ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1995. Том 2, № 4, 13–31

УДК 519.8

ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОЭТАПНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ НА ЦЕПИ*)

Э. Х. Гимади

Рассматриваются двух-, трех- и многоэтапная задачи размещения на сети в виде цепи (МЗРЦ) при условии, что затраты по транспортировке единицы продукта из пункта в пункт равны сумме длин ребер в подцепи, соединяющей эти пункты. Изучаются такие свойства оптимальных решений МЗРЦ, как связность областей обслуживания, согласованность и центральность пунктов размещения. Предложены два разных алгоритма для точного решения МЗРЦ с временно́й сложностью $O(m^p n)$ и $O(pm n^3)$ соответственно, где p — число этапов, n — число пунктов спроса на цепи, m — ограничение сверху на число возможных мест размещения предприятий каждого этапа.

Введение

В последнее время исследователи проявляют особый интерес к многоэтапным задачам размещения (МЗР) [1–5]. Этот класс задач характеризуется наличием нескольких уровней производства, на которых осуществляется обработка сырья, прежде чем готовый продукт поступает к потребителю. Примером двухуровневого производственного процесса является добыча и обработка природного сырья — нефти, руды и т. п.

В общем случае эта задача NP-трудна (даже в одноэтапной постановке [6–7]). В работах [2–3] для решения двух- и многоэтапной задач размещения предлагается использовать метод ветвей и границ, который, вообще говоря, эффективным не является [7]. Поэтому целесообразно изучение специальных классов задачи, для решения которых можно предложить алгоритмы полиномиальной сложности [7–18].

В настоящей работе рассматриваются двух-, трех- и многоэтапная задачи размещения на сети в виде цепи при условии, что затраты по

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-00489) и Международного научного фонда и Правительства РФ (код RPY300).

транспортировке единицы продукта из пункта в пункт равны сумме длин ребер в подцепи, соединяющей эти пункты. Автору неизвестны эффективные алгоритмы для рассматриваемого случая. Заметим, что полиномиальный алгоритм решения МЗР в более общем случае древовидной сети, предложенный в [5], является некорректным даже в рассматриваемом нами случае сети в виде цепи. Статья состоит из 6 разделов.

В первом разделе эта задача сформулирована как задача линейного целочисленного программирования (с использованием булевых переменных выбора пунктов размещения предприятий и назначения выбранных предприятий на обслуживаемые пункты спроса). В исследовательских целях оказывается более удобной запись задачи в эквивалентном, но более компактном виде, где в качестве переменных величин используются элементы матрицы назначений.

Начиная со второго раздела, рассматривается задача размещения на сети в виде цепи (ЗРЦ). Изучаются такие свойства оптимальных решений ЗРЦ, как связность областей обслуживания, а также согласованность пунктов размещения. Эти свойства оказались очень полезными при построении алгоритмов полиномиальной сложности для точного решения обычной (одноэтапной, простейшей) задачи размещения на сети в виде дерева [13–16] и так называемой задачи стандартизации [7–12]. Так, для отыскания точного решения одноэтапной задачи размещения на древовидной сети [13], на 2-дереве [16] и на k-дереве [17] найдены алгоритмы с временной сложностью $O(mn)$, $O(m^3n)$ и $O(m^{k+1}n)$ соответственно, где n и m — число вершин сети (пунктов спроса) и число возможных мест размещения предприятий в этих вершинах.

В третьем и четвертом разделах описаны алгоритмы A_2 и A_3 для точного решения двух- и трехэтапной ЗРЦ. Их временные сложности равны $O(m_1m_2n)$ и $O(m_1m_2m_3n)$ соответственно, где m_r — число возможных пунктов размещения r-го этапа. Для решения МЗРЦ предложенный подход позволяет построить алгоритм A_p с временной сложностью, зависящей линейно от числа точек спроса и экспоненциально от числа этапов.

В пятом разделе для точного решения МЗРЦ приводится алгоритм $\widetilde{A}_p$ с временно́й сложностью $O(n^3 \sum\limits_{i=1}^{p} m_r)$. Принципы построения алгоритмов A_p и $\widetilde{A}_p$ различны.

В шестом разделе показывается, что в МЗРЦ может не существовать оптимального центрального решения, при котором выбранные предприятия расположены внутри своих областей обслуживания.

Из небольшого сравнительного анализа в заключительных замечаниях следует, что для двух- и трехэтапных ЗРЦ предпочтительнее использовать алгоритмы A_2 и A_3, а при числе этапов, большем четырех, — алгоритм $\widetilde{A}_p$.

1. Постановка задачи

Содержательная постановка задачи состоит в следующем. Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ — множество пунктов спроса конечного продукта, $M_r \subset N$ — множество возможных пунктов размещения r-го этапа, $1 \leqslant r \leqslant p$;

g_i^r — затраты на размещение предприятия r-го этапа в пункте i, $i \in M_r$, $g_i^r \geqslant 0$;

c_{ij} — затраты, связанные с транспортировкой единицы продукта из пункта i в пункт j, $c_{ij} \geqslant 0$, $i, j \in N$;

b_j — объем спроса в пункте j, $b_j > 0$, $j \in N$.

Предполагается, что каждый пункт спроса конечной продукции и каждый пункт производства любого уровня получают продукцию только от одного производителя; при этом предприятие r-го уровня получает продукцию от предприятия $(r+1)$-го уровня, $1 \leqslant r \leqslant p-1$.

Требуется выбрать подмножества пунктов размещения каждого уровня (этапа) $I^r \subset M_r$, $r = 1, \dots, p$, и осуществить назначение выбранных предприятий на пункты спроса так, чтобы минимизировать суммарные затраты на размещение всех выбранных предприятий и на транспортировку продукта.

Сначала запишем математическую постановку задачи размещения (ЗР) в случае двух этапов с использованием следующих булевых переменных выбора и назначения соответственно:

• $x_i = 1$ $(y_k = 1)$, если предприятие 1-го (2-го) уровня размещается в пункте $i \in M_1$ $(k \in M_2)$, и $x_i = 0$ $(y_k = 0)$ в противном случае;

• $x_{kij} = 1$, если j-й пункт спроса обслуживается из k-го пункта 2-го уровня через i-й пункт 1-го уровня, и $x_{kij} = 0$ в противном случае.

