ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1995. Том 2, № 3, 49–67

УДК 519.176

ОПЕРАЦИИ И ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЛОЖЕНИЯ ГРАФОВ, СВЯЗАННЫЕ СО СВОЙСТВОМ ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕТРИКИ*)

Т. И. Федоряева

В работе [1] введено свойство продолжения метрики (СПМ) для дискретных метрических пространств и указаны связи СПМ и метрических свойств локально-изометрических вложений. В данной работе продолжено изучение СПМ для конечных графов [1–5]. Рассмотрены инвариантные относительно СПМ операции и изометрические вложения, применение которых упрощает исследование СПМ для классов графов. Доказана теорема об изометричном вложении с сохранением СПМ произвольного графа в подходящий граф заданной связности и показано, что задачи описания классов связных, связности n и n-связных графов с СПМ эквивалентны. Для графов малой связности в [3, 5], а также в настоящей работе получена полная характеризация естественных классов таких графов с СПМ. Приведены условия инвариантности СПМ для операции соединения и описаны полные n-дольные графы с СПМ. Построено изометричное вложение произвольного графа диаметра 2 в подходящий граф с СПМ. Описаны кактусы с СПМ, что обобщает полученное ранее автором в [3. 4] описание деревьев и унициклических графов, удовлетворяющих СПМ.

Введение

В настоящей работе рассматривается свойство продолжения метрики (СПМ) для конечных обыкновенных графов с обычным расстоянием между вершинами.

Определение 1. Две вершины связного графа G удовлетворяют СПМ, если они принадлежат некоторой диаметральной цепи графа G. Граф удовлетворяет СПМ, если любые две его вершины удовлетворяют СПМ.

В дальнейшем для произвольного класса графов W через W^* будем обозначать класс всех графов из W, удовлетворяющих СПМ.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-01484).

Пусть $\kappa(G)$ — связность графа G (т. е. наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу) и W_n — класс всех графов G связности $\kappa(G) = n$, $n \geqslant 1$. Тогда $\bigcup\limits_{i\geqslant 1} W_i$ — класс всех связных графов, $\bigcup\limits_{i\geqslant n} W_i$ — класс всех n-связных графов, и получаем следующую цепочку включений (строгость включений следует, например, из того, что граф $K_{n+1} \in W_n^* \setminus W_{n+1}^*$):

$$\bigcup_{i\geqslant 1} W_i^* \supset \ldots \supset \bigcup_{i\geqslant n} W_i^* \supset \bigcup_{i\geqslant n+1} W_i^* \supset \ldots .$$

Принадлежность графа G классу W_n^* накладывает ряд определенных метрических ограничений на G, помогающих описанию графов с СПМ. Так, например, наличие висячих вершин в G приводит к тому, что расстояние между ними равно диаметру графа G. Причем это свойство является определяющим для описания СПМ в классе деревьев [4] и играет важную роль при описании унициклических графов с СПМ [3]. И в общем случае наличие «узких мест» — точек сочленения и мостов в графе G (т. е. принадлежность G классу W_1), как будет показано в § 3 настоящей работы, приводит к ограничениям на G, позволяющим, в частности, описать кактусы с СПМ. В случае графов из класса W_2^* также использовались метрические ограничения, например для характеризации внешнепланарных графов с СПМ (см. [5]).

В настоящей работе мы докажем, что задачи описания классов

$$\bigcup_{i\geqslant 1} W_i^*, \quad \bigcup_{i\geqslant n} W_i^*, \quad W_n^*, \quad n \geqslant 1,$$

эквивалентны в том смысле, что описание любого из этих классов дает описание каждого оставшегося (формальное определение дано в § 2). Для этого в § 2 определена операция, строящая по любому графу G новый граф H заданной связности $n \geqslant 1$ с сохранением СПМ и метрики графа G. Точнее, доказана

Теорема 1. *Для любого $n \geqslant 1$ существует изометричное вложение произвольного графа G в подходящий граф H связности n такой, что G удовлетворяет* СПМ *тогда и только тогда, когда H удовлетворяет* СПМ, *причем $d(H) = 2d(G) + 1$.*

Из этой теоремы выведено

Следствие 1. *Задачи описания классов $\bigcup\limits_{i\geqslant 1} W_i^*$, $\bigcup\limits_{i\geqslant n} W_i^*$ и W_n^*, $n \geqslant 1$, эквивалентны.*

Известно (см., например, [7]), что почти все графы имеют диаметр 2. Кроме того, в [2] показано, что почти все графы удовлетворяют СПМ и имеют диаметр 2. В § 2 настоящей работы приводится способ построения из произвольного графа диаметра 2 нового графа, удовлетворяющего СПМ, с сохранением исходной метрики и диаметра (теорема 3).

В § 1 исследуются вопросы сохранения СПМ операциями декартова произведения и соединения графов, первая из которых используется в доказательстве теоремы 1, а вторая — для определения простых операций, позволяющих из исходных графов получать новые графы с сохранением СПМ, а также для описания полных n-дольных графов с СПМ. В § 2 приводятся конструкции изометрических вложений. Доказывается теорема 1, следствие 1 и теорема 3. В § 3 для графов класса W_1 определяется операция, позволяющая с сохранением СПМ получать новые графы этого класса и «разбирать» их до более простых графов из W_1. С использованием этой операции описываются кактусы, удовлетворяющие СПМ (теорема 4).

В работе используются общепринятые понятия и обозначения теории графов [6–8]. Рассматриваются конечные обыкновенные графы, которые являются связными, если не оговорено особо.

Для графа G обозначим через

$V(G)$ — множество вершин,

$E(G)$ — множество ребер,

$\rho_G(x,y)$ — обычное расстояние между вершинами x и y,

$d(G)$ — диаметр,

$e_G(x)$ — эксцентриситет вершины x,

$S^1_G(x)$ — шар радиуса 1 с центром в вершине x,

xy — ребро с концами x, y.

Как обычно, K_n обозначает полный n-вершинный граф, $K(p_1,\dots, p_n)$ — полный n-дольный граф, $G \cup H$ — объединение графов G и H. Кратчайшую цепь P с концами u_1, u_n такую, что

$$u_2,\dots,u_{n-1} \in V(P), \quad \sum_{i=1}^{n-1} \rho_G(u_i,u_{i+1}) = \rho_G(u_1,u_n)$$

(причем не обязательно $u_i \neq u_{i+1}$), обозначим через $(u_1,u_2,\dots,u_n)$.

Пусть G, H — графы. Отображение $f : V(G) \to V(H)$ называется *изометричным вложением* G в H, если $\rho_G(x,y) = \rho_H(f(x),f(y))$ для любых вершин $x,y \in V(G)$. При этом будем говорить, что граф G *изометрично вкладывается* в граф H. Подграф G графа H называется *изометричным*, если для любых двух вершин $x,y \in V(G)$ выполняется равенство $\rho_G(x,y) = \rho_H(x,y)$.

§ 1. Операции соединения и декартова произведения

В этом параграфе исследуются условия инвариантности СПМ относительно операций соединения и декартова произведения графов. Пусть G, H — графы, не имеющие общих вершин. *Соединением графов* G и H называется граф $G + H$ такой, что

$$V(G+H) = V(G) \cup V(H),$$
$$E(G+H) = E(G) \cup E(H) \cup \{gh \mid g \in V(G), h \in V(H)\}.$$

Очевидно, что если G и H — произвольные графы, не обязательно связные, то $G + H$ — связный граф.

