$, то величина (25) не больше 1 при $c(k) = k-1$. Поскольку $|A| \leqslant \binom{d-k}{d-n}$, из леммы 3 и (24) следует, что

$$\begin{aligned}\Phi(A) &= \frac{|\partial(d(A))|}{|A|} - 1 \geqslant \frac{|\partial(L_{n+1}(q))|}{|A|} - 1\\ &= \frac{|\partial(L_{n+1}(q))|}{q} \cdot \frac{|\partial(L_{d-n}(p))|}{p} - 1 \geqslant \frac{n+1}{d-n-c} \cdot \frac{d-n}{n-k+1} - 1.\end{aligned} \tag{27}$$

Подставив $c = k-2$ ($c = k-1$) в (27), получим неравенство (22) (неравенство (23)). Утверждение 6 доказано.

Следствие. *Пусть* $n = \lfloor d/2 \rfloor$ *и* $|A| \leqslant \binom{d-k}{d-n}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. *Тогда для больших* k ($k = n - \Delta$, $\Delta = o(n)$)

$$\Phi(A) \geqslant \frac{n(n+1)}{(\Delta+1)(\Delta+2)}, \tag{28}$$

а для малых k ($1 \leqslant k << n$)

$$\Phi(A) \geqslant \frac{2k-1}{n+1}. \tag{29}$$

Доказательство. 1. Если k — большое ($k = n - \Delta$, $\Delta = o(n)$), то мощность множества A мала по сравнению с мощностью слоя ($|A| \leqslant \binom{n+\Delta}{n}$). В таком случае в силу (22) для любого A из среднего слоя

$$\Phi(A) \geqslant \frac{k}{n-k+1} + \frac{(k-2)(n+1)}{(n-k+2)(n-k+1)} \geqslant \frac{n(n+1)}{(\Delta+1)(\Delta+2)}.$$

2. Если же k мало и A расположено на среднем слое, то из (23) следует, что

$$\Phi(A) \geqslant \frac{(d-n)k}{(d-n-k+1)(n-k+1)} + \frac{k-1}{d-n-k+1} \geqslant \frac{k}{n-k+1} + \frac{k-1}{d-n} \geqslant \frac{2k-1}{d-n}.$$

Следствие доказано.

Из (23) вытекает следующая

Теорема 10. *Если $k = 1$ (значит, $|A| \leqslant \frac{n}{d}|B_n^d|$), то $\Phi(A) \geqslant 1/n$, т. е. $\varphi(d,n) \geqslant 1/n$.*

В теореме 6 установлена связь между $\Delta(A)$ и некоторыми специальными множествами $[A]_t^s$. Таким образом, оценивая мощности множеств $[A]_t^s$, можно получить оценку мощности замыкания $\Delta(A)$. В следующих двух леммах укажем оптимальные множества для задачи минимизации множеств $[A]_0^1$ и $[A]_1^0$. Рассмотрим следующий линейный порядок вершин слоя B_n^d. Вектор $\tilde{\alpha}$ *предшествует* вектору $\tilde{\beta}$ ($\tilde{\alpha} <_3 \tilde{\beta}$), если $(i_n(\tilde{\alpha}),\dots,i_1(\tilde{\alpha})) < (i_n(\tilde{\beta}),\dots,i_1(\tilde{\beta}))$ в обычном лексикографическом порядке. *Левым лексикографическим отрезком мощности p* в слое относительно некоторого порядка называется множество первых (относительно данного порядка) p вершин слоя.

Лемма 4. *Минимум величины $|[A]_0^1|$ по всем множествам $A \subseteq L_{m,n}$ фиксированной мощности достигается на левом лексикографическом отрезке относительно порядка $<_3$.*

