ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1995. Том 2, № 4, 80–96

УДК 519.722

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ ВЕСА l-УРАВНОВЕШЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ*)

Ю. В. Таранников

Плотностью n-местной булевой функции f называется величина $\rho(f) = W_f/2^n$, где W_f — число наборов длины n, на которых f равна единице. Функция f называется l-уравновешенной, если $|W_{f_1} - W_{f_2}| \leqslant l$ для любых ее подфункций f_1 и f_2 от одинакового числа переменных. Установлено, что при любом фиксированном l и больших n плотности l-уравновешенных булевых функций от n переменных близки к одному из следующих пяти чисел: 0, 1/3, 1/2, 2/3 или 1.

В теории управляющих систем важное место занимает отыскание содержательных в том или ином смысле классов булевых функций.

Булевы функции можно задавать разными способами, например таблицами, дизъюнктивными нормальными формами, полиномами Жегалкина и т. п. Во многих случаях функцию удобно задавать в виде подмножества вершин булева куба, в которых функция принимает единичное (или нулевое) значение. Представляет определенный интерес проблема классификации булевых функций в зависимости от структуры этого подмножества. Например, такие подмножества для монотонных функций, симметрических функций и некоторых других булевых функций имеют весьма своеобразную структуру.

В данной работе по аналогии с тем, как это сделано в [1] для двоичных последовательностей, исследуется классификация булевых функций в соответствии с их «степенью однородности» — параметром, характеризующим, насколько равномерно распределены единичные значения функции по n-мерной области ее определения.

В настоящее время рассматривают несколько понятий «однородности» булевых функций, и в классификации этих понятий нет пока четко

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–01–01527) и Франко-русского центра по прикладной математике и информатике им. А. М. Ляпунова при МГУ им. М. В. Ломоносова.

выработанной терминологии. Так, однородной часто называют функцию, «центр тяжести» которой расположен точно в середине булева куба. Заметим, однако, что таким образом введенное свойство может не сохраняться при переходе от функции, заданной на кубе, к ее подфункции, задаваемой на подкубе. Понятие l-уравновешенности, предложенное Е. П. Липатовым, свободно от этого недостатка.

Весом булевой функции f назовем величину W_f, равную числу наборов, на которых функция f принимает значение 1. Величину $\rho(f) = W_f/2^n$ назовем *плотностью* n-местной булевой функции f.

Пусть l — целое неотрицательное число. Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *l-уравновешенной*, если $|W_{f_1} - W_{f_2}| \leqslant l$ для любых ее подфункций f_1 и f_2 от одинакового числа переменных.

В [2] описаны все 1-уравновешенные булевы функции. Некоторые оценки для веса l-уравновешенных булевых функций приведены в [3]. Целью настоящей работы является доказательство того, что при больших n плотности l-уравновешенных функций близки к одному из следующих пяти чисел: 0, 1/3, 1/2, 2/3 или 1. Более точно этот результат формулируется следующим образом.

Теорема. *Для любого натурального l и любого положительного ε существует такое натуральное N, что для любого натурального n, $n \geqslant N$, и для любой l-уравновешенной булевой функции f от n переменных справедливо только одно из следующих пяти неравенств:*

$$W_f \leqslant 2l;$$
$$|\rho(f) - 1/3| < \varepsilon;$$
$$|\rho(f) - 1/2| < \varepsilon;$$
$$|\rho(f) - 2/3| < \varepsilon;$$
$$W_f \geqslant 2^n - 2l.$$

Справедливость теоремы устанавливается в конце статьи после доказательства ряда вспомогательных фактов.

Лемма 1. *Для любого натурального m найдется такое $N(m)$, что при $n > N(m)$ и $l < m/2$ не существует l-уравновешенных n-местных булевых функций, имеющих вес m.*

Доказательство. Функции f $(x_1, \ldots, x_n)$ с весом m поставим в соответствие матрицу размера $m \times n$, в строках которой записаны все m наборов длины n, на которых функция f принимает единичное значение. При $n \geqslant 2^m + 1$ в матрице найдутся два совпадающих столбца. Пусть эти столбцы соответствуют переменным x_i и x_j. Тогда вес подфункций $f|_{x_i=0,\ x_j=1}$ и $f|_{x_i=1,\ x_j=0}$ равен 0, а вес одной из подфункций $f|_{x_i=0,\ x_j=0}$

и $f|_{x_i=1,\ x_j=1}$ не меньше $l+1$. Следовательно, функция f не является l-уравновешенной. Таким образом, утверждение леммы 1 справедливо при $N(m) = 2^m$.