Отметим некоторые метрические свойства операции $G + H$. Предварительно введем определения.

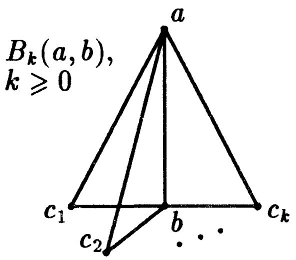


Рис. 1

Граф, изображенный на рис. 1, называется *воланом на вершинах* a, b. Будем говорить, что *граф* G *имеет волан*, если в G есть подграф $B_k(a,b)$, где $a, b \in V(G)$ и $\deg_G a = \deg_G b = k + 1$. Другими словами, в графе G совпадают шары радиуса 1 с центрами в вершинах a и b.

Непосредственно из определений вытекает следующее

Замечание 1. Если граф G диаметра $d(G) \geqslant 2$ удовлетворяет СПМ, то G не имеет волана, причем при $d(G) = 2$ верно и обратное.

Обозначим через $\eta(g,h)$ длину самой длинной кратчайшей цепи графа $G + H$, содержащей вершины $g, h \in V(G + H)$. Непосредственно из определения $G + H$ вытекает

Лемма 1. *Пусть G, H — графы, не имеющие общих вершин, и G_i, H_j — компоненты связности графов G, H соответственно, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Тогда*

1. *$d(G+H) \leqslant 2$, причем $d(G+H) = 1$ тогда и только тогда, когда G, H — полные графы.*
2. *Если $g_1 \in V(G_i)$, $g_2 \in V(G_s)$, $i \neq s$, то $\eta(g_1, g_2) = 2$.*
3. *Если $g_1, g_2 \in V(G_i)$, $g_1 \neq g_2$, то*

$$\eta(g_1,g_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } G_i \text{ имеет волан на вершинах } g_1, g_2, \\ 2 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

4. *Если $g \in V(G_i)$, $h \in V(H_j)$, то*

$$\eta(g_1,g_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } S^1_G(g) = V(G) \text{ и } S^1_H(h) = V(H), \\ 2 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь выясним, когда граф $G + H$ удовлетворяет СПМ.

Теорема 2. *Пусть G, H — графы, не имеющие общих вершин (не обязательно связные). Тогда граф $G + H$ удовлетворяет* СПМ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(i) *G, H — полные графы;*

(ii) *хотя бы один из графов G, H неодновершинный и не представим в виде $K_1 + F$ (где F — не обязательно связный граф) и каждая компонента связности в графах G, H не имеет волана.*

Доказательство. Пусть $G + H$ удовлетворяет СПМ. Будем считать, что $d(G + H) = 2$ (иначе по п. 1 леммы 1 выполнено условие (i)). Тогда по п. 4 леммы 1 хотя бы один из графов G, H неодновершинный и не представим в виде $K_1 + F$, а в силу п. 3 леммы 1 каждая компонента связности графов G, H не имеет волана.

Покажем обратное. Если выполнено (i), то $G + H$ — полный граф. Пусть выполнено (ii). Тогда по лемме 1 $d(G + H) = 2$ и $\eta(g_1, g_2) = d(G + H)$ для любых вершин $g_1, g_2 \in V(G + H)$, т. е. $G + H$ удовлетворяет СПМ. Теорема 2 доказана.

Теперь определим одну простую операцию, позволяющую из графов, удовлетворяющих СПМ, получить новый граф, который также будет удовлетворять СПМ.

Следствие 2. *Пусть G_i и H_j, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $n + m \geqslant 3$, — графы диаметра не менее двух, попарно не имеющие общих вершин. Если все графы G_i, H_j удовлетворяют* СПМ, *то граф $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i\right) + \left(\bigcup\limits_{j=1}^{m} H_j\right)$ удовлетворяет* СПМ.

Справедливость следствия 2 непосредственно вытекает из теоремы 2 и замечания 1.

Замечание 2. Для графов G_i, H_j диаметра $d \geqslant 3$ утверждение, обратное следствию 2, вообще говоря, несправедливо.

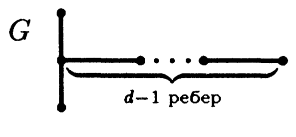


Рис. 2

Действительно, граф G, изображенный на рис. 2, не имеет волана и не удовлетворяет СПМ. Но граф $G + (H_1 \cup H_2)$, ввиду теоремы 2, удовлетворяет СПМ, где H_1, H_2 — произвольные графы диаметра d, не имеющие общих вершин и удовлетворяющие СПМ (например, H_i — цепь).

Однако указанная в следствии 2 операция сохраняет СПМ на классе графов диаметра 2. Из теоремы 2 и замечания 1 получаем

Следствие 3. *Пусть G_i, H_j, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $n + m \geqslant 3$, — связные графы диаметра 2, попарно не имеющие общих вершин. Тогда граф $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i\right) + \left(\bigcup\limits_{j=1}^{m} H_j\right)$ удовлетворяет* СПМ *тогда и только тогда, когда все графы G_i, H_j удовлетворяют* СПМ.

Теорема 2 позволяет также легко охарактеризовать полные n-дольные графы $K(p_1,p_2,\dots,p_n) = \overline{K}_{p_1} + \overline{K}_{p_2} + \dots + \overline{K}_{p_n}$, удовлетворяющие СПМ.

Следствие 4. *Полный n-дольный граф $K(p_1,\dots,p_n)$ удовлетворяет* СПМ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $p_i = 1$ *при каждом* $i = 1,2,\dots,n$;
2) $p_i \neq 1$ *при каждом* $i = 1,2,\dots,n$ *и* $n \geqslant 2$;
3) $p_i = 1$ *для некоторого* i *и* $p_j \neq 1$ *при* $j \neq i$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Доказательство. Пусть $K(p_1,\dots,p_n)$ удовлетворяет СПМ, и предположим, что условия 1, 2, 3 не выполнены. Тогда существуют различные i, j, k такие, что $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$, $p_i = p_j = 1$, $p_k \neq 1$. Ввиду коммутативности и ассоциативности операции соединения $K(p_1,\dots,p_n) = K_1 + (K_1 + F)$, где F — граф, который не является полным. Пришли к противоречию с теоремой 2.

Обратное утверждение следует из теоремы 2, замечания 1 и того факта, что граф $\overline{K}_{p_i}$, $p_i \neq 1$, не имеет волана, неодновершинный и не представим в виде $K_1 + F$. Следствие 4 доказано.

Рассмотрим операцию декартова произведения. Декартово произведение $G \times H$ графов G и H — это граф с

$$V(G \times H) = \{\langle x,y\rangle \mid x \in V(G), y \in V(H)\};$$

$$E(G \times H) = \{\langle x_1,y_1\rangle\langle x_2,y_2\rangle \mid (x_1 = x_2 \text{ и } y_1y_2 \in E(H)) \text{ или } (y_1 = y_2 \text{ и } x_1x_2 \in E(G))\},$$

причем $\rho_{G\times H}(\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle) = \rho_G(x_1,x_2) + \rho_H(y_1,y_2)$.

Предложение 1. *Граф $G \times H$ удовлетворяет* СПМ *тогда и только тогда, когда графы G, H удовлетворяют* СПМ.

