ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1995. Том 2, № 4, 32–41

УДК 519.854

НИЖНИЕ ГРАНИЦЫ В ЗАДАЧЕ ВЫБОРА СОСТАВА ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ*)

Ю. А. Кочетов, М. Г. Пащенко

Для задачи выбора состава двухуровневых систем технических средств предлагаются нижние оценки целевой функции, построенные с использованием Лагранжевых релаксаций. Рассматриваются две оценки, получаемые в результате релаксации двух различных групп ограничений. Показано, что эти оценки могут быть найдены за полиномиальное время. Для полученных оценок, являющихся несравнимыми между собой, выделяются области доминирования.

Введение

Предположим, что для выполнения некоторой совокупности работ имеется система технических средств с разнородным качественным и количественным составом. Для выполнения работ технические средства объединяются в комплекты, которые могут рассматриваться как новые сложные технические средства, имеющие в своем составе унифицированные составные части. Процесс выполнения работ разбит на этапы, определенная часть работ выполняется на первом этапе, часть — на втором и т. д. На каждом этапе известная доля комплектов выходит из строя и в дальнейшем процессе выполнения работ не участвует. Задача состоит в том, чтобы найти состав системы, который позволил бы выполнить все работы с минимальными суммарными затратами.

Первые математические модели выбора состава двухуровневых систем технических средств были рассмотрены в [1]. Наиболее полно такие системы изучались в монографии [2], где, в частности, установлено сведение наиболее простой линейной задачи выбора состава двухуровневых систем к задаче минимизации полинома от булевых переменных. Большинство статей (см., например, [3–7]) посвящено исследованию частного случая рассматриваемой задачи — так называемой двухуровневой

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94–01–01326).

задаче размещения производства, обобщающей хорошо известную NP-трудную в сильном смысле задачу размещения [8]. Для двухуровневых задач размещения производства вопрос построения нижних границ и их взаимосвязь изучались в [7].

Данная статья посвящена нахождению нижних оценок целевой функции для задач выбора состава двухуровневой системы технических средств. Рассматриваются две нижние оценки, получаемые в результате ослабления двух различных групп ограничений. Показано, что эти оценки несравнимы между собой и могут быть вычислены за полиномиальное время. Выделяются области доминирования.

В § 1 приводится математическая постановка задачи. В § 2 доказываются основные утверждения. В § 3 устанавливается несравнимость полученных нижних оценок. В § 4 анализируются результаты тестовых расчетов.

§ 1. Постановка задачи

Обозначим через $J = \{1, 2, \dots, n\}$ множество работ, подлежащих выполнению. Будем предполагать, что множество J распадается на непересекающиеся подмножества J_l, $l \in L$, и выполнение работ производится в следующем порядке: сначала выполняются работы из множества J_1, затем — из множества J_2 и т. д. Множество $L = \{1, 2, \dots, r\}$ будем называть множеством этапов выполнения работ. Обозначим через $I = \{1, 2, \dots, m\}$ перечень образцов технических средств. Для выполнения работ технические средства объединяются в комплекты. Множество различных по составу комплектов обозначим через $K = \{1, 2, \dots, q\}$. Пусть для $k \in K$ множество $I_k \subseteq I$ задает состав комплекта k-го типа, а для $i \in I$ множество $K_i \subseteq K$ — перечень комплектов, имеющих в своем составе технические средства i-го образца. Для каждого комплекта k-го типа, $k \in K$, считаем известными следующие параметры:

v_k° — число комплектов, уже имеющихся в составе системы;

c_k° — стоимость разработки комплекта;

d_i — стоимость разработки технического средства i-го образца;

c_k — стоимость производства одного комплекта, включая стоимость входящих в его состав технических средств;

V_k — верхняя граница объемов производства комплектов;

p_{kj} — число комплектов, требующихся для выполнения j-й работы;

c_{kj} — стоимость выполнения комплектами j-й работы;

s_{kl} — доля убытия комплектов при выполнении работ на l-м этапе.

Введем в рассмотрение следующие переменные:

$$z_k = \begin{cases} 1, & \text{если комплекты } k\text{-го типа включены в} \\ & \text{состав системы,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если технические средства } i\text{-го образца} \\ & \text{включены в состав системы,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$v_k \geqslant 0$ — объем производства комплектов k-го типа;

$x_{kj} \geqslant 0$ — доля j-й работы, выполняемая комплектами k-го типа.