Лемма 2. *Для любого натурального l можно указать такую положительную константу $c\ (l)$, что для любой l-уравновешенной булевой функции f с весом W_f, $W_f > 2l$, справедливо неравенство $\rho\ (f) \geqslant c\ (l)$.*

Доказательство. Пусть $f = f_0$ — функция, удовлетворяющая условиям леммы 2. Если $W_f > 5l$, то функцию f разложим по любой переменной на две подфункции от $n-1$ переменной и обозначим через f_1 ту из этих подфункций, которая имеет меньший вес (если веса равны, выбираем f_1 произвольно). Из свойства l-уравновешенности вытекает, что $W_{f_1} > 2l$; кроме того, очевидно, что $\rho\ (f) \geqslant \rho\ (f_1)$. Далее, если $W_{f_1} > 5l$, то разложим функцию f_1 по любой переменной на две подфункции от $n-2$ переменных и обозначим через f_2 ту, которая имеет меньший вес (если веса равны, выбираем f_2 произвольно), и т. д. На некотором (s-м) шаге, $s \geqslant 0$, мы получим функцию f_s, вес которой удовлетворяет неравенствам $2l+1 \leqslant W_{f_s} \leqslant 5l$ и плотность удовлетворяет неравенству $\rho\ (f) \geqslant \rho\ (f_s)$.

По лемме 1 для любого m, $m > 2l$, существует лишь конечное число l-уравновешенных функций с весом m. Поэтому определена величина $c\ (l) = \min \rho(g)$, где минимум берется по всем l-уравновешенным функциям g таким, что $2l+1 \leqslant W_g \leqslant 5l$.

Из определения величины $c\ (l)$ следует, что $c\ (l) > 0$ и $\rho\ (f_s) \geqslant c\ (l)$. Тем самым $\rho\ (f) \geqslant c\ (l)$. Лемма 2 доказана.

Булева функция f называется *симметрической*, если ее значение не изменяется при любой перестановке аргументов. Симметрическая булева функция полностью определяется характеристической последовательностью $\widetilde{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$, где π_i — значение функции f на любом наборе, содержащем i единиц и $n-i$ нулей. Будем говорить, что симметрическая булева функция от n переменных имеет *период* T, если при всех i, $0 \leqslant i \leqslant n-T$, справедливо соотношение $\pi_i = \pi_{i+T}$. Пусть $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$. *Сужением* $f[k_1, k_2]$ симметрической n-местной булевой функции f будем называть $(k_2 - k_1)$-местную функцию, получающуюся подстановкой в f вместо некоторых k_1 переменных константы 1 и вместо некоторых других $n - k_2$ переменных — константы 0.

Через S_n обозначим n-элементное множество, а через $P_r(S_n)$ — совокупность всех r-элементных подмножеств (r-подмножеств) из S_n. Разбиение $P_r(S_n) = A_1 \cup \cdots \cup A_t$ назовем *упорядоченным t-разбиением*.

Теорема Рамсея [4, с. 78]. *Пусть $r \geqslant 1$, $q_i \geqslant r$ ($i = 1, \ldots, t$). Тогда существует такое наименьшее натуральное $\mathscr{M} = \mathscr{M}(q_1, \ldots, q_t; r)$,* *что для любого $n \geqslant \mathscr{M}$ и любого упорядоченного t-разбиения $P_r(S_n) = A_1 \cup \dots \cup A_t$ найдутся подмножества A_i и $S' \subset S$ такие, что в A_i содержатся все r-подмножества из S', где $|S'| \geqslant q_i$ (такое S' назовем $(q_i,\ A_i)$-подмножеством).*

Лемма 3. *Для любого натурального n_1 можно подобрать такое натуральное N, что у любой булевой функции f от N переменных имеется симметрическая подфункция n_1 переменных.*

Формулировка утверждения, эквивалентного лемме 3, содержится в [5].