Доказательство. Используем индукцию по n. При $n = 1$ существует единственный идеал. Он является начальным отрезком относительно порядка $<_3$. Допустим, что лемма верна для $n = k$ и любого m. Покажем, что лемма верна и в $L_{m,k+1}$. Будем говорить, что $A^* \subseteq L_{m,k+1}$ является оптимальным множеством для фиксированной мощности p, если

$$|[A^*]_0^1| = \min_{A\subseteq L_{m,k+1},\, |A|=p} |[A]_0^1| = r. \tag{30}$$

Выберем множество A' таким, что

$$|A'| = \min_{A\subseteq L_{m,k+1},\, |[A]_0^1|=r} |A|. \tag{31}$$

Тогда все р-элементные подмножества множества A' оптимальны. Из (31) вытекает, что если $(0,x_2,\dots,x_{k+1})$ — произвольная точка множества $[A']_0^1$, то все точки вида $(j,x_2,\dots,x_{k+1})$, где $1 \leqslant j \leqslant x_2$, принадлежат множеству A'. В противном случае, добавляя их к множеству

A', получаем идеал. Величина $|A'|$ растет, $|[A']_0^1|$ не изменяется. Это противоречит предположению (31).

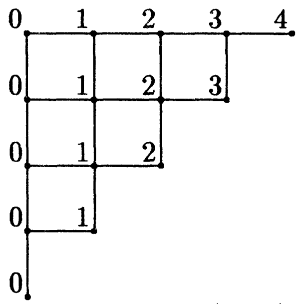
Для множеств $B \subseteq [L_{m,k+1}]_0^1$ введем функционал

$$f(B) = \sum_{\tilde{i} \in B} f(\tilde{i}), \quad \text{где } \tilde{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n),\ f(\tilde{i}) = i_2.$$

Из леммы 7 и определения функционала $f(B)$ следует, что

$$f([A']_0^1) = |A'| - |[A']_0^1| = |A'| - r = \max_{B \subseteq [L_{m,k+1}]_0^1,\, |B| = r} f(B). \tag{32}$$

Пространство $[L_{m,k+1}]_0^1 = \{(0, x_2, \ldots, x_{k+1}) \mid 0 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{k+1 \leqslant m}\}$ эквивалентно пространству $L_{m,k} = \{(x_1, \ldots, x_k) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_k \leqslant m\}$. Поэтому $[A']_0^1$ можно рассматривать как множество из $L_{m,k}$. В $L_{m,k}$ функционал f определяется следующим образом: $f(\tilde{i}) = i_1$. Покажем, что в качестве множества $[A']_0^1$ можно взять начальный отрезок из $L_{m,k}$ относительно порядка $<_3$. Для этого достаточно доказать, что для него выполнено условие (32). Тогда множество A', которое получается из $[A']_0^1$ добавлением точек вида $(i, x_2, \ldots, x_{k+1})$, является начальным отрезком в $L_{m,k+1}$ относительно того же порядка $<_3$. Выбрасыванием $|A'| - p$ старших точек из A' получаем оптимальный начальный отрезок.



Каждой точке из $L_{m,k}$ приписывается значение функционала f (см. рисунок для $k = 2$, $m = 4$). Для каждого множества $B \in L_{m,k}$ рассматриваем «усеченные» множества

$$B_c = \{\tilde{i} \in B \mid f(\tilde{i}) \geqslant c\}.$$

Положим $b_0 = |B_0| = r$ и $b_c = |B_c|$. Так как для начального отрезка D в $L_{m,k}$ (по порядку $<_3$) «усеченные» множества D_c являются начальными отрезками в $(L_{m,k})_c$ $(L_{m-c,k})$, имеем следующее. При фиксированной мощности $|B_c|$ величина $|B_{c+1}|$ является максимальной, если B — начальный отрезок (это вытекает из предположения индукции для $L_{m-c,k}$). Рассматривая начальный отрезок D и произвольное множество B такие, что $|D| = |B| = r$, последовательно заключаем, что $|D_1| \geqslant |B_1|$, $|D_2| \geqslant |B_2|, \ldots, |D_m| \geqslant |B_m|$. Следовательно,

$$f(D) = |D_1| + |D_2| + \cdots + |D_m| \geqslant |B_1| + |B_2| + \cdots + |B_m| = f(B),$$

т. е. в качестве $[A']_0^1$ можно взять начальный отрезок D. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Минимум величины $|[A]_1^0|$ по всем множествам $A \in L_{m,n}$ фиксированной мощности достигается на левом лексикографическом отрезке относительно обычного лексикографического порядка $\leqslant_4$ векторов из $L_{m,n}$.*

