ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1995. Том 2, № 4, 3–12

УДК 519.1

ДИСТРИБУТИВНАЯ РАСКРАСКА ВЕРШИН ГРАФА

В. Г. Визинг

Изучается специальный вид раскраски вершин графа, называемый дистрибутивной раскраской. Указывается связь рассматриваемых вопросов с проблемой изоморфизма графов.

1. Введение. Основные понятия

Пусть G — обыкновенный граф [1, 2] с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Под *раскраской* вершин графа G понимается однозначное отображение Φ: $V(G) \to C$, где C — множество, элементы которого называются *цветами*. При этом если $\Phi(v) = c$ $(v \in V(G), c \in C)$, то говорят, что вершина v окрашена в цвет c. Две вершины v_1 и v_2 будем называть *соцветными*, если $\Phi(v_1) = \Phi(v_2)$. Равномощные подмножества вершин $V_1 \subseteq V(G)$ и $V_2 \subseteq V(G)$ называются *соцветными*, если для любого цвета c число вершин цвета c в V_1 равно числу вершин цвета c в V_2.

Подмножество всех вершин графа G, смежных с вершиной v, называется *окружением* вершины v и обозначается через $N(v)$.

Определение 1. Раскраска вершин графа G называется *дистрибутивной*, если окружения любых двух соцветных вершин соцветны. Дистрибутивная раскраска вершин графа минимальным числом цветов называется *минимальной*.

В статье излагается алгоритм полиномиальной сложности для нахождения минимальной дистрибутивной раскраски вершин графа. Предварительно приведем несколько примеров.

1. Раскраска одним цветом всех вершин однородного графа является минимальной дистрибутивной раскраской.

2. Известно ([1], с. 44), что множество вершин графа G разбивается на орбиты группы автоморфизмов этого графа. Очевидно, раскраска, при которой вершины соцветны тогда и только тогда, когда они принадлежат одной орбите, является дистрибутивной (но не обязательно минимальной).

3. Раскраска вершин графа, при которой все вершины получают различные цвета, является дистрибутивной.

Граф с n вершинами называется *однозначно раскрашиваемым*, если в минимальной дистрибутивной раскраске его вершин содержится n цветов. При $2 \leqslant n \leqslant 5$ однозначно раскрашиваемых графов нет.

При любом $n \geqslant 6$ можно построить однозначно раскрашиваемый n-вершинный граф (рис. 1). (Штрихом изображена простая цепь, соединяющая v_6 с v_n.) Автор не располагает полным описанием всех однозначно раскрашиваемых графов.

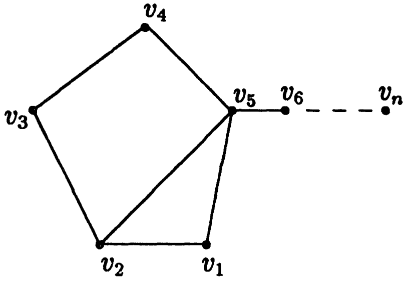

Рис. 1

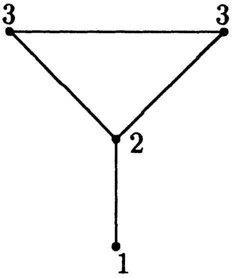

Рис. 2

4. Пусть G — граф с дистрибутивно раскрашенными вершинами. Удалим из G все вершины какого-либо одного цвета вместе с инцидентными им ребрами. Оставшийся подграф будет раскрашен дистрибутивно. Однако раскраска вершин такого подграфа может не быть минимально дистрибутивной даже в том случае, когда раскраска вершин графа G была минимальной. Например, на рис. 2 изображена минимальная дистрибутивная раскраска вершин графа. Удалив вершину цвета 1 вместе с инцидентным ей ребром, получим дистрибутивную раскраску вершин оставшегося подграфа, не являющуюся минимальной.

2. Минимальная дистрибутивная раскраска

Определим понятия k-подобных вершин графа и k-подобных подмножеств вершин.

Определение 2. Любые две вершины графа G считаются 0-подобными. Любые два равномощных подмножества вершин считаются 0-подобными.

Пусть k — натуральное, и пусть определены понятия $(k-1)$-подобных вершин и $(k-1)$-подобных подмножеств вершин. Вершины x и y называются *k-подобными*, если подмножества $N(x)$ и $N(y)$ являются $(k-1)$-подобными. Подмножества $X, Y \subseteq V(G)$ называются *k-подобными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие друг другу вершины k-подобны.