Доказательство. Пусть $G \times H$ удовлетворяет СПМ. Предположим, например, что G не удовлетворяет СПМ. Тогда существуют x_1, $x_2 \in V(G)$ такие, что $\rho_G(x_1,x_2) < d(G)$ и нет кратчайшей цепи в графе G, содержащей x_1, x_2, длины больше, чем $\rho_G(x_1,x_2)$. Рассмотрим $y_1, y_2 \in V(H)$ такие, что $\rho_H(y_1,y_2) = d(H)$. В силу выбора вершин x_1, x_2 и соотношения $\rho_{G\times H}(\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle) = \rho_G(x_1,x_2) + d(H) < d(G \times H)$ пара $\langle x_1,y_1\rangle$, $\langle x_2,y_2\rangle$ не удовлетворяет СПМ. Пришли к противоречию. Значит, граф G (аналогично граф H) удовлетворяет СПМ.

Обратное утверждение следует из [1, лемма 1.1]. Предложение 1 доказано.

В следствии 5 показано, как с сохранением СПМ изометрично вложить произвольный граф G в граф H с большей связностью $\kappa(H) \geqslant \kappa(G)$.

Следствие 5. *Для любого $n \geqslant 1$ существует изометричное вложение произвольного графа G в подходящий n-связный граф H такой, что G удовлетворяет* СПМ *тогда и только тогда, когда H удовлетворяет* СПМ, *причем $d(H) = d(G) + 1$.*

Доказательство. Поскольку $\kappa(K_{n+1}) = n$ и $d(K_{n+1}) = 1$, можно считать, что G — неодновершинный граф. Положим $H = G \times K_n$. Очевидно, что G изометрично вкладывается в H. Ввиду предложения 1 остается показать, что $\kappa(H) \geqslant n$. Действительно, используя вид K_n и нетривиальность G, нетрудно построить n вершинно-непересекающихся цепей в H, соединяющих две произвольные вершины графа H. Тем самым по известному критерию n-связности [8, теорема 5.10] $\kappa(H) \geqslant n$. Следствие 5 доказано.

§ 2. Изометрические вложения

Пусть M_1, M_2 — классы графов. Будем говорить, что задача описания класса M_1^* *сводится* к задаче описания класса M_2^*, если существует операция $\varphi : M_1 \to M_2$ такая, что для любого $G \in M_1$

— граф G изометрично вкладывается в граф $\varphi(G)$,

— $G \in M_1^* \iff \varphi(G) \in M_2^*$.

Задачи описания классов M_1^*, M_2^* *эквивалентны*, если каждая из них сводится к другой.

Для доказательства эквивалентности классов графов

$$\cup_{i\geqslant 1} W_i^*, \quad \cup_{i\geqslant n} W_i^*, \quad W_n^*, \quad n \geqslant 1,$$

нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

По произвольному графу G индуктивно определим графы $H_1, H_2, \ldots$. Пусть $G_1, G_2, \ldots$ суть копии графа G с попарно непересекающимися вершинами. Обозначим через x^i вершину графа G_i, соответствующую $x \in V(G)$, и положим (рис. 3)

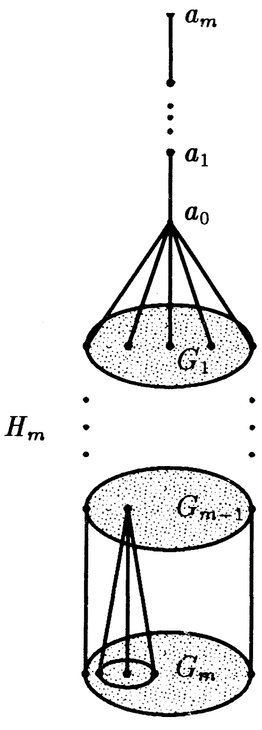


Рис. 3

$$V(H_1) = V(G_1) \cup \{a_0, a_1\}, \text{ где } a_0, a_1 \notin V(G_1);$$

$$E(H_1) = E(G_1) \cup \{a_0 a_1\} \cup \{a_0 x \mid x \in V(G_1)\};$$

$$V(H_{i+1}) = V(H_i) \cup V(G_{i+1}) \cup \{a_{i+1}\},$$

где $a_{i+1} \notin V(H_i) \cup V(G_{i+1})$;

$$E(H_{i+1}) = E(H_i) \cup E(G_{i+1}) \cup \{a_i a_{i+1}\}$$

$$\cup \{x^i y^{i+1} \mid x, y \in V(G), y \in S_G^1(x)\}.$$

Нам потребуются свойства графа H_m, сформулированные в следующей лемме. Для краткости через ρ_m обозначим метрику ρ_{H_m} и будем использовать обозначение x^i без указания, что $x \in V(G)$.

Лемма 2 (свойства графа H_m). *Пусть* $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant m$. *Тогда*

1. *В* H_m *существует простая цепь длины* $i+j$, *соединяющая вершины* x^i, y^j *и проходящая через вершины* x^1, a_0, y^1.

2. *Если в графе* G *существует простая цепь длины* n, *соединяющая вершины* x, y *и* $i \geqslant n+1$, *то в* H_m *существует простая цепь длины* n, *соединяющая вершины* x^i, y^{i-n} (рис. 4, а).

3. *Если* $\rho_G(x,y) \leqslant i-j$, *то в* H_m *существует простая цепь* P *длины* $i-j$, *соединяющая* x^i, y^j *и проходящая через* y^{i-s}, *причем* $\rho_P(x^i, y^{i-s}) = \rho_G(x,y)$. *Здесь* $s = \rho_G(x,y)$ (рис. 4, б).

4. *Если* $\rho_G(x,y) \geqslant i-j$, *то в* H_m *существует простая цепь* P *длины* $\rho_G(x,y)$, *соединяющая* x^i, y^j *и проходящая через* z^j, *причем* $\rho_P(x^i, z^j) = \rho_G(x,z)$ *и* $\rho_P(z^j, y^j) = \rho_G(z,y)$. *Здесь* (x,z,y) — *произвольная кратчайшая цепь в* G *и* $\rho_G(x,z) = i-j$ (рис. 4, в).

5. *Если в* H_m *существует кратчайшая цепь* $(x^i, z_1^{i+1}, z_2^{i+1}, \ldots, z_s^{i+1}, y^i)$, *где* $\rho_m(x^i, z_1^{i+1}) = \rho_m(z_s^{i+1}, y^i) = \rho_m(z_r^{i+1}, z_{r+1}^{i+1}) = 1$, $1 \leqslant r \leqslant s-1$, *то в* H_m *существует кратчайшая цепь, соединяющая* x^i, y^i *и лежащая в* G_i.

6. *Если в* H_m *существует кратчайшая цепь* $(x^{i+1}, z_1^i, z_2^i, \ldots, z_s^i, y^{i+1})$, *где* $\rho_m(x^{i+1}, z_1^i) = \rho_m(z_s^i, y^{i+1}) = \rho_m(z_r^i, z_{r+1}^i) = 1$, $1 \leqslant r \leqslant s-1$, *то в* H_m *существует кратчайшая цепь, соединяющая* x^{i+1}, y^{i+1} *и лежащая в* G_{i+1}.

7. *В* H_m *не существует кратчайшей цепи* (x^i, y^i, z^{r+1}, z^r) *такой, что* $\rho_G(x,y) = 1$, $\rho_m(y^i, z^{r+1}) = \rho_G(y,z) = i-(r+1) \geqslant 0$.

