ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1995. Том 2, № 4, 42–53

УДК 519.14

О РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ, В КОТОРЫХ КАЖДОЕ РЕБРО ЛЕЖИТ В БОЛЬШОМ ЧИСЛЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ*)

А. А. Махнёв

Неориентированный v-вершинный граф, в котором степени всех вершин равны k, а каждое ребро принадлежит точно λ треугольникам, называется реберно регулярным с параметрами (v, k, λ). Доказано, что реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ), в котором $3\lambda \geqslant 2k - 5$, либо имеет диаметр 2, либо является многоугольником или графом икосаэдра, либо в таком графе $k = 4$, $\lambda = 1$.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью* вершины a и обозначается через $[a]$. Через $a^{\perp}$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро в Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен, и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин, если $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ $(\mu(a, b))$, если $d(a, b) = 1 (d(a, b) = 2)$, а соответствующий подграф назовем λ- (μ-) подграфом.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94–01–00802-а) и фонда Госкомитета РФ по высшему образованию.

Граф Тервиллигера — это неполный граф Г, в котором для любых двух вершин a, b таких, что $d(a,b) = 2$, подграф $[a] \cap [b]$ является кликой порядка μ для некоторого фиксированного μ.

Обозначим через $(m_1, \ldots, m_n)$ полный n-дольный граф, с долями порядка $m_1, \ldots, m_n$. Если $m_1 = \cdots = m_n = m$, то граф $(m_1, \ldots, m_n)$ обозначается через $K_{n \times m}$. *Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$, и пары $\{a,b\}, \{c,d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют общий элемент. *Графом Тэйлора* называется вполне регулярный граф диаметра 3 такой, что каждая вершина лежит в $a^\perp \cup b^\perp$ для любых двух вершин с $d(a,b) = 3$. Граф Тэйлора на 12 вершинах, в котором окрестность любой вершины — пятиугольник, называется *графом икосаэдра.*

Под *α-расширением* графа Г будем понимать граф Г$'$, полученный заменой каждой вершины a из Г на полный подграф (a), содержащий α вершин (такой подграф называется *α-кликой*), причем вершины из (a) и (b) смежны в Г$'$ тогда и только тогда, когда a и b смежны в Г. Для вершины a регулярного графа Г *ядро* $K(a)$ — это множество вершин $\{x \in \Gamma \mid x^\perp = a^\perp\}$. Вершина a называется *редуцированной*, если $K(a) = \{a\}$. Граф Г называется *редуцированным*, если все его вершины редуцированы. Для подграфа Δ через $|\Delta|$ обозначим число его вершин.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Г, то через $b_i(u,w)$ $(c_i(u,w))$ обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ $(\Gamma_{i-1}(u))$ с $[w]$. Через $b_1(\Gamma)$ обозначим $\max\{b_1(u,w) \mid uw$ — ребро из $\Gamma\}$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v,k,λ) значение $b_1(u,w)$ не зависит от выбора ребра uw и равно $k - \lambda - 1$.

В [1] доказано, что диаметр любого неполного связного реберно регулярного графа степени k, $k \geqslant 3b_1$, не превосходит 2, а число его вершин не больше $2k - 2$ (см. лемму 1.4.2). В данной работе получена граница для диаметра редуцированных регулярных графов с $k \geqslant 3b_1 - 2$.

Теорема. *Пусть Г — связный регулярный редуцированный граф степени k, причем $k \geqslant 3b_1 - 2$. Тогда либо диаметр графа Г меньше 4, либо Г является n-угольником, $n \geqslant 8$, либо $k = 4$, $b_1 = 2$ и $\lambda(a,b) = 1$ или 2 для любого ребра ab.*

Следствие. *Пусть Г — связный реберно регулярный граф с параметрами (v,k,λ), в котором $k \geqslant 3b_1 - 2$ (эквивалентно: $3\lambda \geqslant 2k - 5$). Тогда либо Г — многоугольник или граф икосаэдра, либо $k = 4$ и каждое ребро в Г лежит в единственном треугольнике, либо Г — граф диаметра 2 с не более чем $2k + 4$ вершинами.*

Следствие редуцирует задачу описания реберно регулярных графов с $\lambda \geqslant k - \lfloor k/3 \rfloor - 2$ к случаю $k \equiv 0 \pmod 3$. Заметим, что если в графе

Г окрестности вершин являются шестиугольниками, то $b_1(\Gamma) = 3$ и $k = 3b_1 - 3$. В. Д. Падучих показал (не опубликовано), что граф такого вида может иметь сколь угодно большой диаметр. Действительно, можно взять прямоугольную таблицу размером $m \times n$, в которой элемент с координатами (i,j) (т. е. элемент в i-й строке и j-м столбце) смежен с элементами, имеющими координаты $(i-1,j), (i+1,j), (i,j-1), (i,j+1), (i-1,j-1), (i+1,j+1)$, а затем отождествить нижнюю строку с верхней, последний столбец с первым (так получается граф Шрикханде из 5×5 таблицы).

§ 1. Вспомогательные утверждения

В доказательстве теоремы используется следующее

Предложение 1. *Пусть* Γ *— связный регулярный граф диаметра, большего 2, в котором* $\mu(u,w) \geqslant b_1$ *для любых двух вершин* u,w *на расстоянии 2, лежащих в некотором кратчайшем пути длины 3. Тогда* Γ *является* b_1*-расширением многоугольника или каждая вершина из* Γ *лежит в* $u^\perp \cup w^\perp$ *для любых вершин* u,w *таких, что* $d(u,w) = 3$.

Это предложение обобщает теорему Ноймайера [1, теорема 1.5.5]: вполне регулярный граф диаметра не меньше 3 с $\mu = k - \lambda - 1$ является графом Тейлора.