С учетом введенных обозначений математическая формулировка двухэтапной ЗР может быть записана в следующем в виде: найти минимум функции

$$\sum_{i \in M_1} g_i^1 x_i + \sum_{k \in M_2} g_k^2 y_k + \sum_{j \in N} b_j \sum_{k \in M_2} \sum_{i \in M_1} (c_{ki} + c_{ij}) x_{kij} \tag{1}$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{k \in M_2} \sum_{i \in M_1} x_{kij} = 1, \ j \in N, \tag{2}$$

$$\sum_{k \in M_2} x_{kij} \leqslant x_i, \ j \in N, \ i \in M_1, \tag{3}$$

$$\sum_{i\in M_1} x_{kij} \leqslant y_k,\ j\in N,\ k\in M_2, \tag{4}$$

$$x_i, y_k, x_{kij} \in \{0,1\}. \tag{5}$$

Далее нам будет удобнее использовать постановку в эквивалентном виде, используя векторы назначения в качестве переменных, аналогично тому, как это было сделано для одноэтапной задачи размещения на сети [13–15].

Введем необходимые обозначения:

$\pi^r = (\pi_1^r, \ldots, \pi_n^r)$ — вектор назначения предприятий r-го уровня, где π_j^r — номер пункта из M_r, в котором размещено предприятие r-го уровня, участвующего в обслуживании j-го пункта спроса, $r = 1,2$, $1 \leqslant j \leqslant n$;

$\pi = (\pi^1, \pi^2)$ — пара векторов назначения;

$I^r(\pi) = \bigcup\limits_{j\in N} \{\pi_j^r\}$ — множество предприятий r-го уровня, задействованных решением $\pi, r = 1,2$;

$Y_i^r(\pi)$ — область обслуживания i-го предприятия r-го уровня, т. е. объединение по всем j таким, что $\pi_j^r = i$, $i \in M_r$, $r = 1,2$.

Очевидно, что $I^r(\pi) \subset M_r$; $\cup Y_i^r(\pi) = N$, где объединение берется по всем $i \in I^r(\pi)$, $r = 1,2$.

Двухэтапная ЗР в терминах переменных π_j^r записывается в более компактном виде: найти минимум функции

$$\sum_{i\in I^1(\pi)} g_i^1 + \sum_{k\in I^2(\pi)} g_k^2 + \sum_{j\in N} b_j(c_{\pi_j^2\pi_j^1} + c_{\pi_j^1 j}). \tag{6}$$

Аналогичным образом, но уже с помощью переменных из элементов $(p\times n)$-матрицы назначений $\pi = (\pi_j^r)$, $1 \leqslant r \leqslant p$, $j \in N$, может быть записана МЗР: найти минимум функции

$$\sum_{r=1}^{p} \sum_{k\in I^r(\pi)} g_k^r + \sum_{j\in N} b_j \sum_{r=1}^{p} c_{\pi_j^r \pi_j^{r-1}}, \tag{7}$$

где p — общее число этапов (уровней); π_j^r — номер пункта размещения r-го этапа, участвующего в обслуживании j-го пункта спроса; $\pi_j^r \in M_r$, $1 \leqslant r \leqslant p$; $\pi_j^0 = j$, $j \in N$; $I^r(\pi) = \bigcup\limits_{j\in N} \{\pi_j^r\}$ — множество задействованных предприятий уровня r, $1 \leqslant r \leqslant p$; $Y_i^r(\pi)$ — область обслуживания i-го предприятия r-го уровня, т. е. объединение по всем j таким, что $\pi_j^r = i$, $i \in M_r$, $1 \leqslant r \leqslant p$.

2. Задача размещения на цепи

Ниже будем рассматривать задачу размещения на цепи, в которой пункты спроса $1, \ldots, n$ соединены последовательно. В этой задаче затраты c_{ij} по транспортировке единицы продукта из пункта i в пункт j

складываются из длин ребер в подцепи, соединяющей эти пункты. Понятно, что в рассматриваемом случае для функции c_{ij} выполнено свойство неравенства треугольника:

$$c_{ij} \leqslant c_{ik} + c_{kj} \quad \text{при любых} \quad i, k, j \in N. \tag{8}$$

При построении экономных алгоритмов решения ряда задач размещения оказалось полезным свойство связности областей обслуживания преприятий.

• Решение π назовем *r-связным*, если для любого $i \in I^r(\pi)$ область $Y_i^r(\pi)$ точек спроса, обслуживаемых i-м предприятием r-го уровня, связна (в рассматриваемом случае размещения на цепи представляет собой целочисленный сегмент).

• Решение π для фиксированного r, $1 \leqslant r \leqslant p$, будем называть *$r$-согласованным*, если $\pi_1^r \leqslant \dots \leqslant \pi_n^r$.

Понятно, что r-связное решение может не быть r-согласованным, но любое r-согласованное решение является r-связным. Поэтому, чтобы подчеркнуть важность понятия связности, далее в ряде случаев согласованное решение мы будем также называть согласованно-связным.

• Решение называем *$(1, r)$-связным* (*согласованным*), если оно k-связно (согласованно) для всякого k, $1 \leqslant k \leqslant r$.

Пусть π — произвольная матрица назначения. Введем обозначения:

$r = r(\pi)$ — минимальный уровень, на котором нарушено свойство согласования (для $(1, p)$-согласованного решения такого параметра не существует);

$j(\pi)$ — максимально возможный номер j такой, что $\pi_1^r \leqslant \dots \leqslant \pi_j^r$;

$c_j^r(\pi) = c_{\pi_j^p \pi_j^{p-1}} + \dots + c_{\pi_j^r \pi_j^{r-1}}$, $j \in N$, $1 \leqslant r \leqslant p$.

Сформулируем в качестве замечаний следующие очевидные утверждения.

Замечание 1. Для каждой матрицы назначений π при любых $j \in N$ и r, $0 \leqslant r < p$, справедливо равенство

$$c_j^r(\pi) = c_j^{r+1}(\pi) + c_{\pi_j^r \pi_j^{r-1}}.$$

Замечание 2. Пусть π — оптимальная $(p \times n)$-матрица назначений, и π' — $(p \times n)$-матрица назначений, строки которой состоят только из элементов соответствующих строк матрицы π. Тогда

$$c_j^r(\pi) \leqslant c_j^r(\pi'), \quad j \in N, \quad 1 \leqslant r \leqslant p.$$

Теорема 1. *Существует оптимальное решение* МЗРЦ *с совокупностью $(1, p)$-согласованных областей обслуживания.*

Доказательство. Допустим, что $(1,p)$-согласованного оптимального решения не существует. Тогда для любой оптимальной матрицы найдется $r(\pi)$, $1 \leqslant r(\pi) \leqslant p$. Возьмем оптимальное решение π с максимально возможным $r = r(\pi)$, а среди таких решений — решение с максимальным $j = j(\pi)$. Ясно, что $j < n$, поскольку в противном случае можно было бы увеличить r.