8. *Пусть в* H_m *существует кратчайшая цепь* $(x_0^i, \ldots, x_s^i, y_0^j, \ldots, y_r^j)$, *где* $\rho_m(x_s^i, y_0^j) = \rho_G(x_s, y_0) = i-j$, $\rho_m(x_t^i, x_{t+1}^i) = 1$, $\rho_m(y_l^j, y_{l+1}^j) = 1$, $0 \leqslant t \leqslant s-1$, $0 \leqslant l \leqslant r-1$ (рис. 4, г). *Тогда* $\rho_m(x_0^i, y_r^j) = \rho_G(x_0, y_r)$ *и в* G *существует кратчайшая цепь* $(x_0, \ldots, x_s, y_0, \ldots, y_r)$.

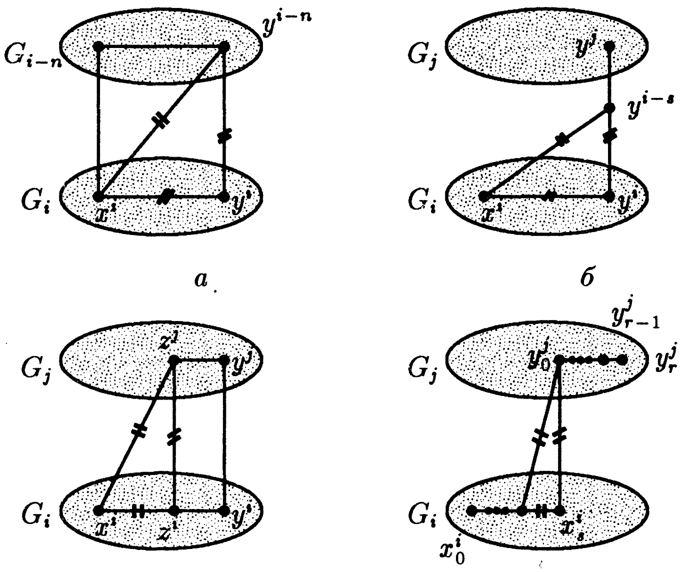
Доказательство. Свойства 1 и 2 непосредственно следуют из определения графа H_m, а свойства 3 и 4 — из свойства 2 и построения H_m.

Докажем свойство 5. Из определения H_m следует, что $z_1^i \in S^1_{G_i}(x^i)$, $z_s^i \in S^1_{G_i}(y^i)$. Поэтому цепь $P = (x^i, z_1^i, z_2^i, \ldots, z_s^i, y^i)$ в G_i не длиннее кратчайшей цепи в графе H_m, соединяющей x^i и y^i. Поэтому P — кратчайшая цепь.

Свойство 6 устанавливается аналогично свойству 5.

Докажем свойство 7. Предположим, что в H_m есть указанная кратчайшая цепь. Тогда $\rho_G(x,z) \leqslant i-r$ и по свойству 3 $\rho_m(x^i, z^r) \leqslant i-r$. С другой стороны, по предположению имеем $\rho_m(x^i, z^r) = i-r+1$, противоречие.

Докажем свойство 8 индукцией по $r+s \geqslant 0$. При $r+s=0$ это свойство следует из условия. Теперь будем считать, что $r>0$ (случай $s>0$ аналогичен). По индукционному предположению $\rho_G(x_0, y_{r-1}) = \rho_m(x_0^i, y_{r-1}^j)$ и в G есть кратчайшая цепь $(x_0, \ldots, x_s, y_0, \ldots, y_{r-1})$. Осталось показать, что $\rho_G(x_0, y_r) = \rho_G(x_0, y_{r-1}) + 1$. Предположим, что это



а *б* *в* *г*

Рис. 4

не так, т. е.

$$\rho_G(x_0, y_r) \leqslant \rho_m(x_0^i, y_{r-1}^j). \tag{1}$$

Пусть $\beta = \min\{\rho_G(x_0, y_r), i-j\}$. Выберем вершину $z \in V(G)$ такую, что

$$\rho_G(x_0, z) + \rho_G(z, y_r) = \rho_G(x_0, y_r), \quad \rho_G(z, y_r) = \beta \leqslant i - j. \tag{2}$$

Используя свойство 3, получаем $\rho_m(x_0^i, y_r^j) \leqslant \rho_m(x_0^i, z^i) + \rho_m(z^i, y_r^j) \leqslant \rho_G(x_0, z) + i - j = \rho_G(x_0, y_r) + i - j - \beta$. Поэтому если $\beta = i - j$, то в силу (1) $\rho_m(x_0^i, y_r^j) \leqslant \rho_m(x_0^i, y_{r-1}^j)$, а если $\beta \neq i - j$, то $\rho_m(x_0^i, y_r^j) = i - j = \rho_m(x_s^i, y_0^j) \leqslant \rho_m(x_0^i, y_{r-1}^j)$. Таким образом, пришли к противоречию с тем, что $(x_0^i, y_{r-1}^j, y_r^j)$ — кратчайшая цепь. Лемма 2 доказана.

Лемма 3 (метрика графа H_m). *Пусть $x, y \in V(G)$, $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant m$. Тогда*

$$\rho_m(x^i, y^j) = \begin{cases} i - j, & \text{если } \rho_G(x, y) \leqslant i - j, \\ \rho_G(x, y), & \text{если } i - j < \rho_G(x, y) \leqslant i + j, \\ i + j, & \text{если } i + j < \rho_G(x, y); \end{cases}$$

$$\rho_m(x^i, a_s) = i + s, \quad 0 \leqslant s \leqslant m.$$

Доказательство. Сначала заметим, что H_{m-1} — изометричный подграф графа H_m. Действительно, пусть r и l таковы, что $1 \leqslant r \leqslant l \leqslant$

$m-1$, и пусть P — кратчайшая цепь в графе H_m, соединяющая x^r с y^l. Тогда $V(P) \subseteq V(H_{m-1}) \cup V(G_m)$. По свойству 5 любую кратчайшую подцепь цепи P вида $(u^{m-1}, z_1^m, z_2^m, v^{m-1})$ можно заменить на кратчайшую цепь, соединяющую u^{m-1} с v^{m-1} и лежащую в G_{m-1}. Поэтому $\rho_m(x^r, y^l) = \rho_{m-1}(x^r, y^l)$, где $0 \leqslant k \leqslant m-1$.

Теперь проведем доказательство индукцией по $m \geqslant 1$. При $m = 1$ требуемые значения метрики ρ_m очевидно следуют из определения H_1.

Пусть $m \geqslant 2$. Так как H_{m-1} — изометричный подграф H_m, то необходимо рассмотреть только следующие случаи:

1) $i = j = m$;

2) $i = m, \quad j \leqslant m-1$;

3) $i = m, \quad 0 \leqslant s \leqslant m$.