Доказательство. Покажем, что оптимальность порядка $\leqslant_4$ в задаче минимизации $|[A]_1^0|$ при $|A| = |L_{m,n}| - p$ вытекает из оптимальности порядка $<_3$ в задаче минимизации $|[A]_0^1|$ при $|A| = p$. Для любого множества $A \in \mathrm{L}_{m,n}$ рассматриваем множества $\bar{A} = L_{m,n} \setminus A$ и $A^* = \{\tilde{j} \in \mathrm{L}_{m,n} \mid \exists \tilde{i} = (i_1, \ldots, i_n) \in A$ такое, что $\tilde{j} = (m - i_n, \ldots, m - i_1)\}$. Ясно, что $\overline{A^*} = \bar{A}^*$.

Сначала убедимся, что множество A является решением для задачи минимизации $|[B]_0^1|$ при $|B| = p$ тогда и только тогда, когда множество $\bar{A}^*$ является решением для задачи минимизации $|[B]_1^0|$ при $|B| = |L_{m,n}| - p$.

Действительно, пусть A минимизирует $|B \cap [L_{m,n}]_0^1|$ по всем идеалам B мощности p. Тогда $\bar{A}$ максимизирует $|B \cap [L_{m,n}]_0^1|$ по всем верхним множествам B мощности $|L_{m,n} - p|$. Следовательно, $\bar{A}$ минимизирует $|B \cap (L_{m,n} \setminus [L_{m,n}]_0^1)|$ по всем верхним множествам B мощности $|L_{m,n} - p|$. Из этого, в свою очередь, вытекает, что $\bar{A}^*$ минимизирует величину $|B \cap (L_{m,n} \setminus [L_{m,n}]_0^1)^*| = |B \cap [L_{m,n}]_1^0| = |[B]_1^0|$ по всем идеалам B мощности $|L_{m,n} - p|$.

Теперь убедимся, что A является начальным отрезком относительно порядка $\leqslant_3$ тогда и только тогда, когда $\bar{A}^*$ является начальным отрезком относительно $\leqslant_4$. В самом деле, $\tilde{\alpha}^*(\tilde{\beta}^*)$ получается из $\tilde{\alpha}^* = (m - \tilde{\alpha}_n, \ldots, m - \tilde{\alpha})(\tilde{\beta}^* = (m - \tilde{\beta}_n, \ldots, m - \tilde{\beta}_1)$. Далее, $\tilde{\alpha} <_3 \tilde{\beta}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\alpha}^* >_4 \tilde{\beta}^*$. Поэтому следующие утверждения являются эквивалентными:

(a) A — начальный отрезок относительно порядка $<_3$;
(b) $A = \{\tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha} \leqslant_3 \tilde{\beta}\}$ для некоторой точки $\tilde{\beta}$;
(c) $\bar{A} = \{\tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha} >_3 \tilde{\beta}\}$ для некоторой точки $\tilde{\beta}$;
(d) $\bar{A}^* = \{\tilde{\alpha}^* \mid \tilde{\alpha}^* <_4 \tilde{\beta}^*\}$ для некоторой точки $\tilde{\beta}^*$;
(e) $\bar{A}^*$ — начальный отрезок относительно порядка $<_4$.

Итак, утверждения 1 и 2 доказаны. Из произвольности p и леммы 4 следует справедливость леммы 5.

Введем обозначения:

$$a_{s,t} = \min_{A:|A| \leqslant (1/2)|L_{m,n}|} \frac{|[A]_t^s|}{|A|} \quad \text{и} \quad l_{s,t} = \frac{|[L_{m,n}]_t^s|}{|L_{m,n}|} = \frac{\binom{d-s-t}{n-s}}{\binom{d}{n}}.$$

Утверждение 7. *При любых m и n для любого множества $A \subseteq L_{m,n}$ справедливо неравенство*

$$|[A]_t^s| / |A| \geqslant |[L_{m,n}]_t^s| / |L_{m,n}|, \quad \text{т. е.} \quad a_{s,t} \geqslant l_{s,t}.$$