Легко видеть, что отношение k-подобия является отношением эквивалентности.

Лемма 1. *Пусть k — натуральное, тогда k-подобными являются:*

а) *k-подобные вершины;*

б) *k-подобные подмножества вершин.*

Доказательство. Проводится индукция по k. При $k = 1$ утверждения а) и б) очевидны. Предположим, что $k \geqslant 2$. Пусть x и y являются k-подобными вершинами. По определению, $N(x)$ и $N(y)$ являются $(k-1)$-подобными. По предположению индукции $N(X)$ и $N(y)$ являются $(k-2)$-подобными. Следовательно, x и y являются $(k-1)$-подобными.

Пусть теперь X и Y являются k-подобными подмножествами вершин. Это значит, что между элементами множеств X и Y можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие друг другу вершины окажутся k-подобными. Из сказанного выше следует, что k-подобные вершины являются $(k-1)$-подобными. Следовательно, X и Y являются $(k-1)$-подобными. Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 вытекает, что каждый класс эквивалентности, состоящий из k-подобных вершин графа, принадлежит только одному классу эквивалентности, который состоит из $(k-1)$-подобных вершин $(k \geqslant 1)$. Поэтому с ростом k число классов эквивалентности для отношения k-подобия вершин не убывает. Остановимся подробнее на ситуации, когда это число остается неизменным.

Лемма 2. *Пусть натуральное k таково, что в G любой класс $(k-1)$-подобных вершин совпадает с одним из классов k-подобных вершин. Тогда любые две $(k-1)$-подобные вершины в G являются m-подобными при любом целом $m \geqslant 0$.*

Доказательство. При $m \leqslant k$ утверждение вытекает из леммы 1. Поэтому следует доказать справедливость леммы 2 при $m = k + 1$.

Пусть вершины x и y являются $(k-1)$-подобными. Тогда по условию x и y являются k-подобными. Значит, множества $N(x)$ и $N(y)$ являются $(k-1)$-подобными. Так как любые $(k-1)$-подобные вершины являются k-подобными, то множества $N(x)$ и $N(y)$ являются k-подобными. Отсюда и из определения 2 следует, что вершины x и y являются $(k+1)$-подобными. Лемма 2 доказана.

Определение 3. Две вершины из $V(G)$ называются *подобными*, если они k-подобны при любом целом $k \geqslant 0$. Два подмножества из $V(G)$ называются *подобными*, если они k-подобны при любом целом $k \geqslant 0$.

Лемма 3. *В любом n-вершинном графе подобными являются:*

а) *$(n-1)$-подобные вершины;*

б) *$(n-1)$-подобные подмножества вершин.*

Доказательство. Утверждение б) непосредственно следует из а). Докажем утверждение а). Пусть a_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, — число классов k-подобных вершин в n-вершинном графе G. По лемме 1 имеем $1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{n-1}$. Если при i таком, что $0 \leqslant i \leqslant n-2$, окажется, что $a_i = a_{i+1}$, то по лемме 2 i-подобные вершины являются подобными. Если же $1 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$, то $a_{n-1} = n$, т. е. каждый класс $(n-1)$-подобных вершин состоит из вершины, которая подобна сама себе. Лемма 3 доказана.

Следствие 1. *Окружения двух подобных вершин подобны.*

Действительно, в n-вершинном графе подобные вершины являются n-подобными. Поэтому их окружения являются $(n-1)$-подобными.

Теорема 1. *Соцветные при дистрибутивной раскраске вершины подобны.*

Доказательство. Достаточно доказать, что соцветные вершины k-подобны при любом целом $k \geqslant 0$. Это утверждение докажем индукцией по k. При $k = 0$ оно очевидно. Пусть утверждение доказано при некотором $k \geqslant 0$. Пусть x и y — соцветные при дистрибутивной раскраске вершины графа G. Так как окружения двух соцветных вершин соцветны, то по предположению индукции эти окружения k-подобны. Следовательно, вершины x и y являются $(k+1)$-подобными. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Раскраска вершин графа, при которой вершины соцветны тогда и только тогда, когда они подобны, является минимальной дистрибутивной раскраской.*

Доказательство. Из следствия 1 вытекает, что описанная раскраска вершин является дистрибутивной. В силу теоремы 1 эта раскраска является минимальной дистрибутивной раскраской. Теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Если вершины x и y являются соцветными при какой-либо дистрибутивной раскраске вершин графа, то x и y соцветны и при минимальной дистрибутивной раскраске вершин в G.*

Таким образом, существует единственная с точностью до наименования цветов минимальная дистрибутивная раскраска вершин графа.