С использованием введенных обозначений задачу выбора состава двухуровневой системы можно записать в виде задачи P частично-целочисленного программирования

$$\min_{x,y,z,v} \Big(\sum_{k \in K} \Big(c_k^{\circ}\, z_k + c_k\, v_k + \sum_{j \in J} c_{kj}\, x_{kj} \Big) + \sum_{i \in I} d_i\, y_i \Big) \tag{1}$$

при условиях:

$$\sum_{k \in K} x_{kj} = 1, \quad j \in J; \tag{2}$$

$$\sum_{j \in J_l} p_{kj} x_{kj} \leqslant v_k^{\circ} z_k + v_k - \sum_{l'=1}^{l-1} s_{kl'} \sum_{j \in J_{l'}} p_{kj} x_{kj}, \quad k \in K, \quad l \in L; \tag{3}$$

$$0 \leqslant v_k \leqslant V_k z_k, \quad k \in K; \tag{4}$$

$$0 \leqslant x_{kj} \leqslant z_k, \quad k \in K, \quad j \in J; \tag{5}$$

$$y_i \geqslant z_k, \quad k \in K_i, \quad i \in I; \tag{6}$$

$$y_i, z_k \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad k \in K. \tag{7}$$

Целевая функция (1) имеет смысл суммарных затрат на разработку, производство и эксплуатацию комплектов технических средств. Равенства (2) гарантируют выполнение всех работ. Неравенства (3) выражают связь между объемами производства комплектов и объемами работ. Для каждой пары (k, l) левая часть неравенства (3) задает требующееся количество комплектов k-го типа на l-м этапе выполнения работ. Правая часть задает количество комплектов k-го типа, имеющихся в наличии к началу l-го этапа с учетом потерь на предыдущих этапах. Неравенства (4) устанавливают ограничения сверху на возможные объемы производства комплектов. Неравенства (5) и (6) допускают использование комплектов и технических средств только при включении их в состав системы.

§ 2. Нижние оценки

Рассмотрим две вспомогательные задачи L_f и L_h, которые получаются путем внесения в целевую функцию (1) части ограничений задачи P. Поставим в соответствие условиям (2) двойственные переменные α_j, $j \in J$. Обозначим через L_f задачу нахождения следующей величины:

$$f(\alpha) = \min_{x,y,z,v} \Big\{ \sum_{k \in K} \Big(c_k^\circ z_k + c_k v_k + \sum_{j \in J} (c_{kj} - \alpha_j) x_{kj} \Big) + \sum_{i \in I} d_i y_i \Big\}$$

при условиях (3)–(7). Соответствующая двойственная задача D_f, состоящая в нахождении величины

$$F = \max_{\alpha} \Big\{ f(\alpha) + \sum_{j \in J} \alpha_j \Big\},$$

позволяет вычислять нижнюю оценку целевой функции (1). Заменим неравенства (6) в системе ограничений задачи P на условия

$$y_i \geqslant \sum_{k \in K_i} x_{kj}, \quad i \in I, \quad j \in J. \tag{8}$$

Легко проверить, что при этом область допустимых значений не меняется. Поставим в соответствие каждому ограничению (8) двойственные переменные $\beta_{ij} \geqslant 0$, $i \in I$, $j \in J$, и обозначим через L_h следующую задачу:

$$h(\alpha, \beta) = \min_{x,y,z,v} \Big\{ \sum_{k \in K} \Big(c_k^\circ z_k + c_k v_k + \sum_{j \in J} \Big(c_{kj} - \alpha_j + \sum_{i \in I_k} \beta_{ij} \Big) x_{kj} \Big) + \sum_{i \in I} \Big(d_i - \sum_{j \in J} \beta_{ij} \Big) y_i \Big\}$$

при условиях (3)–(5), (7). Решение двойственной задачи D_h, состоящей в нахождении величины

$$H = \max_{\alpha, \beta} \Big\{ h(\alpha, \beta) + \sum_{j \in J} \alpha_j \Big\},$$

также доставляет нижнюю оценку для минимального значения целевой функции (1). Для удобства в дальнейшем для любой задачи S через $\overline{S}$ будем обозначать переход к линейной релаксации.