Для доказательства этого утверждения нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 6. *При любых m и n для каждого множества $A \subseteq L_{m,n}$ выполнено соотношение*

$$\left|[A]_0^1\right| / |A| \geqslant \left|[L_{m,n}]_0^1\right| / |L_{m,n}| = n/(m+n), \quad \text{т. е.} \quad a_{1,0} \geqslant l_{1,0}.$$

Доказательство. Пространство $L_{m,n}$ распадается на слои $L_{m,n}^k$ относительно последней координаты i_n:

$$L_{m,n}^k = \{\tilde{i} \in L_{m,n} \mid i_n = k\} = \{\tilde{\gamma} \mid \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+k-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-k})\}. \tag{33}$$

Положим

$$I_r = \bigcup_{k=0}^{r} L_{m,n}^k = I(\tilde{\alpha})\Big|_{i(\tilde{\alpha})=(r,\ldots,r)} . \tag{34}$$

Из этих определений вытекают следующие равенства:

$$|L_{m,n}| = \binom{m+n}{n}, \quad \left|[L_{m,n}]_0^1\right| = \binom{m+n-1}{n-1}, \tag{35}$$

$$|L_{m,n}^k| = \binom{n+k-1}{k}, \quad \left|[L_{m,n}^k]_0^1\right| = \binom{n+k-2}{k}, \tag{36}$$

$$|I_r| = \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+r}{n}, \tag{37}$$

$$\left|[I_r]_0^1\right| = \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k-2}{k} = \binom{n+r-1}{n-1}. \tag{38}$$

По лемме 4 минимум $a_{1,0}$ достигается на начальном отрезке A относительно порядка $\leqslant_3$. Его можно представить в виде $A = I_{r-1} \cup (A \cap L_{m,n}^r)$. Положим $C = A \cap I_{r-1} = I_{r-1}$ и $D = A \cap L_{m,n}^r$. Тогда $A = C \cup D$, где $A \subseteq L_{m,n}$, $D \subset L_{m,n}^r$ и $L_{m,n}^r$ изоморфно $L_{r,n-1}$.

Утверждение доказывается индукцией по размерности n. При $n = 1$ и произвольном m для любого непустого нижнего множества A имеем $\left|[A]_0^1\right| = 1$. Поэтому $\left|[A]_0^1\right| / |A| = 1 / |A| \geqslant 1 / |L_{m,n}| = \left|[L_{m,n}]_0^1\right| / |L_{m,n}|$.

Допустим, что утверждение доказано для $n - 1$. Рассматриваем D как идеал в $L_{m,n}^r = L_{r,n-1}$. По предположению индукции имеем

$$\left|[D]_0^1\right| / |D| \geqslant \left|[L_{r,n-1}]_0^1\right| / |L_{r,n-1}| . \tag{39}$$

Нужно показать, что $\left|[A]_0^1\right| / |A| \geqslant n/(m+n)$. Имеем

$$\frac{\left|[A]_0^1\right|}{|A|} = \frac{\left|[C]_0^1\right| + \left|[D]_0^1\right|}{|C| + |D|} = \frac{\left|[C]_0^1\right|}{|C|} \cdot \frac{1 + \left|[D]_0^1\right| / \left|[C]_0^1\right|}{1 + |D| / |C|} = \frac{\left|[C]_0^1\right|}{|C|} \cdot \frac{1 + xy}{1 + x},$$

где $x = \frac{|D|}{|C|}$ и $y = \frac{|[D]_0^1|/|D|}{|[C]_0^1|/|C|}$. Поскольку $D \subset L^r_{m,n}$ и $L^r_{m,n}$ изоморфно $L_{r,n-1}$, имеем $x \leqslant x_0 = \frac{|L_{r,n-1}|}{|C|}$. Пользуясь этим фактом и (39), получаем

$$y \geqslant y_0 = \frac{|[L_{r,n-1}]_0^1|}{|L_{r,n-1}|} \cdot \frac{|C|}{|[C]_0^1|} = \frac{|[L_{r,n-2}]_0^1|}{|L_{r,n-1}|} \cdot \frac{|C|}{|[C]_0^1|}.$$