Обозначим

$$l = \pi_j^{r-1}, \quad k = \pi_j^r, \quad l' = \pi_{j+1}^{r-1}, \quad k' = \pi_{j+1}^r.$$

В силу $(r-1)$-согласованности выбранного решения имеем

$$l \leqslant l', \tag{9}$$

а максимальность $j(\pi)$ влечет

$$k' < k. \tag{10}$$

Пусть $\widehat{\pi}$ — матрица назначений, полученная из π заменой элементов $\pi_j^r, \ldots, \pi_j^p$ на $\pi_{j+1}^r, \ldots, \pi_{j+1}^p$ соответственно; $\widetilde{\pi}$ — аналогичная матрица, полученная обратной заменой.

По замечанию 2 имеем $c_j^r(\pi) \leqslant c_j^r(\widehat{\pi})$ и $c_{j+1}^r \leqslant c_{j+1}^r(\widetilde{\pi})$. Последние неравенства с учетом замечания 1 и введенных обозначений можно переписать в виде

$$c_j^{r+1}(\pi) + c_{kl} \leqslant c_j^{r+1}(\widehat{\pi}) + c_{k'l}, \tag{11}$$

$$c_{j+1}^{r+1}(\pi) + c_{k'l'} \leqslant c_{j+1}^{r+1}(\widetilde{\pi}) + c_{kl'}. \tag{12}$$

Покажем, что в (12) строгое неравенство невозможно. Действительно, сложив в этом случае (11) и (12), с использованием очевидных тождеств

$$c_j^{r+1}(\pi) = c_{j+1}^{r+1}(\widehat{\pi}), \quad c_{j+1}^{r+1}(\pi) = c_j^{r+1}(\widetilde{\pi})$$

получаем строгое неравенство

$$c_{kl} + c_{k'l'} < c_{k'l} + c_{kl'}. \tag{13}$$

При $k \leqslant l'$ из (9) следует, что $k' < k \leqslant l'$. Отсюда и из равенства $c_{k'l'} = c_{k'k} + c_{kl'}$ после сокращения одинаковых членов получаем противоречащее свойству (8) неравенство

$$c_{k'k} + c_{kl} < c_{k'l}.$$

В случае $k > l'$ аналогичным образом получаем противоречивое неравенство

$$c_{k'l'} + c_{l'l} < c_{k'l}.$$

Таким образом, остается предположить, что (12) является равенством. Это влечет возможность замены матрицы π на $\widetilde{\pi}$, не увеличивая F^*. Поскольку в новой оптимальной матрице выполнено $\pi_j^r = k$, параметр $j(\pi)$ увеличился по крайней мере на 1, что противоречит его максимальности. Итак, показано, что не существует уровня $r(\pi)$, на котором имеет место рассогласование решения. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Существует оптимальное решение* МЗРЦ *с совокупностью* $(1,p)$*-согласованно-связных областей обслуживания.*

• Будем говорить, что решение π удовлетворяет свойству *вложенности*, если π имеет систему упорядоченных по вложению областей обслуживания, т. е.

$$Y^r_{\pi^r_j}(\pi) \subset Y^{r+1}_{\pi^{r+1}_j}(\pi) \tag{14}$$

для всяких j и r, где $j \in N$, $1 \leqslant r < p$.

Теорема 2. *Существует* $(1,p)$*-согласованно-связное оптимальное решение* МЗРЦ, *удовлетворяющее свойству вложенности.*

Доказательство. Допустим, что не существует $(1,p)$-согласованно-связного оптимального решения МЗРЦ, удовлетворяющего свойству вложенности. Пусть π — согласованно-связное оптимальное решение с максимально возможным уровнем r, для которого условие (14) нарушено. Тогда найдется минимальный номер $j = j(\pi)$, $1 < j \leqslant n$, такой, что

$$\pi^r_j = \pi^r_{j+1} = i, \quad \pi^{r+1}_j = k < \pi^{r+1}_{j+1} = k'.$$

Будем считать, что выбрано такое решение с максимально возможным значением параметра $j(\pi)$.

В случае $c^{r+1}_{j-1}(\pi) < c^{r+1}_j(\pi)$ при замене элементов $\pi^p_j, \ldots, \pi^{r+1}_j$ матрицы назначений на $\pi^p_{j-1}, \ldots, \pi^{r+1}_{j-1}$ соответственно значение целевой функции F^* уменьшается, что противоречит минимальности F^*.

При $c^{r+1}_{j-1}(\pi) \geqslant c^{r+1}_j(\pi)$, заменяя элементы $\pi^p_{j-1}, \ldots, \pi^{r+1}_{j-1}$ элементами $\pi^p_j, \ldots, \pi^{r+1}_j$ соответственно, в случае строгого неравенства также получаем противоречие с минимальностью F^*. В случае же равенства значение целевой функции не изменится, но увеличится по крайней мере на 1 значение параметра $j(\pi)$, что противоречит его максимальности. Теорема 2 доказана.

3. Алгоритм A_2 для решения двухэтапной ЗРЦ

Пусть $\langle M_1, M_2; N\rangle$ — исходная двухэтапная ЗРЦ. Рассмотрим семейство следующих задач:

$$\{\langle M^i_1, M^k_2; [1,j]\rangle \mid i \in M_1, k \in M_2, \quad 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

где $M^s_r = [1,s] \cap M_r$, $s \in M_r$, $r = 1,2$. (Этому семейству принадлежит и исходная задача.)

Оптимальное значение целевой функции (оптимум) в каждой из введенных подзадач обозначим через $L_{ik}(j)$, а оптимумы в подзадачах $\langle M^i_1, M^k_2; [1,j] \mid \pi^2_j = k\rangle$ и $\langle M^i_1, M^k_2; [1,j] \mid \pi^1_j = i, \pi^2_j = k\rangle$ — через $R_{ik}(j)$ и $F_{ik}(j)$ соответственно. Понятно, что $F_{ik}(1) = g^1_i + g^2_k + d_{ki1}$, где $d_{kij} =$

$(c_{ki}+c_{ij})b_j$, а величины $R_{ik}(j)$ ($F_{ik}(j)$) можно положить равными ∞ при $k\notin M_2$ (соответственно при $i\notin M_1$ или при $k\notin M_2$).