Теорема 1. *Задачи D_f и D_h полиномиально разрешимы.*

Доказательство. Покажем, что задача D_f полиномиально разрешима. Для каждого $k \in K$ рассмотрим вспомогательную задачу линейного программирования, состоящую в нахождении величины

$$g_k(\alpha) = \max_{x,v} \Big\{ \sum_{j \in J} (\alpha_j - c_{kj}) x_{kj} - c_k v_k - c_k^\circ \Big\}$$

при условиях (3), (4) и $0 \leqslant x_{kj} \leqslant 1$, $k \in K$, $j \in J$. Убедимся в том, что задача $\overline{L}_g$ нахождения величины

$$\overline{f}_g(\alpha) = \min_{y,z}\Big\{\sum_{i\in I} d_i y_i - \sum_{k\in K} g_k(\alpha) z_k\Big\}$$

при условиях (6) и $0 \leqslant y_i \leqslant 1$, $0 \leqslant z_k \leqslant 1$, $i \in I$, $k \in K$ имеет оптимальное целочисленное решение.

Пусть y_i^*, z_k^* — оптимальное решение задачи $\overline{L}_g$. Очевидно, что если $g_k(\alpha) \leqslant 0$, то $z_k^* = 0$. Если же $g_k(\alpha) > 0$, то $z_k^* = \min\limits_{i\in I_k} y_i^*$. Положим $\delta = \min\{y_i^* > 0, i \in I\}$; $I_\delta = \{i \in I \mid y_i^* = \delta\}$; $K_\delta = \{k \in K \mid z_k^* = \delta\}$; $\varepsilon_1 = \sum\limits_{i\in I_\delta} d_i$; $\varepsilon_2 = \sum\limits_{k\in K_\delta} g_k(\alpha)$. Если $\delta = 1$, то решение y_i^*, z_k^* — целочисленное. Предположим, что $\delta < 1$. Если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, то уменьшение величин y_i^*, z_k^*, $i \in I_\delta$, $k \in K_\delta$, приводит к уменьшению целевой функции. Если же $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то увеличение значений y_i^*, z_k^*, $i \in I_\delta$, $k \in K_\delta$, приводит к тому же эффекту. Следовательно, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, но тогда, полагая $y_i = 0$, $z_k = 0$, $i \in I_\delta$, $k \in K_\delta$, получаем новое оптимальное решение с большим значением параметра δ. Таким образом, если в оптимальном решении все дробные компоненты положить равными нулю, то получим оптимальное целочисленное решение задачи $\overline{L}_g$.

Заметим, что задачи $\overline{L}_g$ и $\overline{L}_f$ эквивалентны и оптимальные значения их целевых функций совпадают. Следовательно, задача D_f эквивалентна задаче $\overline{D}_f$, откуда и следует требуемое.

Убедимся в полиномиальной разрешимости задачи D_h. Для каждого $k \in K$ рассмотрим вспомогательную задачу линейного программирования

$$g_k(\alpha,\beta) = \max_{x,v}\Big\{\sum_{j\in J}\Big(\alpha_j - c_{kj} + \sum_{i\in I_k}\beta_{ij}\Big)x_{kj} - c_k v_k - c_k^\circ\Big\}$$

при условиях (3), (4) и $0 \leqslant x_{kj} \leqslant 1$, $k \in K$, $j \in J$. Тогда задача L_h состоит в нахождении величины

$$h(\alpha,\beta) = \min_{y,z}\Big\{\sum_{i\in I}\Big(d_i - \sum_{j\in J}\beta_{ij}\Big)\, y_i - \sum_{k\in K} g_k(\alpha,\beta) z_k\Big\}$$

при условиях (7). В отличие от задачи L_f, переменные y_i, $i \in I$, уже не связаны с другими переменными и их оптимальные значения определяются только знаком соответствующих коэффициентов. Значит, задача L_h является частным случаем задачи L_f и для нее переход к линейной релаксации также не меняет минимального значения целевой функции. Следовательно, задачи D_h и $\overline{D}_h$ эквивалентны. Теорема 1 доказана.

Задачи линейного программирования $\overline{D}_f$ и $\overline{D}_h$ имеют большую размерность, и решение их стандартными методами требует значительных усилий. Для вычисления нижних оценок F и H целесообразно использовать методы субградиентной оптимизации [9, 10]. На каждой итерации этого метода решаются задачи L_f и L_h, и по невязке в условиях (2) и (8) производится корректировка величин α_j, β_{ij}, $i \in I$, $j \in J$. Если задачи L_f и L_h полиномиально разрешимы, то такой подход имеет определенные преимущества. Сложность решения задачи L_h определяется сложностью нахождения величин $g_k(\alpha, \beta)$. Вычисление коэффициентов при переменных x_{kj} требует не более $O(qmn)$ операций. Нахождение величин $g_k(\alpha, \beta)$ может быть осуществлено с использованием не более $O(nq(r + \log q))$ операций [9]. Общая трудоемкость решения задачи L_h оценивается сверху величиной $O(qmn + nq(r + \log q))$.