Доказательство. Каждому r-подмножеству $\mathscr{A} = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_r \leqslant n$, множества $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$ поставим в соответствие такой двоичный набор $\widetilde{\alpha}(\mathscr{A}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, что

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \notin \mathscr{A}, \\ 1, & \text{если} \quad i \in \mathscr{A}. \end{cases}$$

Пусть f — произвольная функция от n переменных. Для каждого r, $r = 1, 2, \dots$, рассмотрим разбиение $P_r(S_n) = A_{r,0} \cup A_{r,1}$, $r = 1, 2, \dots$, задав его следующим образом:

$$\begin{cases} \mathscr{A} \in A_{r,0}, & \text{если} \quad f(\widetilde{\alpha}(\mathscr{A})) = 0, \\ \mathscr{A} \in A_{r,1}, & \text{если} \quad f(\widetilde{\alpha}(\mathscr{A})) = 1. \end{cases}$$

Докажем, что при любых натуральных k и q, $q \geqslant k$, существует такое натуральное $N(k, q)$, что при определенных выше разбиениях $P_r(S_n)$, $r = 1, 2, \dots, k-1$, найдется (при некоторых $i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \in \{0, 1\}$) такое q-подмножество множества $S_{N(k,q)}$, все r-подмножества которого содержатся соответственно в A_{r,i_r}, $r = 1, 2, \dots, k-1$. Это подмножество назовем $(q, A_{1,i_1}, A_{2,i_2}, \dots, A_{k-1,i_{k-1}})$-подмножеством (при $k = 1$ имеем q-подмножество).

Последовательно определим значения $N(k, q)$. При $k = 1$ достаточно положить $N(k, q) = q$. Пусть определено значение $N(k-1, q')$, где $q' = \mathscr{M}(q, q; k-1)$. Тогда по теореме Рамсея (при некотором $i_{k-1} \in \{0, 1\}$) найдется $(q, A_{k-1,i_{k-1}})$-подмножество множества $S_{q'}$. По определению числа $N(k-1, q')$ все r-подмножества множества $S_{N(k-1,q')}$, $r = 1, 2, \dots, k-2$, содержатся в множествах A_{r,i_r} соответственно. Поэтому выделенное $(q, A_{k-1,i_{k-1}})$-подмножество является $(q, A_{1,i_1}, A_{2,i_2}, \dots, A_{k-1,i_{k-1}})$-подмножеством множества $S_{N(k-1,q')}$. Таким образом, достаточно положить $N(k, q) = N(k-1, \mathscr{M}(q, q; k-1))$. Тем самым числа $N(k, q)$ найдены.

Положим $N = N(n_1, n_1)$. Выше доказано, что найдется такое $(n_1, A_{1,i_1}, A_{2,i_2}, \dots, A_{n_1-1,i_{n_1-1}})$-подмножество $\mathscr{A}$ множества S_N, все r-подмножества которого содержатся в множествах A_{r,i_r}, $r = 1, 2, \dots, n_1 - 1$, соответственно.

В N-местную функцию f подставим нули вместо всех переменных x_i, для которых $i \notin \mathscr{A}$. Получившуюся подфункцию от n_1 переменных обозначим через f'. На любом наборе длины n_1, содержащем в точности r единиц, $r \in \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}$, функция f' принимает значение i_r. Следовательно, f' — симметрическая функция. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для любых натуральных l и n_2 существует такое натуральное N, что у любой l-уравновешенной булевой функции f от N переменных имеется n_2-местная периодическая симметрическая подфункция с периодом T, не превосходящим 2^{l+1}.*

Доказательство. Положим $n_1 = \max\{n_2 + 2, 2^{l+1} + l + 3\}$. В силу леммы 3 существует такое натуральное N, что у любой булевой функции f от N переменных найдется симметрическая подфункция f_1 от n_1 переменных. Рассмотрим характеристическую последовательность $\widetilde{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n_1})$ этой подфункции. Среди ее первых $2^{l+1} + l + 1$ элементов по принципу Дирихле найдутся два совпадающих отрезка длины $l + 1$: $(\pi_h, \pi_{h+1}, \ldots, \pi_{h+l})$ и $(\pi_{h+T}, \pi_{h+T+1}, \ldots, \pi_{h+T+l})$, где $T \leqslant 2^{l+1}$, $h \geqslant 0$, $h + T + l \leqslant 2^{l+1} + l + 1$. Совпадение отрезков означает, что $\pi_i = \pi_{T+i}$ при $i = h, h+1, \ldots, h+l$. Докажем, что равенство $\pi_i = \pi_{T+i}$ верно для всех i, $i = 1, 2, \ldots, n_1 - T - 1$.