Ясно, что оптимум F^* в исходной задаче $\langle M_1,\ M_2;\ N\rangle$ равен

$$F^*=\min\{F_{ik}(n)\mid i\in M_1,\ k\in M_2\}.$$

Непосредственно из определения величин $F_{ik}(j)$, $R_{ik}(j)$, $L_{ik}(j)$ следует

Лемма 1. *При любых $i\in M_1$, $k\in M_2$ и $j\in N$ справедливы рекуррентные соотношения*

$$L_{ik}(j)=\min_{k'\in M_2^k}R_{ik'}(j), \tag{15}$$

$$R_{ik}(j)=\min_{i'\in M_1^i}F_{i'k}(j). \tag{16}$$

Теорема 3. *При любых $i\in M_1$, $k\in M_2$ величины $L_{ik}(j)$, $R_{ik}(j)$, $F_{ik}(j)$ могут быть вычислены с помощью следующих рекуррентных соотношений*:

$$L_{ik}(j)=\min\{L_{i,k-1}(j);\ R_{ik}(j)\},\ j\in N; \tag{17}$$

$$R_{ik}(j)=\min\{R_{i-1,k}(j);\ F_{ik}(j)\},\ j\in N; \tag{18}$$

$$F_{ik}(j)=g_i^1+g_k^2+d_{kij}+\min\{F_{ik}(j-1)-g_i^1-g_k^2;$$
$$R_{i-1,k}(j-1)-g_k^2;\ L_{i-1,k-1}(j-1)\},\ 1<j\leqslant n. \tag{19}$$

Доказательство. Формула (17) следует из (15):

$$L_{ik}(j)=\min_{k'\in M_2^k}R_{ik'}(j)=\min\{R_{ik}(j);$$

$$\min_{k'\in M_2^{k-1}}R_{ik'}(j)\}=\min\{L_{i,k-1}(j);\ R_{ik}(j)\}.$$

Формула (18) следует из (16):

$$R_{ik}(j)=\min_{i'\in M_1^i}F_{i'k}(j)=\min\{F_{ik}(j);$$

$$\min_{i'\in M_1^{i-1}}F_{i'k}(j)\}=\min\{R_{i-1,k}(j);\ F_{ik}(j)\}.$$

Докажем формулу (19).

Из существования оптимального (1,2)-согласованно-связного решения следует, что при $j>1$ в подзадаче $\langle M_1^i,\ M_2^k;\ [1,j]\mid\pi_j^1=i,\ \pi_j^2=k\rangle$ найдется интервал $(j',j]$ такой, что каждый пункт спроса обслуживается из предприятий в пунктах i,k (соответственно 1-го и 2-го уровней). При этом оптимальное решение в интервале $[1,j']$ совпадает с оптимумом по крайней мере одной из подзадач $\langle M_1^i,\ M_2^k;\ [1,j']\rangle$ либо $\langle M_1^{i-1},\ M_2^k;\ [1,j']\mid \pi^2_{j'}=k\rangle$. Таким образом,

$$F_{ik}(j)=\min_{1\leqslant j'<j}\{g_i^1+g_k^2+\sum_{t=j'+1}^{j} d_{kit}+\min(L_{i-1,k-1}(j');\ R_{i-1,k}(j')-g_k^2)\}.$$

Минимум по j' в интервале $[1,j)$ представим в виде минимума двух величин: выражения в фигурных скобках по области $[1,j-1)$ и этого же выражения при $j'=j-1$:

$$F_{ik}(j)=\min\Big\{g_i^1+g_k^2+d_{kij}+\min(L_{i-1,k-1}(j-1);\ R_{i-1,k}(j-1)-g_k^2);$$

$$\min_{1\leqslant j'\leqslant j-1}(g_i^1+g_k^2+\sum_{t=j'}^{j-1} d_{kit}+\min(L_{i-1,k-1}(j-1);R_{i-1,k}(j-1)-g_k^2))\Big\}$$

$$=\min\{g_i^1+g_k^2+d_{kij}+\min(L_{i-1,k-1}(j-1);\ R_{i-1,k}(j-1)-g_k^2);d_{kij}+F_{ik}(j-1)\}$$
$$=g_i^1+g_k^2+d_{kij}+\min\{L_{i-1,k-1}(j-1);\ R_{i-1,k}(j-1)-g_k^2;\ F_{ik}(j-1)-g_i^1-g_k^2\}.$$

Теорема 3 доказана.

Описание алгоритма A_2 для решения двухэтапной ЗРЦ

Прямой ход: вычисление функций $F_{ik}(j)$, $R_{ik}(j)$, $L_{ik}(j)$.

На предварительном шаге при каждом $j\in N$ величины

$$F_{0k}(j),\ R_{0k}(j),\ L_{0k}(j),\ k\in M_2,\quad \text{и}\quad F_{i0}(j),\ R_{i0}(j),\ L_{i0}(j),\ i\in M_1$$

приравниваем ∞.

Шаг 1. Полагаем

$$F_{ik}(1)=\begin{cases} g_i^1+g_k^2+d_{ki1} & \text{при } i\in M_1,\ k\in M_2,\\ \infty & \text{в противном случае}\end{cases}$$

и вычисляем $R_{ik}(1)$, $L_{ik}(1)$ по формулам (17)–(18).

Шаг j, $1<j\leqslant n$. При любых $i\in M_1$, $k\in M_2$ вычисляем $F_{ik}(j)$, $R_{ik}(j)$, $L_{ik}(j)$ по формулам (17)–(19).

Обратный ход: отыскание оптимальной матрицы назначений и мест размещения предприятий 1-го и 2-го этапов.

Предварительный шаг. Вычисляем оптимум F^* и элементы π_n^1, π_n^2 оптимальных векторов назначения в исходной задаче:

$$F^*=\min_{i\in M_1,\ k\in M_2} F_{ik}(n)=F_{\pi_n^1,\pi_n^2}(n).$$

Повторяем следующий общий шаг для $j=n,\dots,2$:

Шаг j. Обозначим $i = \pi_j^1$; $k = \pi_j^2$; $f_1 = F_{ik}(j-1) - g_i^1 - g_k^2$; $f_2 = R_{i-1,k}(j-1) - g_k^2$; $f_3 = F_{i-1,k-1}(j-1)$; $f_0 = F_{ik}(j) - g_i^1 - g_k^2 - d_{kij}$.