В доказательстве предложения 1 используются некоторые вспомогательные утверждения (леммы 1.1–1.4). Пусть Γ — граф, удовлетворяющий условиям предложения 1, $eacw$ — кратчайший 3-путь между вершинаи e и w, $\lambda = k - b_1 - 1$, $\Delta(x) = \Gamma_3(w) \cap x^\perp$ для $x \in \Gamma_2(w)$, $\Delta = \Delta(a)$.

Лемма 1.1. *Для графа* Γ*, удовлетворяющего условиям предложения 1, выполняются следующие утверждения:*

(a) $[a] \subset e^\perp \cup w^\perp$, $\mu(e,c) = \mu(a,w) = b_1$ *и* $\lambda(e,a) = \lambda(c,w) = \lambda$;

(b) $[a] - w^\perp \subset x^\perp$ *для* $x \in \Delta$. *В частности,* Δ *— клика и* $\Delta(y) = \Delta$ *для* $y \in [e] \cap [c]$;

(c) $\Delta(y) = \Delta$ *для* $y \in [a] \cap \Gamma_2(w)$, $\Delta = \Gamma_2(c) \cap \Gamma_3(w)$.

Доказательство. С одной стороны, число вершин в $[a] - e^\perp$ не больше b_1. С другой стороны, $\mu(a,w) \geqslant b_1$. Поэтому $[a] - e^\perp = [a] \cap w^\perp$, $\mu(u,w) = b_1$, $|[a] \cap [e]| = \lambda$ и утверждение (a) доказано.

Пусть $x \in \Delta$. По утверждению (a) леммы 1.1 имеем $[a] - w^\perp \subset x^\perp$. Поэтому $[a] \cap e^\perp = [a] \cap x^\perp$ для $x \in \Delta$. В частности, Δ — клика. Если $y \in [e] \cap [c]$, то $[c] - w^\perp \subset [z]$ для $z \in \Delta(y)$, поэтому $z \in [a]$ и $\Delta(y) = \Delta$, т. е. утверждение (b) справедливо.

Пусть $y \in [a] \cap \Gamma_2(w)$. По утверждению (a) леммы 1.1 имеем $[a] - [w] \subset x^\perp$ для любого $x \in \Delta$, в частности $y \in [x]$ и $\Delta(y) = \Delta$.

Пусть $x \in \Gamma_2(c) \cap \Gamma_3(w)$. Тогда $[c] - [w] \subset x^\perp$, в частности $a \in [x]$, и утверждение (c) доказано.

Лемма 1.2. *Если $[e] \cap \Gamma_3(w) \neq \Delta$, то граф Γ является b_1-расширением семиугольника.*

Доказательство. Пусть $z \in [e] \cap \Gamma_3(w) - \Delta$. По утверждению (c) леммы 1.1 имеем $d(c, z) = 3$. Выберем некоторый путь $zuyw$ в Γ, тогда $\Lambda = eacwyuz$ — путь длины 7. По лемме 1.1 $[a] \cap [w] \subset \Gamma_3(z)$ и аналогично $[a] \cap [z] \subset \Gamma_3(w)$. Поэтому $[a] \subset [w] \cup e^\perp$ и $[a] \subset [z] \cup c^\perp$ для любых $e \in [a] \cap [z]$, $c \in [a] \cap [w]$. Отсюда, в частности, следует, что $[a] \subset c^\perp \cup e^\perp$, а μ-подграфы $[a] \cap [w]$ и $[a] \cap [z]$ являются кликами, $k \leqslant 3b_1 - 1$, $\lambda \leqslant 2b_1 - 2$.

Покажем, что расстояние между любыми двумя вершинами в семиугольнике Λ совпадает с расстоянием между ними в Γ. Допустим, что $d(u, a) = 2$ и выберем $x \in [a] \cap [u]$. Ввиду утверждения (c) леммы 1.1 имеем $x \notin [w]$. Если $x \in \Gamma_2(w)$, то $x \in [e] \cap [z]$, что снова противоречит утверждению (c) леммы 1.1. Значит, $x \in \Gamma_3(w)$. Заметим, что $d(c, u) = 2$, иначе по утвеждению (a) леммы 1.1 имеем $e \in u^\perp \cup c^\perp$. Теперь по утверждению (a) леммы 1.1, примененному к 3-пути, проходящему через c, u, z, получим $y \in c^\perp$. Но в этом случае $([a] \cap [w]) \cup ([u] \cap [w])$ — клика из $2b_1$ вершин и $\lambda(c, y) \geqslant 2b_1 - 1$. Это противоречит тому, что $cyuz$ — кратчайший 3-путь между вершинами c, z. Значит, $d(u, a) = 3$.

Допустим, что $d(a, y) = 2$ и $x \in [a] \cap [y]$. Для 3-пути $axyu$ вершина $w \in [y]$ должна лежать в $[a] \cup u^\perp$. Противоречие. Значит, $d(y, a) = 3$. Теперь легко понять, что граф Λ является семиугольником, причем все μ-подграфы в Λ оказываются кликами, $k = 3b_1 - 1, \lambda = 2b_1 - 2$. Заметим, что $[z] \cap [a] = \Delta$, $[u] \cap [e] = \Delta(u)$ и $e^\perp \cup z^\perp$ является $(\lambda+2)$-кликой. Поэтому $\Delta = K(e)$, $\Delta(u) = K(z)$ и Γ является b_1-расширением семиугольника. Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. *Если диаметр графа больше 3, то Γ является b_1-расширением многоугольника.*