Если $y \geqslant 1$, то

$$|[D]_0^1| / |D| \geqslant |[C]_0^1|| / |C| = n/(n+r-1) \geqslant n/(n+m).$$

Отсюда следует, что

$$(|[C]_0^1| + |[D]_0^1|) / (|C| + |D|) \geqslant n/(n+m).$$

Если $y < 1$, то функция $f(x,y) = \frac{1+xy}{1+x} = 1 - (1-y)(1+\frac{1}{1+x})$ убывает по x и возрастает по y. Поэтому $f(x,y) \geqslant f(x_0, y_0)$. Следовательно,

$$\frac{|[C]_0^1| + |[D]_0^1|}{|C| + |D|} \geqslant \frac{|[C]_0^1|}{|C|} \cdot \frac{1 + \frac{|L_{r,n-1}|}{|C|} \cdot \frac{|L_{r,n-2}|}{|L_{r,n-1}|} \cdot \frac{|C|}{|[C]_0^1|}}{1 + \frac{|L_{r,n-1}|}{|C|}} = \frac{|[C]_0^1| + |L_{r,n-2}|}{|C| + |L_{r,n-1}|}.$$

Отсюда с использованием (35), (37) и (38) получаем, что

$$\frac{|[C]_0^1| + |[D]_0^1|}{|C| + |D|} \geqslant \frac{\binom{n+r-2}{n-1} + \binom{n+r-2}{n-2}}{\binom{n+r-1}{n} + \binom{n+r-1}{n-1}} = \frac{\binom{n+r-1}{n-1}}{\binom{n+r}{n}} = \frac{n}{n+r} \geqslant \frac{n}{n+m}.$$

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *При любых m и n для каждого множества $A \subseteq L_{m,n}$ справедливо неравенство*

$$|[A]_1^0| / |A| \geqslant |[L_{m,n}]_1^0| / |L_{m,n}| = n/(m+n), \quad \text{т. е.} \quad a_{0,1} \geqslant l_{0,1}.$$

Доказательство. Эта лемма доказывается аналогично лемме 12, причем рассматривается разбиение пространства $L_{m,n}$ на слои $\widehat{L}^k_{m,n}$ относительно первой координаты i_1:

$$\widehat{L}^k_{m,n} = \{\tilde{i} \in L_{m,n} \mid i_1 = k\} = \{\tilde{\gamma} \mid \tilde{\gamma} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, 1, \gamma_{k+2}, \ldots, \gamma_{m+n})\}. \quad (40)$$

Положим

$$\widehat{I}_r = \bigcup_{k=0}^{r} \widehat{L}^k_{m,n} = I(\tilde{\alpha})\,\big|_{i(\tilde{\alpha})=(r,m,\ldots,m)}\,. \quad (41)$$

Воспользуемся леммой 5 и следующими равенствами, которые вытекают из определений (40) и (41):

$$|\widehat{L}^k_{m,n}| = \binom{m+n-k-1}{n-1}, \quad |[\widehat{L}^k_{m,n}]_1^0| = \binom{m+n-k-2}{n-1}, \quad (42)$$

$$|\widehat{I}_r| = \sum_{k=0}^{r} \binom{m+n-k-1}{m-k} = \binom{m+n}{n} - \binom{m+n-r-1}{n}, \tag{43}$$

$$|[\widehat{I}_r]_0^1| = \sum_{k=0}^{r} \binom{m+n-k-2}{m-k-1} = \binom{m+n-1}{n} - \binom{m+n-r-2}{n}. \tag{44}$$

Заметим, что $[L]_t^s$ изоморфно $L_{m-t,n-s}$ и $[A]_t^s = [\ldots[[[\ldots[[A]_0^1]_0^1\ldots]_0^1]_1^0]_1^0\ldots]_1^0$. Дальнейшие рассуждения ведутся аналогично доказательству леммы 6.