Опишем алгоритм разбиения множества вершин графа на классы подобных подмножеств. Пусть G — n-вершинный граф.

1. Все вершины графа G отнесем к классу 0-подобных. Переход к п. 2.

2. Пусть построено разбиение множества вершин графа G на классы k-подобных вершин, $k \geqslant 0$. Эти классы обозначим через $V_1, \dots, V_s$. Если $|V_i| = 1$ при всех i, $1 \leqslant i \leqslant s$, то $V_1, \dots, V_s$ — классы подобных вершин и работа алгоритма прекращается. В противном случае — переход к п. 3.

3. Каждый класс V_i с $|V_i| \geqslant 2$ разбиваем на подклассы $(k+1)$-подобных вершин. С этой целью каждой вершине $x \in V_i$ сопоставляем кортеж $(a_1, \dots, a_s)$, где a_j — число вершин класса V_j, смежных с x $(1 \leqslant j \leqslant s)$. Вершины класса V_i, которым соответствуют одни и те же кортежи, относим к одному классу $(k+1)$-подобных вершин. Если класс V_i разбился на 2 или более классов $(k+1)$-подобных вершин, то будем говорить, что произошло расщепление класса V_i. Если ни один класс не расщепился, то $V_1, \dots, V_s$ — классы подобных вершин и работа алгоритма прекращается. В противном случае полагаем $k := k+1$ и переходим к п. 2.

В силу леммы 3 алгоритм переходит к п. 2 не более n раз. Поэтому алгоритм всегда останавливается. В результате множество вершин графа G разобьется на классы подобных. Для получения минимальной дистрибутивной раскраски каждому классу подобных вершин нужно поставить в соответствие взаимно однозначным образом цвет, в который следует окрасить все вершины этого класса.

Покажем, что алгоритм требует не более чем $O(n^3)$ действий.

Обозначим через s_j число классов j-подобных вершин (j — целое, $j \geqslant 0$). Очевидно, последовательность $s_0, s_1, s_2, \dots$ монотонно не убывает. Если $s_{k-1} = s_k$, то по лемме 2 $s_{k-1} = s_m$ при любом $m \geqslant k-1$. Пусть l — наименьший индекс такой, что $s_l = s_{l+1}$. В силу леммы 3 имеем $l \leqslant n-1$. Если $l = 0$, т. е. G — однородный граф, то для построения минимальной дистрибутивной раскраски вершин графа G, очевидно, достаточно $O(n^3)$ действий. Пусть $0 < l \leqslant n-1$. Тогда $1 = s_0 < s_1 < \dots < s_l$. Пусть $k < l$ и $V_1, V_2, \dots, V_{s_k}$ — классы k-подобных вершин. Чтобы определить, являются ли $(k+1)$-подобными 2 вершины из одного и того же класса V_i, нужно сравнить кортежи, которые поставлены им в соответствие описанным в п. 3 алгоритма образом. Сравнение двух таких кортежей потребует $O(s_k) \leqslant O(n)$ действий. Оценим сверху количество сравнений, необходимых для построения классов $(k+1)$-подобных вершин. Взяв какую-либо вершину из класса V_i и сравнив ее с $|V_i| - 1$ вершинами этого класса, выявим один класс $(k+1)$-подобных вершин. Таким образом, произведя $n - |V_i|$ сравнений, мы выявим s_k классов $(k+1)$-подобных вершин. Для построения остальных $(s_{k+1} - s_k)$ классов, очевидно, нужно произвести менее чем $(s_{k+1} - s_k)n$ сравнений. Следовательно, переход от классов k-подобных к классам $(k+1)$-подобных вершин потребует менее чем $(s_{k+1} - s_k + 1)n$

сравнений и, значит, не более чем $(s_{k+1} - s_k + 1)O(n^2)$ действий. Далее, обнаружение того, что l-подобные вершины являются подобными, потребует либо $(n - s_l)$ сравнений, либо $O(n)$ действий (согласно п. 2 алгоритма); в обоих случаях достаточно $O(n^2)$ действий. Итак, общее число рассмотренных нами действий оценивается сверху величиной $O(n^2)((s_1 - s_0 + 1) + (s_2 - s_1 + 1) + \cdots + (s_l - s_{l-1} + 1) + 1) = O(n^2)(s_l - s_0 + l + 1) = O(n^3)$.