Случай 1. По свойству 1

$$\rho_m(x^m, y^m) \leqslant 2m. \tag{3}$$

Поэтому можно считать, что

$$\rho_m(x^m, y^m) < \rho_G(x, y) \tag{4}$$

(иначе имеем $\rho_m(x^m, y^m) = \rho_G(x, y)$). Тогда в H_m есть кратчайшая цепь $(x^m, u^m, z_1^{m-1}, z_2^{m-1}, v^m, y^m)$ такая, что $\rho_m(x^m, u^m) = \rho_G(x, u)$, $\rho_m(v^m, y^m) = \rho_G(v, y)$, $u \in S_G^1(z_1)$, $v \in S_G^1(z_2)$. В силу изометричности H_{m-1} и по индукционному предположению

$$\rho_m(z_1^{m-1}, z_2^{m-1}) = \min\{2(m-1), \rho_G(z_1, z_2)\}.$$

Тогда, учитывая (4) и свойство 6, получаем

$$\rho_m(x^m, y^m) \geqslant \rho_m(z_1^{m-1}, z_2^{m-1}) + 2 = 2m.$$

Поэтому из (3) и (4) следует, что $\rho_m(x^m, y^m) = 2m < \rho_G(x, y)$.

Случай 2. В H_m есть кратчайшая цепь

$$(x^m, v^m, u^{m-1}, y^j), \ \rho_m(v^m, u^{m-1}) = 1, \quad \rho_m(x^m, v^m) = \rho_G(x, v). \tag{5}$$

По индукционному предположению и изометричности H_{m-1} возможны следующие три подслучая.

2.1. $\rho_m(u^{m-1}, y^j) = m-1+j < \rho_G(u, y)$. В этом случае из (5) следует, что $\rho_m(x^m, y^j) \geqslant \rho_m(u^{m-1}, y^j) + 1 = m + j$, по свойству 1 $\rho_m(x^m, y^j) = m + j$, а по свойству 3 $\rho_G(x, y) > m - j$. Тогда по свойству 4 $m + j = \rho_m(x^m, y^j) \leqslant \rho_G(x, y)$.

2.2. $m - 1 - j < \rho_m(u^{m-1}, y^j) = \rho_G(u, y) \leqslant m - 1 + j$. Тогда в силу свойства 4 в H_m есть кратчайшая цепь (u^{m-1}, z^j, w^j, y^j), где (u, z, w, y) — кратчайшая цепь в G и $\rho_m(u^{m-1}, z^j) = \rho_G(u, z) = m - 1 - j$, $\rho_m(z^j, y^j) = \rho_G(z, y)$, $\rho_G(z, w) = 1$. Тогда, учитывая (5), получаем

$$\rho_m(v^m, z^j) = \rho_m(v^m, u^{m-1}) + \rho_m(u^{m-1}, z^j) = m - j, \quad \rho_G(v, z) \leqslant m - j. \tag{6}$$

Из (6) по свойству 3 в H_m есть кратчайшая цепь

$$(v^m, z^{m-s}, z^j),\ \rho_m(v^m, z^{m-s}) = \rho_G(v, z) = s. \tag{7}$$

Таким образом, в H_m имеем кратчайшую цепь $(x^m, v^m, z^{m-s}, z^j, w^j, y^j)$. Кроме того, $\rho_G(z, w) = 1$ и в H_m есть ребро $z^{j+1}w^j$, поэтому $m - s = j$. Из (7) и свойства 8 получаем, что $\rho_m(x^m, y^j) = \rho_G(x, y)$, и (x, v, z, y) — кратчайшая цепь в G. Кроме того, из (7) следует, что $\rho_G(x, y) \geqslant m - j$, а в силу свойства 1 $\rho_G(x, y) = \rho_m(x^m, y^j) \leqslant m + j$.

2.3. $\rho_m(u^{m-1}, y^j) = m - 1 - j \geqslant \rho_G(u, y)$. В этом случае из (5) следует, что $\rho_m(v^m, y^j) = m - j$, $\rho_G(v, y) \leqslant m - j$. По свойству 3 в H_m есть кратчайшая цепь (v^m, y^{m-s}, y^j), где

$$\rho_m(v^m, y^{m-s}) = \rho_G(v, y) = s. \tag{8}$$

Таким образом, в H_m имеется кратчайшая цепь (x^m, v^m, y^{m-s}, y^j). В силу (8) и свойства 7 $x = v$ или $m - s = j$. Если $x = v$, то $\rho_m(x^m, y^j) = m - j \geqslant \rho_G(x, y)$, что и требуется доказать. Пусть теперь $m - s = j$. Из (8) и свойства 8 следует, что $\rho_m(x^m, y^j) = \rho_G(x, y)$ и, как в случае 2.2, $m - j \leqslant \rho_G(x, y) \leqslant m + j$.

Случай 3. Рассмотрим в графе H_m кратчайшую цепь $(x^m, u^m, v^{m-1}, a_0, a_s)$, где $\rho_m(u^m, v^{m-1}) = 1$. Используя индукционное предположение, получаем $\rho_m(v^{m-1}, a_s) = m-1+s$. Тогда очевидно, что $(x^m, \ldots, x^2, x^1, a_0, a_1, \ldots, a_s)$ — кратчайшая цепь длины $m + s$.

Лемма 3 доказана.

Следствие 6. *Если $d(G) = 2k$, то $d(H_k) = d(G)$ и G_k — изометричный подграф графа H_k.*

Лемма 4. *Если $d(G) = 2k$, то G удовлетворяет* СПМ *тогда и только тогда, когда H_k удовлетворяет* СПМ.

Доказательство. Пусть G, а значит, и граф G_k удовлетворяют СПМ, $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant k$, $0 \leqslant s \leqslant k$ и $x, y \in V(G)$. Ввиду леммы 3 любые две вершины x^i, a^s удовлетворяют СПМ. Поэтому осталось показать, что если $\rho_k(x^i, y^j) < d(H_k)$, то в H_k существует кратчайшая цепь, содержащая x^i и y^j, длины более $\rho_k(x^i, y^j)$.

Если $\rho_G(x, y) > i + j$, то $i < k$ или $j < k$. Пусть, например, $i < k$. По лемме 3 в H_k есть требуемая кратчайшая цепь (x^{i+1}, x^i, y^j). Поэтому в дальнейшем считаем, что $\rho_G(x, y) \leqslant i + j$.

Если $\rho_G(x, y) \leqslant i - j$, то в силу леммы 3 в H_k есть требуемая кратчайшая цепь (x^i, y^j, a_0).

Пусть теперь $i - j < \rho_G(x, y) \leqslant i + j$. По лемме 3 и следствию 6 $\rho_G(x^i, y^j) = \rho_G(x, y) < d(G)$. В силу СПМ в графе G найдется кратчайшая цепь (x, y, u) или (v, x, y) такая, что $\rho_G(y, u) = 1$, $\rho_G(v, x) = 1$.

Пусть, например, есть кратчайшая цепь (x, y, u) (случай (v, x, y) аналогичен). Очевидно, что $i - s < \rho_G(x, u) \leqslant i + s$, $1 \leqslant s \leqslant k$, где $s = j + 1$ при $i + j < 2k$ и $s = j$ при $i + j = 2k$. По лемме 3 $\rho_k(x^i, u^s) = \rho_G(x, u)$. Так как в H_k есть ребро $y^j u^s$, то $\rho_k(x^i, u^s) = \rho_k(x^i, y^j) + \rho_k(y^j, u^s)$, т. е. (x^i, y^j, u^s) — требуемая кратчайшая цепь. Таким образом, H_k удовлетворяет СПМ.