Пусть равенство $\pi_i = \pi_{T+i}$ установлено для всех таких натуральных i, что $h \leqslant i \leqslant j$, где j удовлетворяет неравенствам $h + l \leqslant j \leqslant n_1 - 2$. Установим равенство $\pi_{j+1} = \pi_{T+j+1}$. Для этого рассмотрим функции $f' = f_1[j - l, j + 2]$ и $f'' = f_1[T + j - l, T + j + 2]$. Эти функции являются подфункциями функции f, поэтому они l-уравновешены. Для весов функций f_1 и f_2 имеем

$$W_{f_1} = \sum_{i=0}^{l+2} \binom{l+2}{i} \pi_{j-l+i}, \quad W_{f_2} = \sum_{i=0}^{l+2} \binom{l+2}{i} \pi_{T+j-l+i}$$

и

$$\begin{aligned}
|W_{f_1} - W_{f_2}| &= \left| \sum_{i=0}^{l+2} \binom{l+2}{i} (\pi_{j-l+i} - \pi_{T+j-l+i}) \right| \\
&= \left| \binom{l+2}{l+1} (\pi_{j+1} - \pi_{T+j+1}) + \binom{l+2}{l+2} (\pi_{j+2} - \pi_{T+j+2}) \right| \\
&= |(l+2)(\pi_{j+1} - \pi_{T+j+1}) + (\pi_{j+2} - \pi_{T+j+2})| \\
&\geqslant (l+2)|\pi_{j+1} - \pi_{T+j+1}| - 1.
\end{aligned}$$

Поэтому если $\pi_{j+1} \neq \pi_{T+j+1}$, то $|W_{f_1} - W_{f_2}| \geqslant l + 1$, что противоречит l-уравновешенности функции f. Следовательно, $\pi_{j+1} = \pi_{T+j+1}$.

Аналогично, пусть равенство $\pi_i = \pi_{T+i}$ установлено для всех таких целых i, что $j \leqslant i \leqslant h + l$, где $2 \leqslant j \leqslant h$. Установим равенство $\pi_{j-1} =$

π_{T+j-1}. Для этого рассмотрим функции $f' = f_1[j-2, j+l]$ и $f'' = f_1[T+j-2, T+j+l]$. Эти функции являются подфункциями функции f, потому они l-уравновешены. Подобно рассмотренному выше имеем

$$W_{f_1} = \sum_{i=0}^{l+2} \binom{l+2}{i} \pi_{j-2+i}, \quad W_{f_2} = \sum_{i=0}^{l+2} \binom{l+2}{i} \pi_{T+j-2+i}$$

и

$$\begin{aligned}
|W_{f_1} - W_{f_2}| &= \left| \sum_{i=0}^{l+2} \binom{l+2}{i} (\pi_{j-2+i} - \pi_{T+j-2+i}) \right| \\
&= \left| \binom{l+2}{0} (\pi_{j-2} - \pi_{T+j-2}) + \binom{l+2}{1} (\pi_{j-1} - \pi_{T+j-1}) \right| \\
&= |(l+2)(\pi_{j-1} - \pi_{T+j-1}) + (\pi_{j-2} - \pi_{T+j-2})| \\
&\geqslant (l+2)|\pi_{j-1} - \pi_{T+j-1}| - 1.
\end{aligned}$$

Следовательно, если $\pi_{j-1} \neq \pi_{T+j-1}$, то $|W_{f_1} - W_{f_2}| \geqslant l+1$, что противоречит l-уравновешенности функции f. Поэтому $\pi_{j-1} = \pi_{T+j-1}$.

Таким образом, равенство $\pi_i = \pi_{T+i}$ установлено для всех целых i, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant i \leqslant n_1 - T - 1$. Рассмотрим функцию $f_2 = f_1[1, n_2+1]$ от n_2 переменных. (Задание функции f_2 корректно, так как $n_1 \geqslant n_2 + 2$.) Функция f_2, очевидно, является периодической симметрической функцией с периодом, не превосходящим 2^{l+1}, и по построению является подфункцией функции f, что доказывает лемму 4.

Замечание 1. Периодическая симметрическая (с периодом T) булева функция от заданного числа переменных полностью определяется начальным отрезком характеристической последовательности (который мы в дальнейшем будем называть характеристическим отрезком), включающим в себя ее первые T элементов. Обозначим его через $\widetilde{\pi}[T] = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{T-1})$.