Доказательство. Пусть $zeacw$ - кратчайший путь длины 4 между вершинами z, w. Тогда $[a] \cap [z] \subset \Gamma_3(w)$. Ввиду леммы 1.1 $\Delta \subset [e] - [c] = [e] \cap z^\perp$, $[a] - c^\perp = [a] \cap [z]$, причем $[a] \cap z^\perp$ лежит в Δ. Отсюда $[a] \cap z^\perp = \Delta$. По лемме 1.2 имеем $\Delta = e^\perp \cap \Gamma_3(w)$ и $x^\perp = e^\perp$ для любой вершины x из Δ. Теперь $[a] \cap [z] = K(e)$ и $b_2(w, a) = b_1$. По симметричности $[a] \cap [w] = K(c)$, следовательно, $[a] \subset K(c) \cup K(e) \cup ([c] \cap [e])$ и $[c] \cap [e] = K(a)$. Таким образом, $k = 3b_1 - 1$ и вершина из $[w] - c^\perp$ лежит в $\Gamma_4(e)$. Теперь ввиду связности Γ для любой вершины x имеем $|K(x)| = b_1$ и Γ является b_1-расширением многоугольника. Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. *Если* Γ *не является* b_1*–расширением многоугольника, то* $\Gamma_3(w) = K(e)$.

Доказательство. Пусть Γ не является b_1-расширением многоугольника. По лемме 1.3 диаметр графа Γ равен 3, а по лемме 1.2 имеем $\Gamma_3(w) \cap [e] = \Delta$. Пусть $u \in \Gamma_2(w) \cap [e]$. Так как $\Gamma_3(w) \cap [e] = \Delta(u)$ по лемме 1.2, то $\Delta = K(e)$. Допустим, что $\Gamma_3(w)$ содержит вершину $y \notin \Delta$, и выберем путь $yuzw$. Из утверждения (c) леммы 1.1 следует, что $d(e,z) = 3$. С другой стороны, $z \in \Gamma_3(e) \cap [w]$, поэтому $z \in K(w)$. Противоречие с тем, что $d(y,w) = 3$.

Докажем предложение 1. Ввиду леммы 1.3 можно считать, что Γ — граф диаметра 3. Из лемм 1.1, 1.4 следует, что $e^\perp \cup w^\perp$ индуцирует связную компоненту графа Γ. Поэтому каждая вершина из Γ лежит в $e^\perp \cup w^\perp$ для любых вершин u, w таких, что $d(a,b) = 3$.

§ 2. Редуцированные графы большого диаметра

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть Γ — связный регулярный редуцированный граф степени k, $k \geqslant 3b_1 - 2$, $eacw$ — кратчайший 3-путь между вершинами e и w, $\lambda = k - b_1 - 1$. Напомним, что граф редуцирован, если ядро $K(a)$ состоит из единственной вершины для любой вершины a графа.

Лемма 2.1. *Пусть* y, z *— не смежные вершины из* $[a]$. *Если* $\mu(y,z) < b_1$, *то* $[y] \cap [z]$ *— клика с* $b_1 - 1$ *вершинами,* $k = 3b_1 - 2$, $\lambda = 2b_1 - 3$ *и* $[x] \subset y^\perp \cup z^\perp$ *для* $x \in [y] \cap [z]$.

Доказательство. Заметим, что $[x] - y^\perp$ и $[x] - z^\perp$ содержат не более чем по b_1 вершин, поэтому $[y] \cap [z]$ содержит по крайней мере $k - 2b_1$ вершин из $[x]$. Если $\mu(y,z) < b_1$, то $[y] \cap [z]$ — клика из $b_1 - 1$ вершин, $k = 3b_1 - 2$, $\lambda = 2b_1 - 3$ и $[x] \subset y^\perp \cup z^\perp$ для любой вершины $x \in [y] \cap [z]$.

Лемма 2.2. *Если* $\mu(y,z) = b_1$ *для любых двух вершин таких, что* $d(y,z) = 2$, *то* Γ *— многоугольник или граф икосаэдра.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\Gamma_3(x)$ не пусто для любой вершины x. В противном случае из предложения 1 следует, что в $\Gamma_2(x)$ имеется $k+1$ вершина. Число ребер между $[a]$ и $\Gamma_2(a)$ не больше kb_1 и не меньше $(k+1)b_1$. Из редуцированности графа Γ и предложения 1 следует, что Γ — многоугольник или граф Тэйлора. Если Γ — граф Тэйлора, то $\mu = b_1$, $k = \lambda + \mu + 1$ и по условию $\lambda \geqslant 2\mu - 3$. С другой стороны, по теореме 1.5.3 [1] $k(\Delta) = 2\mu(\Delta)$ для любой окрестности Δ вершины из Γ. Поэтому μ-подграф в графе·Тэйлора является регулярным степени $(1/2)\lambda(\Gamma) \geqslant \mu - 3/2$. Таким образом, Γ — граф Тервиллигера степени $k = 2\lambda + 3 - \mu$. По теореме 1.2.3 [1] Γ является графом икосаэдра или графом с $\mu = 1$. Но в последнем случае $k = 2$ и Γ — шестиугольник. Лемма 2.2 доказана.

Если $b_1 = 1$, то по следствию 1.1.6 [1] граф Γ является многоугольником или графом $K_{n\times 2}$. Если $b_1 = 2$, то $k = 4$ и $\lambda(x, y) = 1$ или 2 для любого ребра xy. Из лемм 2.1, 2.2 следует, что $k = 3b_1 - 2$, $\lambda = 2b_1 - 3$, $b_1 > 2$.

Лемма 2.3. *Степень любой вершины в μ-графе не меньше $b_1 - 2$.*

Доказательство. Пусть $d(y, z) = 2, x \in [y] \cap [z]$. Тогда $[x]$ содержит по крайней мере $2(2b_1 - 2) - \alpha$ вершин из $y^\perp \cup z^\perp$, где α — степень вершины x в графе $y^\perp \cap z^\perp$. По лемме 2.1 имеем $2(2b_1 - 2) - \alpha \geqslant 3b_1 - 2$, поэтому $\alpha \geqslant b_1 - 2$.