Уменьшив j на 1, полагаем

$$\pi_j^2 = \begin{cases} k & \text{при } f_0 < f_3, \\ k^0 & \text{при } f_0 = f_3, \end{cases}$$

где k^0 — решение уравнения

$$R_{i-1,k^0}(j) = \min\{R_{i-1,k'}(j) \mid k' \in M_2^{k-1}\}.$$

Сделав переприсвоение $k = \pi_j^2$, полагаем

$$\pi_j^1 = \begin{cases} i & \text{при } f_0 = f_1, \\ i^0 & \text{при } f_0 < f_1, \end{cases}$$

где i^0 — решение уравнения

$$R_{i^0,k}(j) = \min\{R_{i',k}(j) \mid i' \in M_1^{i-1}\}.$$

Теорема 4. *Временнáя сложность алгоритма* A_2 *не превосходит* $O(m_1 m_2 n)$.

Доказательство. На каждом шаге прямого хода вычисление величин $F_{ik}(j)$, $R_{ik}(j)$, $L_{ik}(j)$ осуществляется за константу действий, и временнáя сложность выполнения общего шага по j не превосходит $O(m_1 m_2)$. Для выполнения общего шага обратного хода требуется $O(m_1 + m_2)$ действий.

Таким образом, работа алгоритма A_2 в основном определяется выполнением прямого хода и его временнáя сложность не превосходит $O(m_1 m_2 n)$. Теорема 4 доказана.

4. Об алгоритмах A_3 и A_p для решения трехэтапной и многоэтапной ЗРЦ

Как и в случае двухэтапной ЗРЦ, введем следующие обозначения для трехэтапной ЗРЦ:

F^* — оптимум в исходной задаче, а для всяких $i \in M_1$, $k \in M_2$, $s \in M_3$ и $j \in N$

$L_{iks}(j)$ — оптимум в подзадаче $\langle M_1^i, M_2^k, M_3^s; [1,j] \rangle$;

$R_{iks}(j)$ — оптимум в подзадаче $\langle M_1^i, M_2^k, M_3^s; [1,j] \mid \pi_j^3 = s \rangle$;

$Q_{iks}(j)$ — оптимум в подзадаче $\langle M_1^i, M_2^k, M_3^s; [1,j] \mid \pi_j^2 = k, \pi_j^3 = s \rangle$;

$F_{iks}(j)$ — оптимум в подзадаче $\langle M_1^i, M_2^k, M_3^s; [1,j] \mid \pi_j^1 = i, \pi_j^2 = k, \pi_j^3 = s \rangle$.

Из определения введенных функций следует

Лемма 2. *При любых $i \in M_1$, $k \in M_2$, $s \in M_3$ и $j \in N$ справедливы рекуррентные соотношения*

$$L_{iks}(j) = \min_{s' \in M_3^s} R_{iks'}(j),$$

$$R_{iks}(j) = \min_{k' \in M_2^k} Q_{ik's}(j),$$

$$Q_{iks}(j) = \min_{i' \in M_1^i} F_{i'ks}(j).$$

Приведем без доказательства утверждения, аналогичные теоремам 3 и 4.

Теорема 5. *При любых $i \in M_1$, $k \in M_2$, $s \in M_3$ величины $L_{iks}(j)$, $R_{iks}(j)$, $Q_{iks}(j)$, $F_{iks}(j)$ могут быть вычислены с помощью следующих рекуррентных соотношений:*

$L_{iks}(j) = \min\{L_{ik,s-1}(j);\ R_{iks}(j)\}$, $j \in N$;

$R_{iks}(j) = \min\{R_{i,k-1,s}(j);\ Q_{iks}(j)\}$, $j \in N$;

$F_{iks}(1) = g_i^1 + g_k^2 + g_s^3 + d_{ski1}$;

$F_{iks}(j) = g_i^1 + g_k^2 + g_s^3 + d_{skij} + \min\{L_{i-1,k-1,s-1}(j-1);\ R_{i-1,ks}(j-1) - g_s^3;\ Q_{iks}(j-1) - g_k^2 - g_s^3;\ F_{iks}(j-1) - g_i^1 - g_k^2 - g_s^3\}$, $1 < j \leqslant n$, где $d_{skij} = (c_{sk} + c_{ki} + c_{ij})b_j$.

Теорема 6. *Трехэтапная* ЗРЦ *может быть решена за время* $O(m_1 m_2 m_3 n)$.

Идею построения алгоритма решения двух- и трехэтапной ЗРЦ нетрудно продолжить и для МЗРЦ. При этом получается алгоритм A_p, решающий задачу МЗРЦ с временно́й сложностью $O(nm_1m_2\ldots m_p)$, не превосходящей величины $O(m^p n)$, где $m = \max\{m_r \mid 1 \leqslant r \leqslant p\}$. Таким образом, на этом пути мы можем построить алгоритм с временно́й сложностью, зависящей линейно от числа точек спроса и экспоненциально от числа этапов. При этом оценки временно́й и емкостной сложности совпадают.

5. Алгоритм полиномиальной сложности для решения МЗРЦ

Ниже мы опишем алгоритм $\widetilde{A}_p$ с временно́й сложностью $O(n^3 \sum\limits_{r=1}^{p} m_r)$. Методы построения алгоритмов A_p и $\widetilde{A}_p$ принципиально отличаются друг от друга. В $\widetilde{A}_p$ существенно используются свойство вложенности оптимальных решений и сведение к специальной серии задач о ближайшем соседе (ЗБС) [7–10].

Под ЗБС будем понимать следующую задачу размещения точек на целочисленном сегменте $(0,\, n]$: минимизировать функцию

$$\sum_{s=1}^{m} f(x_{s-1}, x_s) \tag{20}$$

при ограничениях

$$0 = x_0 < \cdots < x_m = n, \tag{21}$$

$$m \geqslant 1. \tag{22}$$

ЗБС (20)–(22) обозначим через $\langle 0, n;\, f\rangle$, а оптимальное значение целевой функции — через $S(0, n;\, f)$. Для подзадач ЗБС и их оптимумов введем обозначения $\langle x, y;\, f\rangle$ и $S(x, y;\, f)$ соответственно, $0 \leqslant x < y \leqslant n$. Решение ЗБС может быть найдено за время $O(n^2)$ [9].