Через ε_k будем обозначать k-й корень степени T из единицы, $\varepsilon_k = \cos(2\pi k/T) + i\sin(2\pi k/T)$. Обозначим $r_k = |1 + \varepsilon_k|$.

Замечание 2. Если a, b, c, d — целые числа, то, как известно, $\varepsilon_{ab}^{cd} = \varepsilon_{abc}^{d} = \varepsilon_{a}^{bcd}$.

Замечание 3. При $0 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant \lfloor (T-1)/2 \rfloor$ выполняется неравенство $r_{k_1} > r_{k_2}$.

Замечание 4. При $k < T/3$ выполняется неравенство $r_k > 1$.

Замечание 5. При четных T выполняется равенство $r_{T/2} = 0$.

Лемма 5. *При целых n, T и j, удовлетворяющих неравенствам $n > 0$ и $0 \leqslant j < T$, справедлива формула*

$$\sum_{i=0}^{\lfloor (n-j)/T \rfloor} \binom{n}{j+iT} = \frac{2^n}{T} + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\lfloor (T-1)/2 \rfloor} r_k^n \cos \frac{\pi k(n-2j)}{T}.$$

Формулы подобного вида содержатся в [6] и [7].

Доказательство. Обозначим

$$a_j(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-j)/T \rfloor} \binom{n}{j+iT},$$

$j = 0, 1, \ldots, T-1$, $\overrightarrow{a}(n) = (a_0(n), a_1(n), \ldots, a_{T-1}(n))$. Тогда $\overrightarrow{a}^T(n) = A \cdot \overrightarrow{a}^T(n-1)$, где A — матрица порядка T следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет собственные значения $\lambda_k = 1 + \varepsilon_k$, $k = 0, 1, \ldots, T-1$, и собственные векторы $\overrightarrow{c}_k = (c_k^0, c_k^1, \ldots, c_k^{T-1})$, где $c_k^j = \varepsilon_{-kj}$, $0 \leqslant k, j \leqslant T-1$.

Учитывая замечание 5, при $n > 0$, $0 \leqslant j \leqslant T-1$, имеем

$$\begin{aligned} a_j(n) &= \sum_{k=0}^{T-1} \frac{(\overrightarrow{a}(0), \overrightarrow{\overline{c_k}})}{(\overrightarrow{c_k}, \overrightarrow{\overline{c_k}})} c_k^j \cdot \lambda_k^n \\ &= \sum_{k=0}^{T-1} \frac{1}{T} \varepsilon_{-kj} (1+\varepsilon_k)^n = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} r_k^n \varepsilon_{k(n-2j)/2} \\ &= \frac{2^n}{T} + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\lfloor (T-1)/2 \rfloor} r_k^n \left(\varepsilon_{k(n-2j)/2} + \varepsilon_{(T-k)(n-2j)/2}\right) \\ &= \frac{2^n}{T} + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\lfloor (T-1)/2 \rfloor} r_k^n \cos \frac{\pi k(n-2j)}{T}, \end{aligned}$$

что доказывает лемму 5.

Лемма 6. *Пусть* $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— бесконечная последовательность периодических симметрических булевых функций, где* f_n *—* n*-местная функция, задаваемая характеристическим отрезком* $\tilde{\pi}[T] = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{T-1})$. *Если все функции из последовательности* F *являются* l*-уравновешенными, то для любого натурального* k, $k < T/3$, *выполняется равенство* $\sum\limits_{j=0}^{T-1} \pi_j \varepsilon_{kj} = 0$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Обозначим через K минимальное k такое, что $\sum\limits_{j=0}^{T-1} \pi_j \varepsilon_{kj} \neq 0$; при этом $K < T/3$. Тогда равенство $\sum\limits_{j=0}^{T-1} \pi_j \varepsilon_{kj} = 0$ выполняется для всех натуральных k, меньших K, и справедливо соотношение $\sum\limits_{j=0}^{T-1} \pi_j \varepsilon_{Kj} \neq 0$.

Рассмотрим последовательность булевых функций $F' = \{f'_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, такую, что $f'_n = f_{n'+T-1}$, где $n' = 2nT$. Обозначим $f_n^m = f'_n[m, n'+m]$, $m = 0, 1, \ldots, T-1$. Ясно, что все функции f_n^m являются l-уравновешенными периодическими симметрическими функциями с периодом T.