Лемма 2.4. *Подграф $e^\perp \cap c^\perp$ является кликой.*

Доказательство. Пусть a, x — не смежные вершины из $e^\perp \cap c^\perp$. Согласно лемме 2.1 имеем $|e^\perp \cap c^\perp| = b_1$. Поэтому $|[c] \cap [w]| = \lambda$. Далее, по лемме 2.3 степени вершин a, x в μ-графе $e^\perp \cap c^\perp$ равны $b_1 - 2$. Следовательно, $|[c] \cap [y]| = \lambda = |[y] \cap [e]|$ и $[y] \subset e^\perp \cup c^\perp$ для $y \in \{a, x\}$. Поэтому $[c]$ содержит a и по крайней мере $2(2b_1 - 2) - \alpha$ вершин из $x^\perp \cup w^\perp$, где α — степень c в графе $x^\perp \cap w^\perp$. Значит, $\alpha = b_1 - 1$, $|[c] \cap [x]| = \lambda = |[c] \cap [w]|$ и $[x] \cap [w]$ лежит в $c^\perp$. Используя симметрию, имеем $|[c] \cap [a]| = \lambda$, $[a] \cap [w]$ содержит b_1 вершин и лежит в $c^\perp$. Наконец, граф $[c]$ содержит вершину w и по крайней мере $2(2b_1 - 2) - \beta$ вершин из графа $x^\perp \cup a^\perp$, где β — степень вершины c в графе $x^\perp \cap a^\perp$. Значит, $\beta \geqslant b_1 - 1$ и $x^\perp \cap a^\perp$ содержит вершину $d \in [c] \cap [w]$.

Окрестность вершины d содержит не смежные вершины a, x из $[e]$. Поэтому ее можно взять в качестве c. Пусть $[d]$ содержит γ вершин из $[w] \cap [c] - a^\perp$. Тогда $[d]$ содержит $b_1 - 1 - \gamma$ вершин из $[w] - c^\perp$. Поэтому граф $[x] \cap [w]$ содержит не более γ вершин вне $a^\perp$ и граф $[x]$ содержит по крайней мере $b_1 - \gamma$ вершин из $[a] \cap [w]$. Итак, $\Gamma_2(a)$ содержит x, по $b_1 - 1$ вершин из $[e]$ и $[c]$, отличных от x, и $b_1 - 1 - \gamma$ вершин из $[d]$. Поэтому $|\Gamma_2(a)| \geqslant 3b_1 - 2 - \gamma$. Далее, число ребер между $\Gamma_2(a)$ и $[a]$ не больше $(2b_1 - 3)b_1$ и не меньше $2b_1 - 1 - \gamma + b_1 + (3b_1 - \gamma - 4)(b_1 - 1)$. Отсюда следует неравенство $(\gamma + 4)(b_1 - 1) \geqslant b_1^2 + 3b_1 - 1 - \gamma$. Противоречие с тем, что $\gamma \leqslant b_1 - 1$. Лемма 2.4 доказана.

В леммах 2.5–2.7 предполагается, что диаметр графа Γ не меньше 4. Пусть $ueacw$ — кратчайший путь длины 4 между вершинами u, w, граф $\Delta = a^\perp - (u^\perp \cup w^\perp)$.

Лемма 2.5. *По крайней мере два из трех μ-подграфов для пути $ueacw$ содержат по $b_1 - 1$ вершин.*

Доказательство. Сначала допустим, что $\mu(u, a) = \mu(w, a) = b_1$. Тогда граф Δ содержит $b_1 - 1$ вершин и $e^\perp \cap c^\perp = \Delta$ для любых вершин $e \in a^\perp \cap u^\perp$, $c \in a^\perp \cap w^\perp$. Поэтому $\Delta = K(a)$, что противоречит редуцированности графа.

Пусть $\mu(u,a) = \mu(e,c) = b_1$. Тогда $\mu(w,a) = b_1 - 1$ и $|\Delta| = b_1$. Если $d \in a^\perp \cap w^\perp$, то $[a] \cap [d]$ содержит $b_1 - 2$ вершин из $[w]$ и $b_1 - 1$ вершин из Δ. Итак, $\Delta = e^\perp \cap d^\perp$ для любой вершины $d \in a^\perp \cap w^\perp$.

Если f — отличная от e вершина из $a^\perp \cap u^\perp$, то $[a] \cap [f]$ содержит $b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [a]$ и по крайней мере $b_1 - 2$ вершин из $\Delta - \{a\}$. Следовательно, каждая отличная от e вершина из $a^\perp \cap u^\perp$ не смежна только с одной вершиной из Δ. Обратно, из редуцированности графа следует, что каждая отличная от a вершина из Δ не смежна с единственной вершиной из $a^\perp \cap u^\perp$.

Пусть $x \in \Delta - \{a\}$, $y \in [x] - a^\perp$. Если $[y]$ содержит вершины $e \in [u] \cap [a]$ и $c \in [w] \cap [a]$, то μ-граф $[e] \cap [c]$ не является кликой. Так как $[x] \cap [y]$ содержит не более $b_1 - 2$ вершин из Δ, то $[x] \cap [y]$ содержит точно $b_1 - 2$ вершин из Δ и либо $b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [a] - \{e\}$, либо все $b_1 - 1$ вершин из $[w] \cap [a]$. В первом случае получаем противоречие с тем, что x не смежна с некоторой вершиной из $[u] \cap [a]$. Во втором случае $|[x] \cap [d]| = \lambda + 1$ для $d \in a^\perp \cap w^\perp$. Поэтому $\mu(x,w) = b_1$, и по рассуждению из предыдущего абзаца каждая вершина из $[u] \cap [x]$ должна быть смежна с y. Противоречие. Лемма 2.5 доказана.