Пусть $\langle p;\, N\rangle$ обозначает исходную МЗРЦ, F^* — оптимум в этой задаче. При любых r, x и y таких, что $2 \leqslant r \leqslant p$, $0 \leqslant x < y \leqslant n$, введем в рассмотрение подзадачи МЗРЦ:

$$\langle\, r;\, (x, y] \mid \pi^r_{x+1} = \cdots = \pi^r_y = k\rangle, \tag{23}$$

$$\langle\, r;\, (x, y] \mid \pi^r_{x+1} = \cdots = \pi^r_y = k;\, \pi^{r-1}_{x+1} = \cdots = \pi^{r-1}_y;\, g^r_k = 0\rangle. \tag{24}$$

Минимальные значения целевых функций в этих подзадачах обозначим через $F^r_k(x, y)$ и $f^r_k(x, y)$ соответственно.

Для их вычисления воспользуемся рекуррентными соотношениями динамического программирования:

$$f^r_k(x, y) = \min_{i \in M_{r-1}} \{B(x, y)\, c_{ki} + F^{r-1}_i(x, y)\}, \tag{25}$$

$$F^r_k(x, y) = g^r_k + S(x, y;\, f^r_k), \tag{26}$$

где $B(x, y) = \sum\limits_{j=x+1}^{y} b_j$, $0 \leqslant x < y \leqslant n$, $k \in M_r$, $1 < r \leqslant p$.

Таким образом, подзадача (23) на интервале $(x, y]$ разбивается на последовательность подзадач вида (24) на интервалах $(x_{s-1}, x_s]$, $s = 1, \ldots, m$.

Теорема 7. *Оптимум F^* исходной задачи $\langle p;\, N\rangle$ совпадает с оптимумом задачи о ближайшем соседе $\langle 0, n;\, f\rangle$ с функцией*

$$f(x, y) = \min_{k \in M_p} F^p_k(x, y). \tag{27}$$

Доказательство. Пусть π — оптимальное согласованно-связное решение, удовлетворяющее свойству вложенности. Для него имеется набор предприятий p-го уровня $I^p(\pi) = \{k_s(\pi) \mid s = 1, \ldots, m(\pi)\}$ и области обслуживания $Y^p_{k_s(\pi)} = (x_{s-1}(\pi), x_s(\pi)], s = 1, \dots, m(\pi), 0 = x_0(\pi) < \dots < x_{m(\pi)}(\pi) = n$.

Из свойства вложенности следует, что оптимальное решение исходной задачи $\langle\, p;\ N = [1, n]\,\rangle$ складывается из оптимальных решений $m(\pi)$ подзадач вида $\langle\, x, y;\ f^r_k\,\rangle$ при $r = p, x = x_{s-1}(\pi),\ y = x_s(\pi),\ k = k_s(\pi)$, $s = 1, \dots, m(\pi)$, т. е.

$$F^* = \sum_{s=1}^{m(\pi)} F^p_{k_s(\pi)}(x_{s-1}(\pi), x_s(\pi)). \tag{28}$$

Пометим волной значения переменных, при которых функция (20) достигает минимума:

$$\sum_{s=1}^{\widetilde{m}} F^p_{\widetilde{k}_s}(\widetilde{x}_{s-1}, \widetilde{x}_s) = \min\Big\{\sum_{s=1}^{m} \min_{k_s \in M_p} F^p_k(x_{s-1}, x_s) \,\Big|\, 0 = x_0 < \dots < x_m = n,\ m \geqslant 1\Big\}. \tag{29}$$

Таким образом, достаточно показать равенство левых частей в (28) и (29). С одной стороны, имеем очевидное неравенство

$$F^* \leqslant \sum_{s=1}^{\widetilde{m}} F^p_{\widetilde{k}_s}(\widetilde{x}_{s-1}, \widetilde{x}_s). \tag{30}$$

С другой стороны, из (29) следует, что при любых k_s, x_s, $1 \leqslant s \leqslant m \leqslant n$, справедливо неравенство

$$\sum_{s=1}^{\widetilde{m}} F^p_{\widetilde{k}_s}(\widetilde{x}_{s-1}, \widetilde{x}_s) \leqslant \sum_{s=1}^{m} F^p_{k_s}(x_{s-1}, x_s).$$

Поскольку последнее неравенство верно также и при $m = m(\pi)$, $k_s = k_s(\pi)$, $x_s = x_s(\pi)$, $s = 1, \dots, m(\pi)$, то

$$\sum_{s=1}^{\widetilde{m}} F^p_{\widetilde{k}_s}(\widetilde{x}_{s-1}, \widetilde{x}_s) \leqslant \sum_{s=1}^{m(\pi)} F^p_{k_s(\pi)}(x_{s-1}(\pi), x_s(\pi)).$$

Отсюда с учетом (28) и (30) следует справедливость утверждения. Теорема 7 доказана.

Описание алгоритма $\widetilde{A}_p$ для решения МЗРЦ

Прямой ход: в цикле по r от 2 до p повторяем шаги 1a и 2a.

Шаг 1a. Для каждого $k \in M_r$ по формуле (25) вычисляем величины $f_k^r(x,y)$, $0 \leqslant x < y \leqslant n$.

Шаг 2a. Для каждого $k \in M_r$ решаем задачу о ближайшем соседе $\langle x,y;\ f_k^r \rangle$ с оптимизируемым числом интервалов, используя следующие рекуррентные соотношения:

$$(x,y;\ f_k^r) = \min_{x \leqslant x' < y} \{S(x,x';\ f_k^r) + f_k^r(x',y)\}, \tag{31}$$

и полагаем $F_k^r(x,y) = g_k^r + S(x,y;\ f_k^r)$, $0 \leqslant x < y \leqslant n$.

Шаг 3a. Решаем ЗБС верхнего уровня

$$F^* = \min\left\{\sum_{s=1}^{m} f(x_{s-1},x_s) \mid 0 \leqslant x_0 < \cdots < x_m = n,\ m \geqslant 1\right\}$$

с функцией f, определенной в (27).

Обозначим через $\widetilde{m}_p$ найденное оптимальное число предприятий уровня p.

Шаг 4a. Вычисляем номера предприятий p-го уровня

$$k_s^p = arg\min_{k \in M_r} \{F_k^p(x_{s-1},x_s) \mid \in M_p\},\quad 1 \leqslant s \leqslant \widetilde{m}_p,$$

где (x_s^p) — полученное на предыдущем шаге оптимальное разбиение множества пунктов спроса областями обслуживания предприятий p-го уровня, $1 \leqslant s \leqslant \widetilde{m}_p$.