Пусть теперь H_k удовлетворяет СПМ, $x, y \in V(G)$ и $1 \leqslant \rho_G(x, y) < d(G)$. В силу СПМ и следствия 6 в H_k есть кратчайшая цепь P, содержащая x^k и y^k, длины более $\rho_k(x^k, y^k) = \rho_G(x, y)$. Ввиду леммы 3 и условия $\rho_k(x^k, y^k) \geqslant 1$ имеем $a_0, \ldots, a_m \notin V(P)$. Поэтому в H_k есть кратчайшая цепь (x^k, y^k, u^s) такая, что $\rho_k(y^k, u^s) = 1$, $1 \leqslant s \leqslant k$, $u \in V(G)$ (случай (u^s, x^k, y^k) аналогичен). Если $s = k$, то по следствию 6 в G_k есть кратчайшая цепь (x^k, y^k, u^k) и, следовательно, (x, y, u) — кратчайшая цепь в G длины более $\rho_G(x, y)$.

Пусть теперь $s < k$. По построению H_k имеем $s = k-1$, $y^k \in S^1_{G_k}(u_k)$ и по свойству 7 $u \neq y$. Из свойства 8 в G имеется кратчайшая цепь (x, y, u). Таким образом, любые две вершины x, y в графе G удовлетворяют СПМ. Лемма 4 доказана.

В дальнейшем через $H_k(G)$ будем обозначать граф H_k, определенный по графу G указанным выше способом.

Доказательство теоремы 1. Пусть G — неодновершинный граф (иначе $H = K_{n+1}$ — искомый граф). По предложению 1 граф G удовлетворяет СПМ тогда и только тогда, когда G^2 удовлетворяет СПМ, причем $d(G^2) = 2d(G)$. Положим $H = H_{d(G)}(G^2) \times K_n$. Ввиду следствия 6 $d(H) = 2d(G)+1$ и G изометрично вкладывается в H. По лемме 4 и предложению 1 граф G^2 удовлетворяет СПМ тогда и только тогда, когда H удовлетворяет СПМ. Поэтому осталось показать, что $\kappa(H) = n$. Из доказательства следствия 5 вытекает, что $\kappa(H) \geqslant n$. С другой стороны, граф $H_{d(G)}(G^2)$ имеет висячую вершину и, следовательно, $\delta(H) \leqslant n$, где $\delta(H)$ — наименьшая степень графа H. По теореме Уитни [8, теорема 5.1] $\kappa(H) \leqslant \delta(H)$. Таким образом, $\kappa(H) = n$. Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1. В теореме 1 для любого $n \geqslant 1$ определена операция

$$f_n : \bigcup_{i \geqslant 1} W_i \to W_n, \; f_n(G) = H_{d(G)}(G^2) \times K_n,$$

причем G изометрично вкладывается в $f_n(G)$ и

$$G \in \bigcup_{i \geqslant 1} W_i^* \iff f_n(G) \in W_n^*.$$

Тем самым для любого $n \geqslant 1$ имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & W_1 \arrow[dr, "f_2"] & & & & W_n \arrow[dr, "f_{n+1}"] & \\
\bigcup\limits_{i\geqslant 1} W_i \arrow[ur, "f_1"] & & \bigcup\limits_{i\geqslant 2} W_i \arrow[ll, "\mathrm{id}"'] & \cdots & \bigcup\limits_{i\geqslant n} W_i \arrow[l] \arrow[ur, "f_n"] & & \bigcup\limits_{i\geqslant n+1} W_i, \arrow[ll, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

из которой следует эквивалентность задач описания классов $\bigcup\limits_{i\geqslant 1} W_i^*$, $\bigcup\limits_{i\geqslant n} W_i^*$, W_n^*, $n \geqslant 1$. Следствие 1 доказано.

Теорема 3. *Существует изометричное вложение произвольного графа G диаметра 2 в подходящий граф H такой, что H удовлетворяет* СПМ *и* $d(H) = d(G)$.

Доказательство. Определим последовательность графов $H_1 = G$, $H_2, \ldots, H_k$ такую, что

(а) H_i — изометричный подграф графа H_{i+1},

(б) $d(H_{i+1}) = 2$,

(в) имеет место строгое включение $\Pi(H_{i+1}) \subset \Pi(H_i)$,

(г) $\Pi(H_k) = \varnothing$,

где $\Pi(H_i) = \{xy \in E(H_i) \mid H_i$ имеет волан на вершинах $x, y\}$.

Предположим, что граф H_i определен и $\Pi(H_i) \neq \varnothing$. Пусть

$$xy \in \Pi(H_i) \tag{9}$$

и $Y = \{y\} \cup \{v \in V(H_i) \mid \rho_{H_i}(y, v) = 1$ и в H_i есть диаметральная цепь с концом y, содержащая вершину $v\}$. Положим

$$V(H_{i+1}) = V(H_i) \cup \{z\}, \text{ где } z \notin V(H_i),\ E(H_{i+1}) = E(H_i) \cup \{zv \mid v \in Y\}.$$

Проверим условия (а) — (г) для графа H_{i+1}. Поскольку $d(H_i) = 2$ и всякое новое ребро инцидентно новой вершине z, условие (а) очевидно. Из (а) и построения графа H_{i+1} получаем $d(H_{i+1}) = 2$.

Теперь заметим, что

$$xy, zv \notin \Pi(H_{i+1}), \text{ где } v \in Y. \tag{10}$$

Действительно, $x \notin Y$ в силу (9). Поэтому в H_{i+1} нет ребра zx, но есть ребро zy. Если $v \in Y \setminus \{y\}$, то в H_i есть некоторая диаметральная цепь (y, v, u) (рис. 5) и, следовательно, в H_{i+1} нет ребра uz, но есть ребро vu. Тем самым (10) доказано.

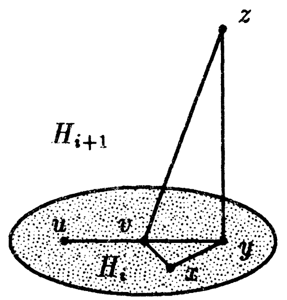


Рис. 5

Докажем (в). Пусть ребро $ab \in \Pi(H_{i+1})$. Тогда $ab \in E(H_{i+1})$. Ввиду (10) $ab \in E(H_i)$, и, используя (а), получаем $ab \in \Pi(H_i)$. Следовательно, учитывая (9) и (10), имеем (в).

Таким образом, переход от графа H_i к графу H_{i+1} сохраняет условия (а) — (в). Продолжая этот процесс, получим граф H_k, удовлетворяющий условию (г). Ввиду замечания 1 граф H_k обладает СПМ. Таким образом, $H = H_k$ — искомый граф. Теорема 3 доказана.

§ 3. Графы с точками сочленения и кактусы

В этом параграфе рассматриваются графы из класса W_1, т. е. графы с точками сочленения. Пусть a — точка сочленения графа G. Используя свойства блоков (см., например, [7, с. 140–141]), можно однозначно определить множества вершин $V_1, \ldots, V_{m(a)}$, $m(a) \geqslant 2$ ($m(a)$ — число блоков графа G, содержащих вершину a, и каждое V_i содержит единственный такой блок) такие, что

$$V(G) = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m(a)} V_i, \quad V_i \cap V_j = \{a\}, \quad i \neq j,$$

и любая цепь, соединяющая вершины $x \in V_i$, $y \in V_j$, $i \neq j$, содержит a. Через G_i обозначим порожденный подграф графа G с множеством вершин V_i, $1 \leqslant i \leqslant m(a)$. В дальнейшем связные графы $G_1, \ldots, G_{m(a)}$ будем называть *графами, определяемыми точкой сочленения a*.