Лемма 2.6. $\mu(u,a) = \mu(a,w) = b_1 - 1$.

Доказательство. Допустим, что $\mu(u,a) = b_1$. Тогда $|\Delta| = b_1$. Как и выше, $\Delta \subset [d]$ для $d \in [a] \cap [w]$ и $\mu(x,d) = b_1 - 1$ для $x \in \Delta$, $d \in [w] \cap [a]$. Если $f \in [u] \cap [a]$, то $[f] \cap [a]$ содержит $b_1 - 1$ вершин из $[u]$ и $b_1 - 2$ вершин из Δ. Поэтому f не смежна только с одной вершиной из Δ.

Пусть некоторая вершина z из Δ не смежна с двумя вершинами из $[u] \cap [a]$, а любая из оставшихся в Δ вершин не смежна только с одной вершиной из $[u] \cap [a]$. Пусть $x \in \Delta - \{a, z\}$, $y \in [x] - a^\perp$. Как и выше, $[x] \cap [y]$ не может содержать одновременно вершины из $[u]$ и $[w]$. Значит, $[x] \cap [y]$ содержит $b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [a]$ и $b_1 - 2$ вершин из Δ. Итак, $\Delta - \{a\}$ является подграфом графа $[y]$ и y не смежна только с одной вершиной f из $[u] \cap [a]$. Отсюда следует, что $b_1 = 3, k = 7$ и $[x] \cap [a]$ содержит вершины c, d из $[w]$, вершину z из Δ и не смежные с z вершины e, g из $[u]$. Таким образом, $[z]$ содержит вершины a, c, d, x, y, вершину f из $[u] \cap [a]$ и вершину h из $[u]$, не смежную с a, c, d, x. Противоречие с тем, что $\lambda(z,h) \geqslant \lambda$. Лемма 2.6 доказана.

Лемма 2.7. *Если диаметр графа* Γ *больше* 3, *то* $b_1 \leqslant 2$.

Доказательство. Допустим, что $\mu(u,a) = \mu(a,w) = b_1 - 1$. Тогда $|\Delta| = b_1 + 1$ и каждая вершина из $[w] \cap [a]$ не смежна с единственной вершиной из Δ. Поэтому некоторая отличная от a вершина x из Δ

смежна со всеми вершинами из $[w]\cap[a]$. Из леммы 2.4 следует, что граф $[x]$ содержит любую вершину из Δ, смежную с некоторой вершиной из $[w]\cap[a]$. Если Δ не является подграфом графа $x^\perp$, то $\Delta - x^\perp$ состоит из единственной вершины y, не смежной ни с одной вершиной из $[a]\cap[w]$. В этом случае $a^\perp\cap y^\perp$ содержит b_1-1 вершин из $[u]$ и все b_1 вершин из $\Delta-\{x\}$. Поэтому x не смежна с вершинами из $[u]\cap[a]$ и $\Delta-\{x,\ y\}=K(a)$. Из редуцированности графа следует, что $b_1\leqslant 2$.

Итак, $\Delta\subset x^\perp\cap y^\perp$ для вершины $y\in\Delta$, смежной со всеми вершинами из $[u]\cap[a]$. Если z — вершина из Δ, не смежная с вершиной из $[a]\cap[w]$, то графы $[z]$ и $[a]\cap[w]$ не пересекаются. Иначе, вершина d из $[a]\cap[w]\cap[z]$ смежна с x и $|[x]\cap[w]|=b_1$. Противоречие с леммой 2.6. Значит, $z=y$ и снова $\Delta-\{x,\ y\}=K(a)$. Лемма 2.7 и теорема доказаны.

§ 3. Реберно регулярные графы с большим λ

Пусть граф Γ является контрпримером к следствию, $eacw$ — кратчайший 3-путь между вершинами e,w. Тогда $b_1\geqslant 3$ и ввиду теоремы диаметр графа равен 3. Из лемм 2.1, 2.2 следует, что $k=3b_1-2$, $\lambda=2b_1-3$. Заметим, что b_1 четно, иначе k,λ нечетны и число ребер в окрестности вершины равно $(1/2)k\lambda$. Для $x\in\Gamma_2(w)$ положим $\Delta(x)=[x]\cap\Gamma_3(w)$.

Лемма 3.1. *Если $\mu(e,c)=\mu(a,w)=b_1-1$, то графы $[c]\cap[a]$ и $\Gamma_2(e)\cap\Gamma_2(w)$ содержат единственную общую вершину x, причем либо в графе $[e]\cup[w]$ содержится вершина из $\Gamma_3(x)$, либо $[x]$ содержится в графе $[e]\cup[w]$, $\mu(x,y)=b_1-1$ для любой вершины y из $\Gamma_2(x)$, отличной от e,w и $\Gamma_2(x)\subset e^\perp\cup w^\perp$.*

Доказательство. Пусть $\mu(e,c)=\mu(a,w)=b_1-1$. Тогда $[c]\subset a^\perp\cup w^\perp$, $[a]\subset e^\perp\cup c^\perp$. Теперь $[a]-e^\perp$ содержит b_1 вершин, и только одна из этих вершин не лежит в $[w]$. Ясно, что вершина $x\in[a]-e^\perp$, не смежная с w, принадлежит графу $[c]$.