Для веса функции f_n^m, используя лемму 5, имеем

$$
\begin{aligned}
W_{f_n^m} &= \sum_{i=0}^{n'} \binom{n'}{i} \pi_{i+m} = \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{i=0}^{\lfloor (n'-j)/T \rfloor} \binom{n'}{j+iT} \pi_{j+m} \\
&= \sum_{j=0}^{T-1} \pi_{j+m} \sum_{i=0}^{\lfloor (n'-j)/T \rfloor} \binom{n'}{j+iT} \\
&= \sum_{j=0}^{T-1} \pi_{j+m} \left(\frac{2^{n'}}{T} + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\lfloor (T-1)/2 \rfloor} r_k^{n'} \cos \frac{\pi k (n' - 2j)}{T} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{T-1} \pi_{j+m} \left(\frac{2^{n'}}{T} + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\lfloor (T-1)/2 \rfloor} r_k^{n'} \cos \frac{2\pi k j}{T} \right) \\
&= \frac{2^{n'}}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \pi_{j+m} + \sum_{k=1}^{\lfloor (T-1)/2 \rfloor} r_k^{n'} \cdot \frac{2}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \pi_{j+m} \cos \frac{2\pi k j}{T} \\
&= \frac{2^{n'}}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \pi_j + \sum_{k=1}^{\lfloor (T-1)/2 \rfloor} r_k^{n'} \cdot \frac{2}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \pi_j \cos \frac{2\pi k (j-m)}{T}.
\end{aligned}
$$

По предположению, $\sum\limits_{j=0}^{T-1} \pi_j \varepsilon_{kj} = 0$ для всех натуральных k, меньших K. Отсюда $\sum\limits_{j=0}^{T-1} \pi_j \varepsilon_{kj} \varepsilon_{-km} = 0$ для любого m и, таким образом, $\sum\limits_{j=0}^{T-1} \pi_j \cos \frac{2\pi k(j-m)}{T} = 0$. Далее, из того, что $\sum\limits_{j=0}^{T-1} \pi_j \varepsilon_{Kj} \neq 0$ и $K < T/3$, следует, что значения трех сумм $\sum\limits_{j=0}^{T-1} \pi_j \varepsilon_{Kj} \varepsilon_{-Km}$, $m = 0, 1, 2$, попарно различны. Однако значения этих сумм равны по абсолютной величине, поэтому среди значений их действительных частей $\sum\limits_{j=0}^{T-1} \pi_j \cos \frac{2\pi K(j-m)}{T}$, $m = 0, 1, 2$, найдутся, по крайней мере, два различных. Пусть различны значения сумм $\sum\limits_{j=0}^{T-1} \pi_j \cos \frac{2\pi K(j-m_1)}{T}$ и $\sum\limits_{j=0}^{T-1} \pi_j \cos \frac{2\pi K(j-m_2)}{T}$, $m_1, m_2 \in \{0, 1, 2\}$. тогда, используя замечания 3 и 4, имеем

$$\begin{aligned}
|W_{f_n^{m_1}} - W_{f_n^{m_2}}| &= \Bigg| \sum_{k=K}^{\lfloor (T-1)/2 \rfloor} r_k^{n'} \cdot \frac{2}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \pi_j \cos \frac{2\pi k(j-m_1)}{T} \\
&\qquad - \sum_{k=K}^{\lfloor (T-1)/2 \rfloor} r_k^{n'} \cdot \frac{2}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \pi_j \cos \frac{2\pi k(j-m_2)}{T} \Bigg| \\
&\geqslant \left| r_K^{n'} \cdot \frac{2}{T} \left(\sum_{j=0}^{T-1} \pi_j \cos \frac{2\pi K(j-m_1)}{T} - \sum_{j=0}^{T-1} \pi_j \cos \frac{2\pi K(j-m_2)}{T} \right) \right| \\
&\qquad - \Bigg| \sum_{k=K+1}^{\lfloor (T-1)/2 \rfloor} r_k^{n'} \cdot \frac{2}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \pi_j \cos \frac{2\pi k(j-m_1)}{T} \\
&\qquad - \sum_{k=K+1}^{\lfloor (T-1)/2 \rfloor} r_k^{n'} \cdot \frac{2}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \pi_j \cos \frac{2\pi k(j-m_2)}{T} \Bigg| \\
&\geqslant r_K^{n'} \cdot \frac{2}{T} \left| \sum_{j=0}^{T-1} \pi_j \cos \frac{2\pi K(j-m_1)}{T} - \sum_{j=0}^{T-1} \pi_j \cos \frac{2\pi K(j-m_2)}{T} \right| \\
&\qquad - r_{K+1}^{n'} \cdot \frac{T-1}{2} \cdot \frac{2}{T} \cdot 2T = C_1 r_K^{n'} - C_2 r_{K+1}^{n'},
\end{aligned}$$