Утверждение 7 доказывается индукцией по s и t. Из лемм 6 и 7 имеем $a_{1,0} \geqslant l_{1,0}$ и $a_{0,1} \geqslant l_{0,1}$. Учитывая, что $[A]_1^1 = [[A]_0^1]_1^0$, где $[A]_0^1 \subseteq L_{m,n-1}$, получаем

$$a_{1,1} = \min \frac{|[A]_1^1|}{|A|} \geqslant \min \frac{|[A]_0^1|}{|A|} \cdot \frac{|[L_{m,n-1}]_0^1|}{|L_{m,n-1}|} \geqslant \frac{|[L_{m,n}]_0^1|}{|L_{m,n}|} \cdot \frac{|[L_{m,n-1}]_0^1|}{|L_{m,n-1}|}$$
$$= \frac{|L_{m,n-1}|}{|L_{m,n}|} \cdot \frac{|[[L_{m,n}]_0^1]_1^0|}{|L_{m,n-1}|} = \frac{|[L_{m,n}]_1^1|}{|L_{m,n}|} = l_{1,1}.$$

Допустим, что неравенство $a_{s,t} \geqslant l_{s,t}$ уже доказано. Нужно показать, что $a_{s+1,t} \geqslant l_{s+1,t}$ и $a_{s,t+1} \geqslant l_{s,t+1}$. Учитывая, что $[A]_t^{s+1} = [[A]_t^s]_0^1$, где $[A]_t^s \subseteq L_{m-t,n-s}$, имеем

$$a_{s+1,t} = \min \frac{|[A]_t^{s+1}|}{|A|} \geqslant \min \frac{|[[A]_t^s]_0^1|}{|A|} \geqslant \min \frac{|[A]_t^s|}{|A|} \cdot \frac{|[L_{m-t,n-s}]_0^1|}{|L_{m-t,n-s}|}$$
$$\geqslant \frac{|[L_{m,n}]_t^s|}{|L_{m,n}|} \cdot \frac{|[L_{m,n}]_t^{s+1}|}{|L_{m-t,n-s}|} = l_{s+1,t}.$$

Аналогично доказывается неравенство $a_{s,t+1} \geqslant l_{s,t+1}$, при этом учитывается, что $[A]_{t+1}^s = [[A]_t^s]_1^0$. Утверждение 7 доказано.

Следующее утверждение является усилением леммы 11 для $a_{1,1}$.

Лемма 8. *Для среднего слоя справедливо неравенство* $a_{1,1}/l_{1,1} \geqslant 1 + \Omega(1/n)$.

Доказательство. Имеем

$$a_{1,1} = \min_{A \subseteq L_{m,n}} \frac{|[A]_1^1|}{|A|} = \min_{A \subseteq L_{m,n}} \frac{|[[A]_0^1]_1^0|}{|A|} = \min_{A \subseteq L_{m,n}} \frac{|[[A]_0^1]_1^0|}{|[A]_0^1|} \cdot \frac{|[A]_0^1|}{|A|}. \tag{45}$$

По лемме 4 минимум величины $|[A]_0^1|/|A|$ по всем множествам $A \subseteq L_{m,}n$ достигается на начальном лексикографическом отрезке относительно порядка $\leqslant_3$. Обозначим этот отрезок через A'. Тогда имеем $|A'| \leqslant \frac{1}{2}|L_{m,n}|$ и $|L_{m,n}^m| \leqslant \frac{1}{2}|L_{m,n}|$. Поэтому $A' \subseteq L_{m-1,n}$ и, следовательно, $[A']_0^1 \subseteq L_{m-1,n-1}$. Отсюда в силу леммы 4 следует, что

$$\frac{|[A]_0^1|}{|A|} \geqslant \frac{|[A']_0^1|}{|A'|} \geqslant \frac{|[L_{m-1,n}]_0^1|}{|L_{m-1,n}|} = \frac{|L_{m-1,n-1}|}{|L_{m-1,n}|} = \frac{n}{m+n-1}. \tag{46}$$

Обозначим $B = [A]_1^0 \subseteq L_{m,n-1}$. Тогда по лемме 4

$$\frac{|[B]_1^0|}{|B|} \geqslant \frac{|[L_{m,n-1}]_1^0|}{|L_{m,n-1}|} = \frac{|L_{m-1,n-1}|}{|L_{m,n-1}|} = \frac{m}{m+n-1}. \tag{47}$$

Подставляя (46) и (47) в уравнение (45), получаем $a_{1,1} \geqslant \frac{mn}{(m+n-1)^2}$. Учитывая, что $l_{1,1} \geqslant \frac{mn}{(m+n)(m+n-1)}$ и $m \leqslant n+1$, получаем

$$\frac{a_{1,1}}{l_{1,1}} \geqslant \frac{m+n}{m+n-1} = 1 + \frac{1}{m+n-1} = 1 + \Omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Лемма 8 доказана.