Допустим, что $[e]\cup[w]$ не содержит вершин из $\Gamma_3(x)$. Положим $\mu(e,x)=\mu_1$, $\mu(x,w)=\mu_2$. Тогда $\Gamma_2(x)$ содержит $k+1-\mu_1$ вершин из $e^\perp$ и $k+1-\mu_2$ вершин из $w^\perp$. Число ребер между $[x]$ и $\Gamma_2(x)$ равно $kb_1\geqslant\mu_1+\mu_2+(2k-\mu_1-\mu_2)(b_1-1)$. Отсюда получаем $(\mu_1+\mu_2)(b_1-2)\geqslant k(b_1-2)$. Следовательно, $\mu_1+\mu_2=k$, $|\Gamma_2(x)|=k+2$ и $\mu(x,y)=b_1-1$ для любой отличной от b,e вершины $y\in\Gamma_2(x)$. Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $\mu(e,c)=b_1$. Тогда имеется единственная вершина f из $[a]$ такая, что $f\in\Gamma_2(w)-([e]\cup[w])$.*

Доказательство. Допустим, что вершина $f\in[a]-([e]\cup[w])$ лежит в $\Gamma_3(w)$. Тогда $[a]\subset\{f\}\cup[w]\cup e^\perp$. Поэтому $[e]\cap[a]=[e]\cap[f]$ и для любой вершины x из $[e]\cap[c]$ получаем $[x]-[w]\subset\{e,f\}\cup([e]\cap[f])$.

Если некоторая вершина y из $[w] \cap \Gamma_2(e)$ не смежна с вершинами из $[e] \cap [f]$, то $|[e] \cap [y]| \geqslant b_1 - 1$. Следовательно, $\Delta = [e] - [y]$ содержит не более $2b_1 - 1$ вершин и $|\Delta - x^\perp| \leqslant 1$ для любой вершины $x \in [e] \cap [c]$. Поэтому найдутся такие вершины x, z в $[e] \cap [c]$, что $\Delta - x^\perp = \Delta - z^\perp$ и $|[x] \cap [z]| > \lambda$.

Итак, каждая вершина y из $[w] \cap \Gamma_2(e)$ смежна с вершиной из $[e] \cap [f]$, $[e] \cap \Gamma_2(w) = [f] \cap \Gamma_2(w)$ и $\mu(e, y) = b_1$. Следовательно, $\mu(u, w) = b_1 - 1$ для любой вершины $u \in [e] \cap \Gamma_2(w)$. Поэтому число ребер между $[e] \cap \Gamma_2(w)$ и $[w] \cap \Gamma_2(e)$ равно $c_3(e, w)b_1 = c_3(w, e)(b_1 - 1)$. Если $c_3(e, w) = b_1 - 1$, то $c_3(w, e) = b_1$, и для различных вершин a, x из $[e] \cap [c]$ получаем, что $[a] \cap [x]$ содержит $b_1 - 1$ вершин из $[w]$, $b_1 - 2$ вершин из $[e] \cap [c]$, а также вершины e, f. Противоречие. Значит, $c_3(e, w) = 2b_1 - 2$ и $c_3(w, e) = 2b_1$. Если a, x — не смежные вершины из $[e] \cap \Gamma_2(w)$, то ввиду леммы 2.4 каждая вершина из $[w] \cap \Gamma_2(e)$ лежит в $[a] \cup [x]$.

Таким образом, вершина a не смежна, по крайней мере, с двумя вершинами x, z из $[e] \cap \Gamma_2(w)$ и $[x] \cap [w] = [z] \cap [w]$. Тогда $[x] \cap [z]$ содержит $b_1 - 1$ вершин из $[w]$, по крайней мере, $b_1 - 2$ вершин из $\Gamma_2(w) \cap [e]$, а также вершины e, f. Противоречие. Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. *Пусть $\mu(e, c) = b_1$. Тогда имеется единственная вершина f из $[a]$, не принадлежащая графу $[e] \cup [w]$, которая смежна с некоторой вершиной в $[x] \cap [w]$ для любого $x \in [e] \cap [c] \cap [f]$.*

Доказательство. Допустим, что графы $[f]$ и $[a] \cap [w]$ не пересекаются. Тогда $[a] - [w] \subset \{e\} \cup (f^\perp \cap [e])$ и $[a] \cap [e]$ является подграфом графа $[f]$. Далее, в качестве c можно взять любую вершину из $[a] \cap [w]$. Предположим, что вершина $d \in [f] \cap [w]$ не смежна с вершиной c. Тогда $[d]$ не содержит вершин из $[e] \cap [c]$. Поэтому $[f] - [c] = [f] \cap d^\perp$. Если вершина $d \in [f] \cap [w]$ не смежна с двумя вершинами c, g из $[a] \cap [w]$, то $[f] - d^\perp$ лежит в $[c] \cap [g]$, граф $[c] \cap [g]$ содержит b_1 вершин из $[e]$, $b_1 - 3$ вершин из $[a] \cap [w]$ и вершину w. Противоречие.

В случае $\mu(f, w) = b_1$ найдутся такие вершины $d, z \in [w] \cap [f]$, что подграф $[d] \cap [z]$ содержит по $b_1 - 2$ вершин из $[w] \cap [a]$ и $[w] \cap [f]$, а также вершины w и f. Противоречие. Значит, $\mu(f, w) = b_1 - 1$.

С другой стороны, если c не смежна с двумя вершинами d, g из $[w] \cap [f]$, то $[f] - [c] = [f] \cap d^\perp = [f] \cap g^\perp$ и граф $[d] \cap [g]$ содержит w и λ вершин из $f^\perp$. Итак, каждая вершина из $[f] \cap [w]$ может быть не смежной только с одной вершиной из $[a] \cap [w]$, и обратно, каждая вершина из $[a] \cap [w]$ может быть не смежной только с одной вершиной из $[f] \cap [w]$.