Графы, в которых $m(a) = 2$ для всякой точки сочленения a и хотя бы один из графов, определяемых вершиной a, является цепью, имеют более простое строение среди графов класса W_1. В следующем предложении определена конструкция, позволяющая с сохранением СПМ «разбирать» графы из W_1 до графов с таким простым строением, а также получать новые графы из W_1^*.

Предложение 2. *Пусть $G_1, \ldots, G_{m(a)}$ — графы, определяемые точкой сочленения a графа G. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) G *удовлетворяет* СПМ;

(ii) *для любых различных $i, j \leqslant m(a)$ граф G'_i удовлетворяет* СПМ *и* $d(G'_i) = d(G'_j) = e_i + e_j$.

Кроме того, если выполнено (i) *или* (ii), *то* $d(G) = d(G'_i)$ *и при* $m(a) \geqslant 3$ *справедливо* $e_i = e_j$.

Здесь G'_i — граф, получающийся из графа G_i добавлением новой простой цепи длины e_{i+1} с концом a (рис. 6), $e_{m(a)+1} = e_1$ *и если выполнено* (i), *то в* (ii) e_i *определяется как* $e_{G_i}(a)$.

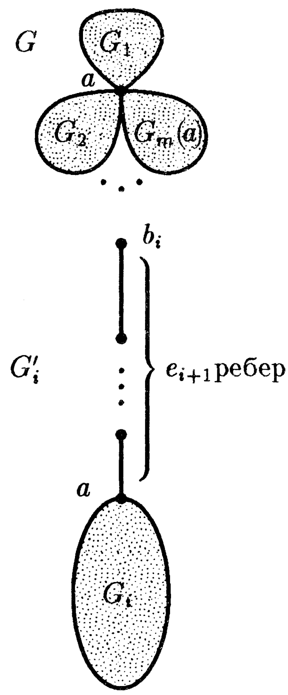


Рис. 6

Доказательство. Докажем импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii). В силу СПМ вершина графа G_i, реализующая эксцентриситет $e_{G_i}(a)$, и вершина графа G_j, реализующая эксцентриситет $e_{G_j}(a)$, принадлежат некоторой диаметральной цепи графа G. Поэтому

$$d(G) = e_{G_i}(a) + e_{G_j}(a), \quad i \neq j,\ 1 \leqslant i,j \leqslant m(a). \tag{11}$$

Следовательно, если $m(a) \geqslant 3$, то $e_{G_i}(a) = e_{G_j}(a)$. Поскольку граф G'_i изометрично вкладывается в граф G и справедливо (11), $d(G) = d(G'_i)$. Теперь нетрудно понять, что граф G'_i удовлетворяет СПМ.

Докажем, что из (ii) следует (i). Так как вершина графа G_i, реализующая эксцентриситет $e_{G_i}(a)$, и вершина b_i (рис. 6) принадлежат некоторой диаметральной цепи графа G'_i, а $d(G'_i) = e_i + e_{i+1}$, то $e_i = e_{G_i}(a)$. Следовательно, $d(G) = d(G'_i)$ и $e_i = e_j$ при $m(a) \geqslant 3$. Теперь очевидно, что G удовлетворяет СПМ. Предложение 2 доказано.

В дальнейшем нам потребуется следующее

Замечание 3. Предложение 2 остается справедливым, если вместо $G_1, \ldots, G_{m(a)}$ рассмотреть графы $R_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{k_1} G_i$, $R_2 = \bigcup\limits_{i=k_1+1}^{k_2} G_i, \ldots$, $R_s = \bigcup\limits_{i=k_{s-1}+1}^{k_s} G_i$, где $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_s = m(a)$.

Предложение 3. *Пусть a_1, a_2 — различные точки сочленения графа G, удовлетворяющего СПМ. Тогда $m(a_i) = 2$ для некоторого i и хотя бы один из графов G_{i1}, G_{i2}, определяемых вершиной a_i, является цепью.*

Доказательство. Предположим противное и покажем, что существуют различные точки сочленения b_1, b_2 такие, что

$$\deg_G(b_i) - \deg_{G_{i1}}(b_i) \geqslant 2, \tag{12}$$

где $G_{i1}, \ldots, G_{im(b_i)}$ — графы, определяемые точкой сочленения b_i и $b_1 \in V(G_{21})$, $b_2 \in V(G_{11})$ (рис. 7).

Действительно, определим вершины $b_i^0 = a_i$, $i = 1,2$. Если для b_i^0 неравенство (12) не выполнено, то $m(b_i^0) = 2$, G_{i2} — не цепь (в силу

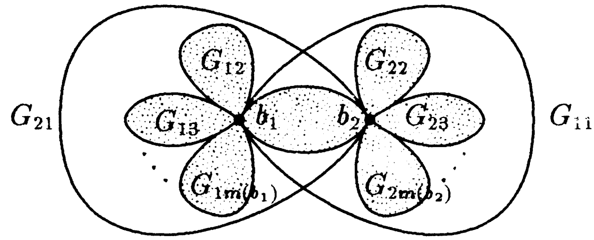


Рис. 7

исходного предположения для вершин a_1, a_2) и в G есть мост с концами b_i^0, b_i^1, где $b_i^1 \in V(G_{i2}) \setminus V(G_{i1})$. Проводя эти же рассуждения для точки сочленения b_i^1 и переходя последовательно от b_i^j к b_i^{j+1}, в итоге получим различные точки сочленения $b_1 = b_1^k$, $b_2 = b_2^l$, удовлетворяющие (12). Ввиду (12) существуют различные вершины $c_1, c_2 \notin V(G_{11})$, смежные с b_1. В силу СПМ вершины c_1, c_2 принадлежат некоторой диаметральной цепи графа G. Поэтому $e_{G_{1i}}(b_1) \geqslant d(G)/2$ для некоторого $i \geqslant 2$. Аналогично $e_{G_{2j}}(b_2) \geqslant d(G)/2$ для некоторого $j \geqslant 2$. Следовательно, $e_{G_{11}}(b_1) > d(G)/2$, $e_{G_{1i}}(b_1) \geqslant d(G)/2$, $i \geqslant 2$. С другой стороны, $e_{G_{11}}(b_1) + e_{G_{1i}}(b_1) \leqslant d(G)$. Пришли к противоречию. Предложение 3 доказано.

Теперь, используя предложения 2 и 3, получим явное описание кактусов, удовлетворяющих СПМ.

Определение 2 [9]. Кактус — это связный граф, в котором нет ребер, принадлежащих более чем одному простому циклу. Кактусы называют также деревьями Хусими [10].

Для описания кактусов, удовлетворяющих СПМ, нам потребуется

Лемма 5 (свойства кактуса). *В произвольном кактусе*

(а) *Всякая вершина степени не менее трех является точкой сочленения.*

(б) *Любой простой цикл является блоком.*

(в) *Если L_1, L_2 — простые циклы, не имеющие общих вершин, то существует простая цепь P с концами $a_i \in V(L_i)$, $i = 1, 2$, такая, что $V(P) \cap V(L_i) = \{a_i\}$, и всякая цепь, соединяющая произвольную вершину из L_1 с произвольной вершиной из L_2, содержит a_1 и a_2.*

Доказательство.