В следующей лемме устанавливается связь между задачей минимизации $|[A]_1^1|$ и исходной задачей минимизации граничного функционала.

Лемма 9. 1. *Если* $n = \lfloor n/2 \rfloor$ *и* $a_{1,1}/l_{1,1} \geqslant 1 + \Omega(1/n)$, *то* $\varphi(d,n) \geqslant \Omega(1/n)$.

2. *Если* $n = \lfloor n/2 \rfloor$ *и* $a_{1,1}/l_{1,1} \geqslant 1 + \Omega(1/\sqrt{n})$, *то* $\varphi(d,n) \geqslant \Omega(1/\sqrt{n})$.

Доказательство. Оба утверждения доказываются аналогично. Приведем доказательство второго утверждения. По теореме 7

$$\varphi(d,n) = \min_{A:|A|\leqslant(1/2)|L_{m,n}|}\left(\frac{|\Delta(A)|}{|A|} - 1\right)$$
$$= \min_{A:|A|\leqslant(1/2)|L_{m,n}|}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\frac{|[A]_t^s|}{|A|} + \frac{1}{|A|} - 1\right) \geqslant \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m} a_{s,t} + \frac{1}{|L_{m,n}|} - 1.$$

Поскольку

$$1 = \frac{\Delta(L_{m,n})}{|L_{m,n}|} = \frac{1 + \sum_{s,t}|[A]_t^s|}{|L_{m,n}|} = \frac{1}{|L_{m,n}|} + \sum_{s,t} l_{s,t},$$

имеем

$$\sum_{s,t} l_{s,t} = 1 - \frac{1}{|L_{m,n}|}.$$

Для среднего слоя

$$l_{1,1} = \frac{|[L_{m,n}]_1^1|}{|L_{m,n}|} = \binom{d-2}{n-1} \Big/ \left(\binom{d}{n}\frac{n(d-n)}{d(d-1)}\right) \geqslant \frac{1}{4}.$$

Тогда

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m} a_{s,t} \geqslant l_{1,1}\Omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m} l_{s,t} \geqslant \frac{1}{4}\Omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + 1 - \frac{1}{|L_{m,n}|}.$$

Отсюда получаем $\varphi(d,n) \geqslant \Omega(1/\sqrt{n})$ при $n = \lfloor d/2 \rfloor$. Лемма 9 доказана.

Из лемм 8 и 9 непосредственно вытекает

Теорема 11. *Если* $n = \lfloor d/2 \rfloor$, *то* $\varphi(d,n) \geqslant \Omega(1/n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kruskal J. B.** The number of simplices in a complex // Mathematical Optimization Techniques. Berkeley: Univ. of California Press, 1963. P. 251–278.
2. **Katona G.** A theorem of finite sets // Theory of Graphs. Budapest: Akad. Kiado, 1968. P. 187–207.
3. **Harper L. H.** On a problem of Kleitman and West // Discrete Math. 1991. V. 93, N 2–3. P. 169–182.
4. **Коршунов А. Д.** О числе монотонных булевых функций // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1981. Вып. 38. С. 5–108.
5. **Сапоженко А. А.** Метод граничных функционалов в перечислительных изопериметрических задачах: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1992.
6. **Harper L. H.** Stabilization and the edgesum problem // Ars Combin. 1977. V. 4. P. 225–270.
7. **Лист Б.** Вершинный вариант задачи Клейтмана — Веста: Дипломная работа. М.: МГУ, 1994.
8. **Сапоженко А. А.** О числе антицепей в многослойных ранжированных множествах // Дискретная математика. 1989. Т. 1, вып. 2. С. 110–128.

Адрес автора:

B. LIST
Abteilung Informationstechnik,
Universität Ulm,
Albert-Einstein-Allee, 43,
D–89081 Ulm,
Germany

Статья поступила
28 сентября 1994 г.