Для $\Delta = ([a] \cap [w]) \cup ([f] \cap [w])$ каждая вершина из Δ смежна с одной вершиной из $[w] - \Delta$ и некоторая вершина y из $[w] - \Delta$ смежна не более чем с одной вершиной из Δ. Поэтому $[y] \cap [w]$ содержит не более b_1 вершин. Следовательно, $b_1 \leqslant 3$. Противоречие. Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. *Пусть $[w]$ содержит вершину z из $\Gamma_3(e) \cap \Gamma_3(a)$. Тогда каждая вершина из $[e] \cap [c]$ не смежна с вершинами из $[c] \cap [z]$.*

Доказательство. Положим $\Delta = c^\perp - ([e] \cup [z])$. Вершину из $[c] - \Delta$ назовем *плохой*, если она не смежна с вершинами из $\Delta - \{c\}$, и *хорошей* — в противном случае.

Допустим, что вершина $x \in [e] \cap [c]$ смежна с вершиной $y \in [z] \cap [c]$. Тогда $[x] \cap [y]$ содержит по $b_1 - 2$ вершин из $[e]$, $[z]$ и единственную вершину $c \in \Delta$. По лемме 3.1, примененной к пути $exyz$, графы $[x]$, $[y]$ содержат единственную вершину c вне $e^\perp \cup z^\perp$. Поэтому $\Delta \cap [x] = \Delta \cap [y] = \{c\}$ и x, y — плохие вершины.

Предположим, что $\mu(e, c) = b_1 - 1$. Тогда $[x] \cap [c]$ содержит $b_1 - 2$ вершин из $[e]$ и $b_1 - 1$ плохих вершин из $[z]$. Так как $[c] \cap [z]$ содержит хорошую вершину w, то $\mu(z, c) = b_1, |\Delta| = b_1$. Если u — отличная от y плохая вершина из $[z]$, то $[y] \cap [u]$ содержит вершины c и z, $b_1 - 2$ вершин из $[c] \cap [z]$ и все $b_1 - 2$ плохие вершины из $[e]$. Значит, $\mu(e, c) = \mu(z, c) = b_1$. Тогда $|\Delta| = b_1 - 1$, $[x] \cap [c]$ содержит $b_1 - 1$ вершин из $[e]$ и $b_1 - 2$ плохие вершины из $[z]$. Если u — смежная с w хорошая вершина, то $[u] \cap [w]$ содержит вершину z, $b_1 - 1$ вершин из Δ и $b_1 - 2$ вершины из $[c] \cap [z]$. Противоречие. Поэтому a, w — единственные хорошие вершины и $\lambda(d, c) \leqslant b_1 - 1$ для вершины $d \in \Delta$, отличной от c. Противоречие с тем, что $b_1 \geqslant 3$. Лемма 3.4 доказана.

Лемма 3.5. *Для любого кратчайшего 3-пути $eacw$ между вершинами e, w граф $[w] \cap \Gamma_3(a)$ является подграфом графа $\Gamma_2(e)$.*

Доказательство. Допустим, что $[w]$ содержит вершину $z \in \Gamma_3(e) \cap \Gamma_3(a)$. Положим $\Delta = c^\perp - ([e] \cup [z])$. Сначала предположим, что $\mu(e, c) = b_1$. Если $\mu(c, z) = b_1$, то $\Delta = [a] \cap [w]$ для любых вершин $a \in [c] \cap [e]$, $w \in [z] \cap [c]$. Следовательно, $c^\perp = y^\perp$ для любой вершины $y \in \Delta$. Противоречие с тем, что $|\Delta| = b_1 - 1$.

Значит, $\mu(c, z) = b_1 - 1$ и $|\Delta| = b_1$. Как и выше, $\Delta \subset [w]$ для любой вершины w из $[c] \cap [z]$ и $\Delta \cup ([c] \cap [z])$ — клика из $2b_1 - 1$ вершин. Противоречие с тем, что $\lambda(a, c) = \lambda$.

Поэтому $\mu(e, c) = \mu(c, z) = b_1 - 1$, $|\Delta| = b_1 + 1$ и каждая вершина из $[e] \cap [c]$ не смежна с единственной вершиной из Δ.

В этом случае некоторая отличная от c вершина $x \in \Delta$ смежна со всеми вершинами из $[e] \cap [c]$. Ввиду леммы 2.4 граф $[x]$ содержит все вершины из Δ, каждая из которых смежна с некоторой вершиной из $[e] \cap [c]$. Если Δ не является подграфом графа $x^\perp$, то $\Delta - x^\perp$ состоит из единственной вершины y, не смежной ни с одной вершиной из $[e] \cap [c]$. В этом случае граф $c^\perp \cap y^\perp$ содержит, по крайней мере, $b_1 - 1$ вершин из $[z]$ и все b_1 вершин из $\Delta - \{x\}$. Поэтому вершина x не смежна с вершинами из $[z] \cap [c]$ и $\Delta - \{x, y\} = K(c)$. Противоречие.

Итак, $\Delta \subset x^{\perp}$ и $\lambda(x,c) \geqslant 2(b_1 - 1)$. Лемма 3.5 доказана.

Лемма 3.6. *Если $x \in \Gamma$, то справедливо неравенство $|\Gamma_2(x)| \leqslant k+3$. Если $|\Gamma_2(x)| = k+3$, то $\mu(x,y) = b_1$ для единственной вершины $y \in \Gamma_2(x)$ и $\mu(x,z) = b_1 - 1$ для любой из оставшихся в $\Gamma_2(x)$ вершин.*

Доказательство. Число ребер между $[x]$ и $\Gamma_2(x)$ равно $k(k-\lambda-1) = (3b_1 - 2)b_1$. Поэтому число вершин в $\Gamma_2(x)$ не превосходит

$$\frac{(3b_1-2)b_1}{(b_1-1)} = 3b_1 + 1 + \frac{1}{(b_1-1)}.$$

Из равенства $k = 3b_1 - 2$ следует первое утверждение леммы 3.6.