Следует отметить, что при каждом выполнении п. 3 алгоритма каждой вершине необходимо поставить в соответствие описанным в алгоритме образом кортежи, что потребует не более чем $O(n^2)$ действий. Так как п. 3 выполняется не более чем n раз, то для построения кортежей достаточно $O(n^3)$ действий.

Таким образом, трудоемкость алгоритма не превосходит $O(n^3)$.

3. Подобные графы

Определение 4. Пусть G и H — два n-вершинных графа таких, что $V(G) \cap V(H) = \varnothing$.

Графы G и H называются *подобными*, если в графе $G \cup H$ подмножества вершин $V(G)$ и $V(H)$ подобны.

Так как при минимальной дистрибутивной раскраске вершин графа соцветные подмножества вершин подобны, а подобные — соцветны, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Два графа G и H, $V(G) \cap V(H) = \varnothing$, подобны тогда и только тогда, когда при минимальной дистрибутивной раскраске вершин графа $G \cup H$ подмножества вершин $V(G)$ и $V(H)$ соцветны.*

Следовательно, при установлении подобия двух графов надо построить минимальную дистрибутивную раскраску вершин графа $G \cup H$ и убедиться в соцветности множеств $V(G)$ и $V(H)$. Теорема 1 и следствие 2 показывают, что можно обойтись произвольной (не обязательно минимальной) дистрибутивной раскраской вершин графа $G \cup H$, обеспечивающей соцветность множеств $V(G)$ и $V(H)$.

Из теоремы 3 вытекает следующее утверждение, касающееся однозначно раскрашиваемых графов (см. пример 3 из п. 1).

Следствие 3. *Два однозначно раскрашиваемых графа изоморфны тогда и только тогда, когда они подобны.*

Теперь обратимся к связным графам.

Теорема 4. *Пусть G и H — связные графы такие, что $|V(G)| = |V(H)|$, $V(G) \cap V(H) = \varnothing$, и пусть имеется дистрибутивная раскраска вершин графа $G \cup H$, при которой вершины $x \in V(G)$ и $y \in V(H)$*

соцветны. Тогда при этой раскраске множества $V(G)$ и $V(H)$ соцветны, т. е. графы G и H подобны.

Доказательство. Пусть на дистрибутивную раскраску вершин графа $G \cup H$ израсходовано l различных цветов. Если $l = 1$, то утверждение очевидно: оба графа являются однородными графами одной и той же степени. Предположим, что $l \geqslant 2$. Убедимся в том, что каждый из l цветов используется как при раскраске вершин $V(G)$, так и при раскраске вершин $V(H)$. Пусть $X \subseteq V(G)$ — множество всех тех вершин, для каждой из которых есть соцветная вершина в $V(H)$; $Y \subseteq V(H)$ — множество всех тех вершин, для каждой из которых есть соцветная вершина в $V(G)$.

По условию теоремы $x \in X$, $y \in Y$. Покажем, что $X = V(G)$. Предположим противное. Так как G — связной граф, то существует вершина $w \in V(G) \setminus X$, смежная с некоторой вершиной $z \in X$. Вершина z соцветна некоторой вершине $u \in Y \subseteq V(H)$. В силу дистрибутивности раскраски вершин графа $G \cup H$ окружения вершин z и u должны быть соцветными. Это противоречит тому, что вершина w, входящая в окружение вершины z, не имеет соцветной вершины в множестве $V(H)$. Аналогично доказывается, что $Y = V(H)$.

При дистрибутивной раскраске вершин графа $G \cup H$ подмножества $V(G)$ и $V(H)$ разбиваются на классы $X_i \subseteq V(G)$ и $Y_i \subseteq V(H)$ соцветных вершин $(1 \leqslant r \leqslant l)$. Будем считать, что все вершины из классов X_i и Y_i окрашены в цвет i $(i \leqslant 1 \leqslant l)$. Цвета i и j $(i \neq j)$ назовем *смежными*, если в окружении вершины цвета i есть хотя бы одна вершина цвета j; отношение смежности цветов, очевидно, симметрично. Если цвета i и j смежны, то $|X_i|/|Y_i| = |X_j|/|Y_j|$. Действительно, пусть q_{ij} — число вершин цвета j, входящих в окружение вершины цвета i; аналогично определяется q_{ji}. Тогда имеем $|X_i|q_{ij} = |X_j|q_{ji}$; $|Y_i|q_{ij} = |Y_j|q_{ji}$. Отсюда получаем требуемое равенство.