Обратный ход: в цикле по $r = p-1,\ldots,1$ повторяем шаги 1b и 2b.

Шаг 1b. Последовательно решая задачи $\langle x_{s-1}^{r+1}, x_s^{r+1};\ f_k^{r+1}\rangle$, $k \in I^{r+1}$ (π), определяем оптимальное число $\widetilde{m}_r$ предприятий r-го уровня и границы (x_i^r) (упорядоченные по возрастанию) их областей обслуживания, $i = 1,\ldots,\widetilde{m}_r$.

Шаг 2b. Для каждой области $(x_{s-1}^r, x_s^r] \in Y_k^{r+1}$, $k \in I^{k+1}$, находим соответствующее оптимальное предприятие r-го уровня по формуле

$$k_s^r = arg\min_{i \in M_r} \{B(x_{s-1}^r, x_s^r)c_{ki} + F_i^r(x_{s-1}^r, x_s^r)\},\quad 1 \leqslant s \leqslant \widetilde{m}_r.$$

Конец работы алгоритма $\widetilde{A}_p$.

Теорема 8. *Временна́я и емкостная сложность алгоритма $\widetilde{A}_p$ не превосходит величин $O(n^3 \sum_{r=1}^{p} m_r)$ и $O(n^2 \sum_{r=1}^{p} m_r)$ соответственно.*

Доказательство. На прямом ходе алгоритма самым трудоемким является отыскание значений $S(x,y;\ f_k^r)$ на шаге 2a. При фиксированных $x \in [0,n)$, $k \in M_r$ и $r, 1 < r \leqslant p$, задача $\langle x,y;\ f_k^r \rangle$ с закрепленным правым концом $y = n$ решается за время, не превышающее $O(n^2)$ [9], с помощью рекуррентных соотношений (31). При этом попутно вычисляется вся совокупность значений $\{S(x,y;\, f_k^r),\ x < y \leqslant n\}$. Следовательно, на шаге 2а при фиксированном r, $1 < r \leqslant p$, временна́я сложность отыскания семейства

$$\{S(x,y;\, f_k^r),\ x < y \leqslant n\}, \quad k \in M_r, \quad 0 \leqslant x < n,$$

не превосходит $O(n^3 m_r)$.

Прямой ход выполняется при $r = 2, \ldots, p$ и в целом требует времени $O\Big(n^3 \sum\limits_{r=1}^{p} m_r\Big)$. Эта оценка остается справедливой и для временно́й сложности алгоритма $\widetilde{A}_p$, поскольку время выполнения обратного хода существенно меньше. Верхняя оценка памяти, требуемой для работы алгоритма, следует из необходимости хранить семейства функций $\{F_k^r(x,y)$, $f_k^r(x,y)$, $S(x,y;\, f_k^r)\}$, $0 \leqslant x < y \leqslant n$, $k \in M_r$, $1 < r \leqslant p$. Теорема 8 доказана.

6. О свойстве центральности решения в МЗРЦ

В работе [14] для одноэтапной ЗРЦ на сети в виде дерева было показано существование оптимального решения с так называемыми центрально-связными областями обслуживания. В этом случае размещаемые предприятия находятся внутри своих областей обслуживания и при построении алгоритма решения это обстоятельство удается использовать для уменьшения перебора по местам возможного расположения предприятий. Дадим определение свойства центральности на случай МЗРЦ и покажем, что здесь удается получать оптимальные решения, в которых центральными и, более того, центрально-связными оказываются только предприятия 1-го уровня, чего нельзя сказать о предприятиях, расположенных на более высоких уровнях.

• Решение π называем *r-центральным*, если $i \in Y_i^r(\pi)$ для всякого $i \in I^r(\pi)$.

• Решение π называем *$(1,r)$-центральным*, если оно k-центрально для всякого k, $1 \leqslant k \leqslant r$.

Утверждение 1. *Существует оптимальное решение* МЗРЦ *с совокупностью* 1*-центральных областей обслуживания.*

Доказательство. Пусть π — оптимальное согласованное решение, удовлетворяющее свойству вложенности, $I^1(\pi) = \{i_1, \ldots, i_{\widetilde{m}_1}\}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_{\widetilde{m}_1}$, и пусть s — максимальный номер такой, что $i_1 \in Y_{i_1}^1(\pi), \ldots, i_s \in Y_{i_s}^1(\pi)$.

Будем считать, что выбрано 1-согласованное решение с минимальным параметром $\widetilde{m}_1$, а если таких решений больше одного, то среди них выберем решение с максимальным значением параметра s, $s \leqslant \widetilde{m}_1$. Показав, что $s = \widetilde{m}_1$, мы докажем утверждение.

Допустим противное, т. е. $s < \widetilde{m}_1$. Обозначим $i' = i_{s+1}$, $Y' = Y^1_{i'}(\pi)$. Ясно, что $i' \notin Y'$.

В силу 1-согласованности решения между пунктом i' и областью Y' не содержится других пунктов $i \in I^1(\pi)$. Пусть i — ближайшее к Y' предприятие такое, что i' расположено на пути от i к Y'; l — ближайшая к Y' точка спроса из области $Y^1_i(\pi)$. Очевидно, что $\pi^1_l = i$.

Пусть j' — некоторая точка из Y', $k' = \pi^2_{j'}$, $i' = \pi^1_{j'}$. В силу свойства вложенности имеем $Y' \subset Y^2_{k'}(\pi)$, $\pi^2_j = k'$, $j \in Y'$.

Из оптимальности решения π и замечания 2 следуют неравенства

$$c^1_l(\pi) \leqslant c^1_l(\widetilde{\pi}), \quad c^1_j(\pi) \leqslant c^1_j(\widehat{\pi}), \tag{32}$$

где $\widetilde{\pi}$ получается из π заменой столбца π_l на столбец $\pi_{j'}$, а $\widehat{\pi}$ — заменой каждого столбца π_j, $j \in Y'$, на столбец π_l. Из последних неравенств с учетом замечания 1 получаем

$$c^2_l(\pi) + c_{il} \leqslant c^2_l(\widetilde{\pi}) + c_{i'l}, \tag{33}$$

$$c^2_j(\pi) + c_{i'j} \leqslant c^2_j(\widehat{\pi}) + c_{ij}, \quad j \in Y'. \tag{34}$$

Знак равенства в (34) для каждого $j \in Y'$ невозможен, так как в этом случае можно было бы перейти к матрице $\widehat{\pi}$, не увеличивая значения целевой функции, но уменьшив значение (минимального) параметра $\widetilde{m}_1$ по крайней мере на 1. Значит, найдется $j' \in Y'$, при котором неравенство (34) является строгим. Сложив неравенства (33) и (34) при $j = j'$, получаем

$$c_{il} + c_{i'j'} < c_{i'l} + c_{ij'}.$$

С учетом равенства $c_{il} = c_{ii'} + c_{i'l}$, справедливого в силу расположения пункта i' между пунктами i и l, получаем противоречие с неравенством треугольника:

$$c_{ii'} + c_{i'j'} < c_{ij'}.$$

Утверждение 1 доказано.