Если $|\Gamma_2(x)| = k+3$, то число ребер между $[x]$ и $\Gamma_2(x)$ равно $3b_1(b_1 - 1) + b_1$, что влечет второе утверждение леммы 3.6. Лемма 3.6 доказана.

Лемма 3.6 дает верхнюю оценку для числа вершин в графе, если его диаметр равен 2.

Лемма 3.7. *Для любых двух вершин x, y, находящихся на расстоянии 2, справедливо неравенство $b_2(x,y) \leqslant 1$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $|\Delta(a)| = 1$. Пусть e, u — различные вершины из $\Delta(a)$. Сначала предположим, что $[w] \cap \Gamma_3(a)$ содержит некоторую вершину s. По лемме 3.5 имеем $s \in \Gamma_2(e) \cap \Gamma_2(u)$. Заметим, что $[e] \cap [u]$ содержит не более одной вершины вне $a^{\perp}$. Поэтому $[s]$ содержит не менее $2(b_1-1)-1$ вершин из $[e] \cup [u]$, лежащих вне $w^{\perp}$. Итак, $2b_1 - 3 \leqslant b_1$. Противоречие с тем, что $b_1 \geqslant 4$.

Следовательно, $\Gamma_2(a)$ содержит не менее $2b_1 - 1$ вершин из $[u] \cup [e]$ и $2b_1$ или $2b_1 - 1$ вершин из $w^{\perp}$. Поэтому $4b_1 - 2 \leqslant 3b_1 + 1$. Противоречие.

Лемма 3.8. *Для любого кратчайшего 3-пути $eacw$ между вершинами e, w верны равенства $\mu(e,c) = \mu(a,w) = b_1 - 1$.*

Доказательство. Допустим, что $\mu(e,c) = b_1$. Пусть f — единственная вершина из $[a]$, не лежащая в $e^{\perp} \cup c^{\perp}$. По лемме 3.3 граф $[f] \cap [w]$ содержит вершину $x \in [a]$, и по лемме 3.1, примененной к пути $eaxw$, с учетом неравенства $\mu(f,c) \geqslant b_1$ граф $\Gamma_3(f)$ содержит вершину u из $[e] \cup [w]$.

Покажем, что $\mu(e,f) < b_1$ и $\mu(f,c) < b_1$. Сначала предположим, что $\mu(e,f) = b_1$. В этом случае $[f] \cap [c]$ содержит $b_1 - 2$ вершины из $[a] - e^{\perp}$. Поэтому $[f]$ содержит единственную вершину $z \in [e] \cap [c]$, отличную от a. Следовательно, $[a] \cap [z]$ содержит e, c, f и по $b_1 - 2$ вершины из $[f] \cap [c]$ и $[e] \cap [c]$. Противоречие. Аналогично рассматривается случай $\mu(c,f) = b_1$.

Теперь ясно, что вершина u из $\Gamma_3(f)$ лежит в $[w]$. Так как по лемме 3.8 вершина $a \in \Gamma_2(u)$, то одна из вершин c, e лежит в $[u]$. Поскольку $d(e,w) = 3$, имеем $c \in [w]$ и $\mu(c,f) = b_1$. Противоречие.

Завершим доказательство следствия. Из лемм 3.8, 3.1 следует, что $[a] \cap [c]$ содержит единственную вершину f, не лежащую в $[e] \cup [w]$. Если $[f]$ не содержит некоторую вершину $y \in [a] \cap [w]$, то $\mu(e, y) = b_1$. Значит, $[f]$ содержит $[e] \cap [c]$ и $[a] \cap [w]$, в частности, $[a] \cap [c]$ содержится в $f^{\perp}$. Если $x \in [a] \cap [w]$, то $[e] \cap [x]$=$[e] \cap [c]$, иначе $[a] \cap [e] \subset f^{\perp}$ и $\lambda(a, f) > \lambda$. Следовательно, $x^{\perp} \cap c^{\perp}$ содержит $f^{\perp} \cap c^{\perp}$ и вершину w. Противоречие.

Итак, для доказательства следствия нам осталось получить оценку для числа вершин в исследуемых графах диаметра 2. Если $k \geqslant 3b_1$, то по лемме 1.4.2 [1] число v вершин в графе не больше $2k-2$. Если $k = 3b_1 - 2$, то по лемме 3.6 имеем $v \leqslant 2k + 4$. Пусть $k = 3b_1 - 1$. Если $b_1 = 1$ или 2, то граф Γ — многоугольник или граф икосаэдра соответственно. Пусть $b_1 \geqslant 3$. Тогда для любой вершины $a \in \Gamma$ число ребер между $[a]$ и $\Gamma_2(a)$ равно $kb_1 = (3b_1 - 1)b_1$. Поэтому число вершин в $\Gamma_2(a)$ не больше

$$\frac{(3b_1 - 1)b_1}{(b_1 - 1)} = 3b_1 + 2 + \frac{2}{(b_1 - 1)}.$$

Если $|\Gamma_2(a)| > k + 3$, то $b_1 = 3$ и $\mu(a, b) = 2$ для любых двух вершин a, b таких, что $d(a, b) = 2$. Поэтому Γ является сильно регулярным графом с параметрами (21, 8, 4, 2). Но графа с такими параметрами не существует, так как при таких значениях параметров число $(\lambda - \mu)^2 + (k - \mu)$ не является квадратом. Следствие доказано.

Автор выражает признательность А. Д. Коршунову за предложения по улучшению текста статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc.: Springer-Verl., 1989.
2. **Terwilliger P.** Distance-regular graphs with girth 3 or 4: I // J. Combin. Theory. Ser. B. 1985. V. 39, N 3. P. 265–281.

Адрес автора:

Россия,
620219 Екатеринбург,
ул. Ковалевской, 16,
Институт математики
и механики УрО РАН

Статья поступила
6 апреля 1995 г.