Пусть $|X_1|/|Y_1| = t$. Обозначим $K = \{k \in \{1,2,\ldots,l\} \mid |X_k|/|Y_k| = t\}$, $P = \{1,2,\ldots,l\} \setminus K$. Тогда $P = \varnothing$. Действительно, в противном случае в силу связности графа G нашелся бы цвет $p \in P$, смежный с некоторым цветом из K; но тогда выполнялось бы равенство $|X_p|/|Y_p| = t$, т. е. цвет p не принадлежал бы P. Значит, $|X_k|/|Y_k| = t$ при любом $k \in \{1,2,\ldots,l\}$. Таким образом,

$$|V(H)| = |V(G)| = \sum_{k=1}^{l} |X_k| = t \sum_{k=1}^{l} |Y_k| = tV(H).$$

Значит, $t = 1$, т. е. множества $V(G)$ и $V(H)$ соцветны и графы G, H подобны. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Любые два подобных дерева изоморфны.*

Доказательство. Пусть G и H — два подобных n-вершинных дерева таких, что $V(G) \cap V(H) = \varnothing$. Построим дистрибутивную раскраску вершин графа $G \cup H$ такую, что множества $V(G)$ и $V(H)$ соцветны (это можно сделать по теореме 3). Индукцией по n докажем, что существует изоморфизм G на H, при котором соответствующие друг другу вершины являются соцветными.

При $n \leqslant 2$ этот факт очевиден. Предположим, что $n \geqslant 3$. Возьмем какую-либо висячую вершину v из $V(G)$. Пусть $X \subseteq V(G)$, а $Y \subseteq V(H)$ — подмножество всех висячих вершин графа $G \cup H$, соцветных вершине v. Очевидно, что $|X| = |Y|$. Рассмотрим подграф графа $G \cup H$, порожденный множеством вершин $(V(G) \setminus X) \cup (V(H) \setminus Y)$; вершины этого подграфа раскрашены дистрибутивно, а подмножества $V(G) \setminus X$ и $V(H) \setminus Y$ соцветны. По предположению индукции существует изоморфизм дерева G_1 с вершинами $V(G) \setminus X$ на дерево H_1 с вершинами $V(H) \setminus Y$, при котором соцветные вершины соответствуют соцветным. Пусть Z и W — подмножества вершин деревьев G_1 и H_1 соответственно, каждая из которых в графе $G \cup H$ смежна с вершинами из множества $X \cup Y$. Так как вершины графа $G \cup H$ раскрашены дистрибутивно, то любые две вершины множества $Z \cup W$ соцветны, $|Z| = |W|$ и каждая вершина множества $Z \cup W$ смежна с одним и тем же числом q вершин множества $X \cup Y$. Пусть $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_r\}$, $w_i = \varphi(z_i)$, X_i есть q-элементное подмножество X, состоящее из вершин, смежных с z_i, и Y_i есть q-элементное подмножество Y, состоящее из вершин, смежных с w_i, $1 \leqslant i \leqslant r$. Построим взаимно однозначное отображение ψ множества X на Y, при котором вершины из X_i отображаются в вершины множества Y_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Тогда взаимно однозначное отображение множества $V(G)$ на множество $V(H)$, которое совпадает с φ на множестве $V(G) \setminus X$ и совпадает с ψ на множестве X, будет изоморфизмом дерева G на дерево H. Теорема 5 доказана.

4. Сходные графы

Определение 5. Пусть G и H — два n-вершинных графа, k — натуральное число, не превосходящее n. Графы G и H называются *реберно k-сходными*, если существует такое взаимно однозначное отображение φ множества $V(G)$ на $V(H)$, что для любого k-подмножества $X \subseteq V(G)$ подграф графа G, порожденный вершинами X, содержит такое же число ребер, что и подграф графа H, порожденный вершинами $\varphi(X)$. При этом отображение φ будем называть отображением, обеспечивающим реберную k-сходность.