Теорема 2. *Задача L_f может быть решена с трудоемкостью $O(m^2n + nq(r + \log q))$.*

Доказательство. Представим задачу L_f в виде

$$f(\alpha) = \min_{y,z}\Big\{\sum_{i\in I} d_i\, y_i - \sum_{k\in K} g_k(\alpha) z_k\Big\}$$

при условиях (6), (7). Без ограничения общности будем считать, что $g_k(\alpha) \geqslant 0$, $k \in K$. Запишем условия (6) в виде равенства

$$z_k = \prod_{i\in I_k} y_i, \quad k \in K,$$

и исключим переменные z_k из рассмотрения. Тогда задача L_f может быть представлена как задача минимизации полинома

$$\Phi(y) = \sum_{i\in I} d_i\, y_i - \sum_{k\in K} g_k(\alpha) \prod_{i\in I_k} y_i$$

от булевых переменных y_i, $i \in I$. Решение этой задачи может быть получено путем сведения ее к задаче о минимальном разрезе на двудольной сети [11]. Пусть $G = (V, E)$ — двудольная сеть с источником s, стоком t, множеством вершин $V = I \cup K \cup \{s, t\}$ и множеством дуг $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, где I — множество вершин одной доли, K — множество вершин другой доли, $E_1 = \{(s, i) \mid i \in I\}$, $E_2 = \{(i, k) \mid i \in I_k, k \in K\}$, $E_3 = \{(k, t) \mid k \in K\}$. Каждая дуга e имеет пропускную способность $w(e) \geqslant 0$, определяемую следующим образом:

$$w(e) = \begin{cases} d_i, & \text{если } e = (s,i) \in E_1, \\ W, & \text{если } e = (i,k) \in E_2, \text{ где } W > \sum\limits_{i\in I} d_i, \\ g_k(\alpha), & \text{если } e = (k,t) \in E_3. \end{cases}$$

Пусть φ — величина минимального разреза сети G. Очевидно, что минимальный разрез не содержит дуг из множества E_2. Ясно, что для любого решения $y_i \in \{0,1\}$ легко построить разрез сети G с пропускной способностью $\Phi(y)+\sum_{k\in K} g_k(\alpha)$. Для этого достаточно взять все дуги (s,i), для которых $y_i = 1$, и все дуги (k,t), для которых $\prod_{i\in I_k} y_i = 0$. Убедимся в справедливости обратного утверждения, т. е. для любого минимального разреза сети G существует решение $y_i \in \{0,1\}$ такое, что

$$\varphi = \Phi(y) + \sum_{k\in K} g_k(\alpha). \tag{9}$$

Пусть множество дуг $E' = E'_1 \cup E'_3$ является минимальным разрезом сети G. Положим

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } e = (s,i) \in E'_1, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и проверим справедливость равенства (9). Для этого достаточно убедиться в том, что множество E'_3 совпадает с множеством дуг $E_y = \{e = (k,t) \mid \prod_{i\in I_k} y_i = 0\}$.

Сначала покажем, что $E'_3 \supseteq E_y$. Предположим, что существует дуга $e \in E_y$ такая, что $e \notin E'_3$, т. е. для некоторого k справедливо $\prod_{i\in I_k} y_i = 0$ и дуга $(k,t) \notin E'_3$. В множестве I_k выберем i таким, что $y_i = 0$. Тогда дуга $(s,i) \notin E'_1$ и путь из s в t состоит из последовательности дуг (s,i), (i,k), (k,t), что невозможно.

Покажем теперь, что $E'_3 \subseteq E_y$. Предположим, что существует дуга $e = (k,t) \in E'_3$ такая, что $e \notin E_y$, т. е. $y_i = 1$, $i \in I_k$. По построению, любой путь из s в k проходит только через вершины множества I_k. Так как все ребра (s,i), $i \in I_k$, принадлежат E'_1, то удаление ребра (k,t) оставляет множество $E' \setminus \{(k,t)\}$ разрезом, что противоречит минимальности E'.