Следствие 2. *Существует оптимальное решение* МЗРЦ *с совокупностью* 1*-центральных связных областей обслуживания.*

Утверждение 2. *Оптимального решения* МЗРЦ *с совокупностью* $(1, p)$*-центральных областей обслуживания может не существовать.*

Доказательство. Справедливость утверждения вытекает из следующего минимального примера двухэтапной ЗРЦ, в которой не существует 2-центрального оптимального решения.

Множество точек спроса: $N = \{1, 2, 3\}$.

Объемы спроса: $b_j = 1$, $j \in N$.

Длины ребер: 1, 1.

Перечень предприятий 1-го уровня: $M_1 = \{1, 3\}$.

Перечень предприятий 2-го уровня: $M_2 = \{1, 2\}$.

Плата за размещение предприятий: $g_i^1 = \varepsilon$, $i \in M_1$, $g_k^2 = \varepsilon$, $k \in M_2$, $0 \leqslant \varepsilon < 0,5$.

	1	1	(веса ребер)
1	2	3	(цепь $N = \{1, 2, 3\}$)
1,2	2	1	(уровни предприятий)

В данном примере имеется единственное оптимальное решение со следующей матрицей назначений:

j	1	2	3
π_j^1	1	1	3
π_j^2	1	1	2

Оптимальное значение целевой функции равно $2 + 4\varepsilon$.

Видно, что имеют место 1- и 2-согласованность (а следовательно, и связность) и 1-центральность. Свойство 2-центральности нарушено, поскольку предприятие 2-го уровня, расположенное в пункте 2, не входит в свою область обслуживания $Y_2^2(\pi) = \{3\}$. Любая другая матрица назначений в данном примере приводит к увеличению значений целевой функции. Утверждение 2 доказано.

7. Заключительные замечания

Из оценок $O(nm_1m_2\dots m_p)$ и $O\left(n^3 \sum\limits_{r=1}^{p} m_r\right)$ временно́й сложности предложенных алгоритмов следует, что A_p выгодней алгоритма $\widetilde{A}_p$, если параметры задачи удовлетворяют условию

$$\sqrt{\frac{m_1 \dots m_p}{m_1 + \dots + m_p}} \leqslant n.$$

Обозначив $m = \max\{m_r \mid 1 \leqslant r \leqslant p\}$, для временно́й сложности алгоритмов A_p и $\widetilde{A}_p$ имеем верхние оценки $O(m^p\, n)$ и $O(p\, m\, n^3)$ соответственно. Отсюда видно, что в случае двух- и трехэтапных ЗРЦ алгоритмы A_2 и A_3 эффективнее сответствующих аналогов $\widetilde{A}_2$ и $\widetilde{A}_3$. Для числа этапов, большего четырех, надо отдать предпочтение алгоритму $\widetilde{A}_p$. Тем более, что требуемая для выполнения A_p (в отличие от $\widetilde{A}_p$) память растет экспоненциально в зависимости от числа этапов.

Вопрос о возможности построения полиномиальных алгоритмов решения МЗР на сети в форме дерева остается открытым и требует дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kaufman L., Eede M. V., Haunsen P. A.** A plant and warehouse location problem // Oper. Res. Quart. 1977. V. 28, N 3. P. 547–554.
2. **Ro H., Tcha D.** A branch and bound algorithm for the two-level uncapacitated facility location problem with some side constraints// European J. Oper. Res. 1984. V. 18, N 3. P. 349–358.
3. **Tcha D. W., Lee B.** A branch and bound algorithm for the multi-level uncapacitated facility location problem // European J. Oper. Res. 1984. V. 18, N 1. P. 35–43.
4. **Михалевич В. С., Трубин В. А., Шор Н. З.** Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. М.: Наука, 1986.
5. **Трубин В. А., Шарифов Ф. А.** Простейшая многоэтапная задача размещения на древовидной сети // Кибернетика и системный анализ. 1992. N 6. С. 128–135.
6. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М: Мир, 1982.
7. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
8. **Гимади Э.Х., Глебов Н. И.** Экстремальные задачи принятия решений. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1982.
9. **Гимади Э. Х.** Выбор оптимальных шкал в одном классе задач типа размещения, унификации и стандартизации // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1970. Вып. 6. С. 57–70.
10. **Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Некоторые задачи выбора оптимальных параметрических рядов и методы их решения (задачи стандартизации) // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1973. Вып. 27. С. 19–32.
11. **Береснев В. Л.** Алгоритмы минимизации полиномов от булевых переменных // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1979. Вып. 36. С. 225-246.
12. **Гимади Э. Х.** Задача стандартизации с данными произвольного знака и связными, квазивыпуклыми и почти квазивыпуклыми матрицами // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. Вып. 27. С. 3–11.
13. **Гимади Э. Х.** Эффективный алгоритм решения задачи размещения с областями обслуживания, связными относительно ациклической сети // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983. Вып. 23. С. 12–23.
14. **Гимади Э. Х.** Задача размещения на сети с центрально-связными областями обслуживания // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. Вып. 25. С. 38–47.

15. **Гимади Э. Х.** О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Наука, 1988. С. 89–115. (Тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 10).
16. **Агеев А. А.** Полиномиальный алгоритм решения задачи размещения на последовательно-параллельной сети // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. Вып. 30. С. 3–16.
17. **Ageev A. A.** A criterion of polynomial-time solvability for the network location problem // Integer Programming and Combinatorial Optimization. Proc. IPCO II Conf. Campus Printing. Carnegie Mellon University, 1992. P. 237–245.
18. **Granot D., Skorin-Kapov D.** On some optimization problems on k-trees and partial k-trees // Discrete Appl. Math. 1994. V. 48, N 2. P. 129–145.

Адрес автора:

Россия,
630090 Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН

Статья поступила
8 августа 1995 г.