(а) Пусть x_1, x_2, x_3 — различные вершины, смежные с вершиной a, которая не является точкой сочленения. В силу [8, теорема 3.1] для любых i и j, $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, $i \neq j$, существует простая цепь, соединяющая x_i, x_j и не содержащая a. Следовательно, для некоторого i ребро ax_i

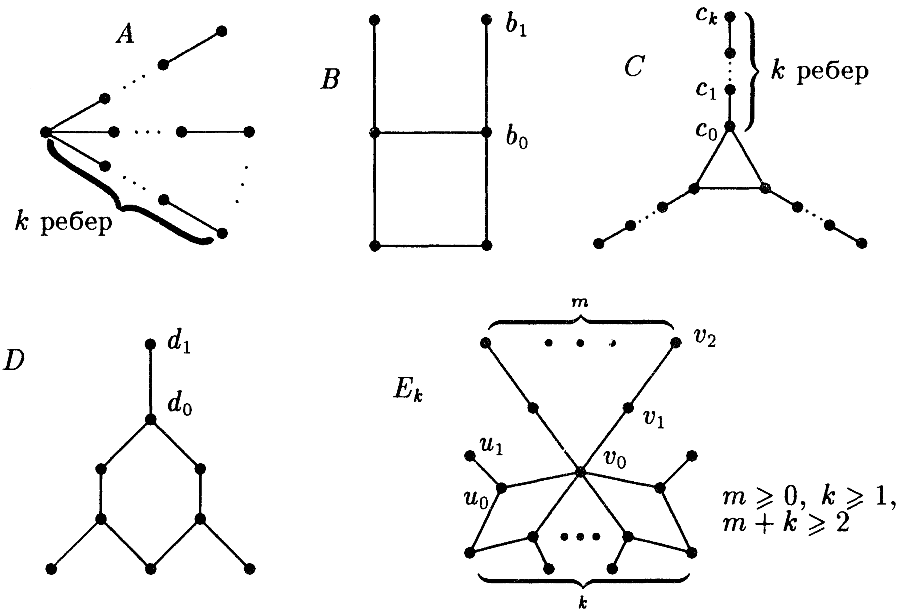


Рис. 8

принадлежит двум простым циклам. Противоречие.

Свойство (б) непосредственно следует из свойства (а).

(в) В силу связности кактуса существует простая цепь P с концами $a_i \in V(L_i)$, $i = 1, 2$, такая, что $V(P) \cap V(L_i) = \{a_i\}$. Пусть теперь P' — произвольная цепь, соединяющая вершину из L_1 с вершиной из L_2, и предположим, например, что $a_1 \notin V(P')$. Тогда есть подцепь P'' цепи P' с концами $x_i \in V(L_i)$ такая, что $V(P'') \cap V(L_i) = \{x_i\}$ и $a_1 \notin V(P'')$. Поэтому в простом цикле L_1 существует ребро, инцидентное вершине a_1 и принадлежащее еще одному простому циклу, возникающему при обходе замкнутого маршрута $P_1 \cup P \cup P_2 \cup P''$, где $P_i \subseteq L_i$ — цепь с концами a_i, x_i. Лемма 5 доказана.

Теорема 4. *Кактус G удовлетворяет* СПМ *тогда и только тогда, когда G — цепь, либо цикл, либо G является одним из графов на рис.* 8.

Доказательство. Пусть G — кактус, удовлетворяющий СПМ, и $\mu(G)$ — число простых циклов в G. Индукцией по $\mu(G)$ покажем, что G имеет требуемый вид. В силу полученной в [3, 4] характеризации деревьев и унициклических графов, удовлетворяющих СПМ, при $\mu(G) \leqslant 1$ граф G является цепью, либо циклом, либо графом вида A, B, C, D, E_1.

Пусть теперь $\mu(G) \geqslant 2$. Из указанных выше свойств (а), (в) кактусов и предложения 3 получаем, что любые два простых цикла в кактусе G имеют общую вершину и, следовательно, есть вершина a, принадлежащая всем простым циклам и являющаяся точкой сочленения. Пусть $G_1, \ldots, G_{m(a)}$ — графы, определяемые точкой сочленения a (см. рис. 6). Каждый такой граф содержит единственный блок, которому принадлежит вершина a. Ввиду свойства (б) всякий граф G_i является деревом или уницикличеким графом. После перенумерации графов G_i будем считать, что $\mu(G_1) = \mu(G_2) = 1$. Определим кактусы $R_1 = G_1$, $R_2 = \bigcup\limits_{i=2}^{m(a)} G_i$. Тогда по предложению 2 и замечанию 3 кактусы R'_1, R'_2 удовлетворяют СПМ и

$$d(R'_1) = d(R'_2) = d(G) = e_{R_1}(a) + e_{R_2}(a), \tag{13}$$

где обозначения R'_1, R'_2 соответствуют обозначениям из предложения 2. Поскольку $1 \leqslant \mu(R'_i) < \mu(G)$, по индукционному предположению R'_1, R'_2 — графы вида B, C, D, E_k. Из вида этих графов (см. рис. 8) следует, что

— $d(B) = 3$, $e_{B_1}(b_0) = 2$, где B_1 — граф, полученный из графа B удалением вершины b_1;

— $d(C) = 2k + 1 \geqslant 3$, $e_{C_1}(c_0) = k + 1 \geqslant 2$, где граф C_1 получен из графа C последовательным удалением вершин $c_1, \ldots, c_k$;

— $d(D) = 4$, $e_{D_1}(d_o) = 3$, где граф D_1 получен из D удалением вершины d_1;

— $d(E_k) = 4$, $e_{E_{k,1}}(u_0) = 3$, $e_{E_{k,2}}(v_0) = 2$, где граф $E_{k,1}$ получен из E_k удалением вершины u_1 и граф $E_{k,2}$ получен из E_k удалением вершин v_1, v_2.

Теперь, используя (13), нетрудно убедиться, что $R'_1 = E_k$, $R'_2 = E_r$ и $a = v_0$ (вершина v_0 указана на рис. 8). Следовательно, G — граф вида E_k.

Поскольку графы, изображенные на рис. 8, удовлетворяют СПМ, теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Евдокимов А. А.** Метрические свойства вложений и коды, сохраняющие расстояния // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Наука, 1988. С. 116–132. (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 10).
2. **Евдокимов А. А.** Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т.1, № 1. С. 5–12.
3. **Федоряева Т. И.** Характеризация одного класса графов со свойством продолжения метрики // Методы дискретного анализа в исследовании функциональных систем: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988. Вып. 47. С. 89–93.

4. **Федоряева Т. И.** Усиленные свойства продолжения метрики // Методы дискретного анализа в теории графов и сложности: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1992. Вып. 52. С. 112–118.
5. **Федоряева Т. И.** Внешнепланарные графы, удовлетворяющие свойству продолжения метрики. III. Новосибирск, 1995. 51 с. (Препринт /РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 3).
6. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987.
7. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
8. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973.
9. **Харари Ф., Палмер Э.** Перечисление графов. М.: Мир, 1977.
10. **Harary F., Norman R. Z.** The dissimilarity characteristic of Husimi trees // Ann. of Math. 1953. V. 58, N 1. P. 134–141.

Адрес автора:

Россия,
630090 Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН

Статья поступила

20 июня 1995 г.