Таким образом, решение задачи L_f сводится к нахождению минимального разреза на двудольной сети G, что требует $O(m^2 n)$ операций [12]. Вычисление коэффициентов $g_k(\alpha)$, $k \in K$, можно осуществить за $O(nq(r+\log q))$ операций [9]. Общая трудоемкость решения задачи L_f оценивается сверху величиной $O(m^2 n + nq(r+\log q))$. Теорема 2 доказана.

§ 3. Соотношение величин F и H

Покажем, что нижние оценки F и H несравнимы между собой. При $v_k^\circ \geqslant \sum_{j\in J} p_{kj}$, $k \in K$, исходная задача P упрощается и состоит в нахождении величины

$$\min_{x,y,z}\Bigl(\sum_{k\in K}\Bigl(c_k^\circ\, z_k + \sum_{j\in J} c_{kj}\, x_{kj}\Bigr) + \sum_{i\in I} d_i\, y_i\Bigr)$$

при условиях:

$$\sum_{k\in K} x_{kj} = 1, \quad j \in J;$$

$$0 \leqslant x_{kj} \leqslant z_k, \quad k \in K, \quad j \in J;$$

$$y_i \geqslant z_k, \quad k \in K_i, \quad i \in I;$$

$$y_i, z_k \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad k \in K.$$

В работе [7] рассматривался частный случай этой задачи, когда $|I_k| = 2$ для всех $k \in K$. Установлено, что в этом случае $H \geqslant F$. (Ограничение $|I_k| = 2$, $k \in K$, несущественно, и утверждение справедливо для произвольных множеств I_k.)

Приведем пример исходных данных задачи P, на которых справедливо обратное неравенство, точнее, $F \geqslant NH$ для любого целого $N > 0$. Положим $K = I = \{1,2,\ldots,N\}$, $I_k = \{k\}$, $J = L = \{1\}$, $c_k^\circ = c_k = c_{kj} = V_k = 0$, $p_{kj} = d_i = 1$, $v_k^\circ = 1/N$, $k \in K$, $j \in J$, $i \in I$. Тогда задача D_f может быть записана следующим образом: найти величину

$$\max_\alpha\Big\{\alpha + \min_{x,y}\Big\{\sum_{i\in I} y_i - \sum_{k\in K} \alpha\, x_k\Big\}\Big\}$$

при условиях:

$$x_k \leqslant v_k^\circ, \quad 0 \leqslant x_k \leqslant y_k, \quad y_k \in \{0,1\}, \quad k \in K.$$

Эта задача распадается по k на независимые подзадачи нахождения величины

$$g(\alpha) = \min_{x,y}\{y - \alpha x\}$$

при условиях:

$$Nx \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant y, \quad y \in \{0,1\}.$$

Следовательно, $F = \max\limits_\alpha\{\alpha + Ng(\alpha)\}$. Заметим, что $g(\alpha) = \min(0, 1 - \alpha/N)$, откуда $F = \max\limits_\alpha\{\alpha + \min(0, N-\alpha)\} = N$.

Вычислим значение H на указанных исходных данных. На этих данных задача D_h может быть записана следующим образом: найти

$$H = \max_{\alpha,\beta}\Big\{\alpha + \min_{x,y}\Big\{\sum_{k\in K}(1-\beta_k)y_k + \sum_{k\in K}(\beta_k - \alpha)x_k\Big\}\Big\}$$

при условиях:

$$0 \leqslant Nx_k \leqslant 1, \quad y_k \in \{0,1\}, \quad k \in K.$$

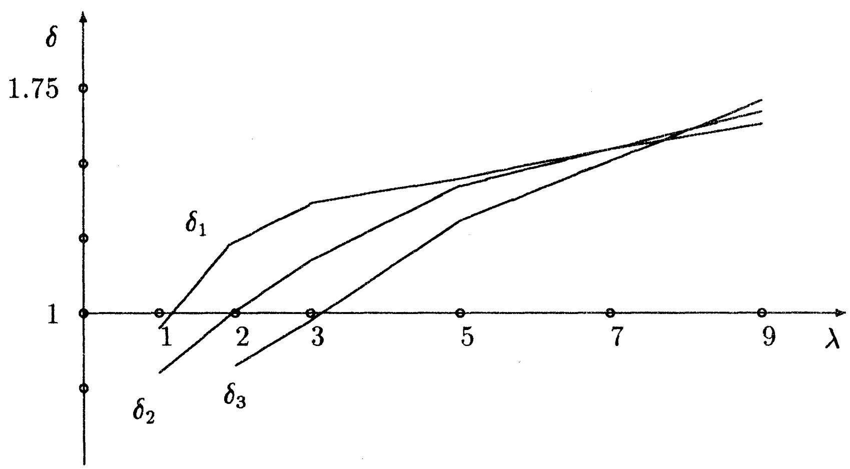
Оптимальные значения переменных β_k равны единице и $H = \max\limits_\alpha\{\alpha + \min(0; 1-\alpha)\} = 1$.