Лемма 4. *Пусть G и H — n-вершинные реберно k-сходные графы, φ — отображение, обеспечивающее реберную k-сходность. Тогда* (а) *при* $2 \leqslant k \leqslant n$ *графы* G *и* H *имеют одинаковое число ребер*;

(б) *при* $2 \leqslant k \leqslant n-1$ *графы* G *и* H *имеют одинаковые наборы степеней вершин, причем степени вершин* $v \in V(G)$ *и* $\varphi(V) \in V(H)$ *одинаковы*;

(в) *при* $2 \leqslant k \leqslant n-2$ *графы* G *и* H *изоморфны.*

Доказательство. (а) При $k = n$ утверждение очевидно. Предположим, что $2 \leqslant k \leqslant n$. Пусть M — суммарное число ребер в $\binom{n}{k}$ различных k-вершинных подграфах графа G. Так как каждое ребро графа G принадлежит $\binom{n-2}{k-2}$ таким подграфам, то граф G имеет $M/\binom{n-2}{k-2}$ ребер. Поскольку графы G и H реберно k-сходны, суммарное число ребер в $\binom{n}{k}$ различных k-вершинных подграфах графа H также равно M и граф H имеет $M/\binom{n-2}{k-2}$ ребер.

(б) Пусть v — произвольная вершина графа G и $\varphi(v) \in V(H)$. Рассмотрим $(n-1)$-вершинные подграфы графов G и H, порожденные множествами $V(G) \setminus \{v\}$ и $V(H) \setminus \{\varphi(v)\}$ соответственно. Так как $2 \leqslant k \leqslant n-1$, то в силу утверждения (а) одинаковое число ребер имеют как эти подграфы, так и графы G и H. Следовательно, степени вершин v и $\varphi(v)$ в графах G и H равны.

(в) Покажем, что φ является изоморфным отображением графа G на H. Пусть v_1 и v_2 — различные вершины графа G. По утверждению (б) вершина v_i имеет ту же степень в графе G, что и вершина $\varphi(v_i)$ в графе H, $i = 1, 2$. Рассмотрим $(n-2)$-вершинные подграфы в графах G и H, порожденные множествами $V(G) \setminus \{v_1 \cup v_2\}$ и $V(N) \setminus \{\varphi(v_1) \cup \varphi(v_2)\}$. Так как $2 \leqslant k \leqslant n-2$, то эти подграфы реберно k-сходны. В силу утверждения (а) они имеют одинаковое число ребер. Отсюда вытекает, что в графе G вершины v_1 и v_2 смежны тогда и только тогда, когда вершины $\varphi(v_1)$ и $\varphi(v_2)$ смежны в графе H. Лемма 4 доказана.

Определение 6. Пусть G и H — n-вершинные графы, k — натуральное число, не превышающее n. Графы G и H называются *дистрибутивно* k-сходными, если существует такое взаимно однозначное отображение φ множества $V(G)$ на $V(H)$, что для любого k-подмножества $X \subseteq V(G)$ подграф графа G с множеством вершин X подобен подграфу графа H с множеством вершин $\varphi(X)$.

Очевидно, изоморфные графы являются дистрибутивно k-сходными. Так как подобные графы имеют одинаковое число ребер, то из дистрибутивной k-сходности вытекает реберная k-сходность. Поэтому справедлива следующая

Теорема 6. *При любом* $n \geqslant 4$ *два* n*-вершинных графа изоморфны тогда и только тогда, когда они дистрибутивно* k*-сходны при некотором* k, $2 \leqslant k \leqslant n-2$.

Не следует думать, что теорема 6 решает проблему изоморфизма графов: задача определения дистрибутивной k-сходности $(2 \leqslant k \leqslant n-2)$ может оказаться NP-трудной.

Разумеется, обнаружить дистрибутивную $(n-1)$-сходность двух n-вершинных графов можно с помощью полиномиального алгоритма. Но что это дает? Верно ли, например, следующее простое утверждение: если при $n \geqslant 3$ два n-вершинных графа дистрибутивно $(n-1)$-сходны, то они подобны?

ЛИТЕРАТУРА

1. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
2. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987.

Адрес автора:

Украина,
270039 Одесса,
ул. Канатная, 112,
Одесская гос. академия
пищевых технологий

Статья поступила

6 июня 1995 г.