§ 4. Результаты тестовых расчетов

В предыдущем параграфе рассматривался пример исходных данных, на котором оптимальные значения всех переменных x_{kj} были достаточно близки к нулю. Такие примеры нетипичны. Дробные значения переменных x_{kj} появляются при жестких ограничениях (4) или малых значениях величин v_k°, $k \in K$. Ниже приводятся результаты тестовых расчетов, показывающие зависимость параметра $\delta = H/F$ от жесткости ограничений (3), (4).

Решаемые задачи имели размерность $m = 20$, $n = 20$, $q = 30$, $r = 4$. Значения величин выбирались следующим образом: $c_k^\circ = 50$, $c_k = 1$, $c_{kj} = s_{kl} = 0$, $d_i = 100$, $v_k^\circ = 0,25\lambda$, $V_k = \lambda$. Величины p_{kj} и множества I_k, $k \in K$, выбирались с помощью датчика псевдослучайных чисел с равномерным распределением. Множества I_k с вероятностью 0,2 содержали элементы множества I. Матрица (p_{kj}) на 30% заполнялась числом 10^6. Результаты расчетов изображены на рисунке. Нумерация кривых соответствует следующим значениям величин p_{kj}:

$$\delta_1 \text{ при } p_{kj} \in [1, 10], \quad \delta_2 \text{ при } p_{kj} \in [2, 4], \quad \delta_3 \text{ при } p_{kj} = 3.$$



Каждая точка излома на графике соответствует среднему геометрическому значению величины δ для 10 тестовых задач. Отметим, что при $\lambda < 1$ система ограничений исходной задачи несовместна. При $\lambda > 9$ ограничения (3), (4) становятся несущественными и исходная задача трансформируется в двухуровневую задачу стандартизации (см. [2], с. 262). В целом можно утверждать, что нижняя оценка F имеет некоторые преимущества при жестких ограничениях (3), (4) и хуже нижней оценки H в остальных случаях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Береснев В. Л.** О задаче выбора оптимальных рядов изделий и комплектующих узлов. I // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск, 1977. Вып. 16: Оптимальные процессы. С. 35–46.
2. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
3. **Михалевич В. С., Трубин В. А., Шор Н. З.** Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. М.: Наука, 1986.
4. **Ro H.-B., Tcha D.-W.** A branch and bound algorithm for the two-level uncapacitated facility location problem with some side constraints // European J. Oper. Res. 1984. V. 18, N 3. P. 349–358.
5. **Tcha D.-W., Lee B.-I.** A branch-and-bound algorithm for the multi-level uncapacitated facility location problem // European J. Oper. Res. 1984. V. 18, N 1. P. 35–43.
6. **Гончаров Е. Н.** Математическая модель и метод решения двухуровневой задачи стандартизации // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1994. С. 77–90. (Тр./ РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 28).
7. **Barros A. I., Labbe M.** A general model for the uncapacitated facility and depot location problem // Location Science. 1994. V. 2, N 3. P. 173–191.
8. **Krarup J., Pruzan P. M.** The simple plant location problem: survey and synthesis // European J. Oper. Res. 1983. V. 12, N 1. P. 36–81.
9. **Кочетов Ю. А., Пащенко М. Г.** Лагранжевы релаксации в задаче выбора оптимального состава системы технических средств // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск, 1993. Вып. 31: Оптимизация дискретных структур. С. 26–39.
10. **Held M., Wolfe P., Crowder H. P.** Validation of subgradient optimization // Math. Programming. 1974. V. 6, N 1. P. 62–88.
11. **Агеев А. А.** О минимизации некоторых полиномов от булевых переменных. // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск, 1981. Вып. 21: Целочисленные экстремальные задачи. С. 3–5.
12. **Gusfield D., Martel C., Fernandez-Baca D.** Fast algorithms for bipartite network flow // SIAM J. Comput. 1987. V. 16, N 2. P. 237–251.

Адрес авторов:

Россия,
630090 Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН

Статья поступила

27 января 1995 г.