где C_1 и C_2 не зависят от n', причем $C_1 > 0$. Так как $r_K > r_{K+1}$ и $r_K > 1$, то при $n' \to \infty$ имеем $C_1 r_K^{n'} - C_2 r_{K+1}^{n'} \to \infty$. Следовательно, все функции из последовательности F', а значит, и из последовательности F, не могут быть одновременно l-уравновешенными, что противоречит условию леммы 6.

Замечание 6. Каждая функция из последовательности F является подфункцией всех последующих функций из F, поскольку получается из них подстановкой константы 0 вместо лишних переменных. Поэтому если в F найдется функция, не являющаяся l-уравновешенной, то F содержит лишь конечное число l-уравновешенных функций.

Лемма 7. *Пусть f — периодическая симметрическая булева функция с периодом $T = 6$, задаваемая характеристическим отрезком $\widetilde{\pi}[6] = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_5)$, и пусть выполняется равенство $\sum\limits_{j=0}^{5} \pi_j \varepsilon_j = 0$. Тогда функция f имеет период $T' \leqslant 3$.*

Доказательство. Отрицание периодической симметрической булевой функцией является периодической симметрической булевой функцией с тем же периодом. Поэтому достаточно ограничиться случаем $\sum\limits_{j=0}^{5} \pi_j \leqslant 3$. Заметим также, что достаточно обнаружить период T' в последовательности $(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_5)$.

1. Пусть $\sum\limits_{j=0}^{5} \pi_j = 0$. Тогда, очевидно, все π_j имеют значение 0 и функция f имеет период 1.

2. Пусть $\sum\limits_{j=0}^{5} \pi_j = 1$, т. е. отлично от 0 только одно из π_j. Тогда $\sum\limits_{j=0}^{5} \pi_j \varepsilon_j \neq 0$, поэтому такой случай невозможен.

3. Пусть $\sum\limits_{j=0}^{5} \pi_j = 2$, и пусть $\pi_{m_1} = \pi_{m_2} = 1$, $0 \leqslant m_1 < m_2 \leqslant 5$. Тогда из $\sum\limits_{j=0}^{5} \pi_j \varepsilon_j = 0$ следует $\varepsilon_{m_1} = -\varepsilon_{m_2}$. Отсюда $m_2 - m_1 = 3$ и, таким образом, равенство $\pi_j = \pi_{j+3}$ выполняется для $j = 0, 1, 2$. Поэтому функция f имеет период 3.

4. Пусть $\sum\limits_{j=0}^{5} \pi_j = 3$. Легко видеть, что при этом соотношение $\sum\limits_{j=0}^{5} \pi_j \varepsilon_j = 0$ выполнено только в двух случаях: $\widetilde{\pi}[6] = (0,1,0,1,0,1)$ и $\widetilde{\pi}[6] = (1,0,1,0,1,0)$. Поэтому функция f имеет период 2.

Все случаи рассмотрены. Лемма 7 доказана.

Корень h-й степени из единицы ξ называется *примитивным*, если все корни h-й степени из единицы представимы в виде ξ^i, $i \in \{0, 1, \ldots, h-1\}$.

Лемма 8 [8, с. 203]. *Пусть корнем многочлена $F(x)$ с рациональными коэффициентами является примитивный корень ξ из единицы степени h. Тогда все примитивные корни h-й степени из единицы являются корнями многочлена $F(x)$.*

Лемма 9. *Пусть f — периодическая симметрическая булева функция с периодом T, задаваемая характеристическим отрезком $\widetilde{\pi}[T] = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{T-1})$, и пусть для любого натурального k, $k < T/3$, выполняется равенство $\sum\limits_{j=0}^{T-1} \pi_j \varepsilon_{kj} = 0$. Тогда функция f имеет период $T' \leqslant 3$.*

Доказательство. Рассмотрим многочлен $\Pi(x) = \sum\limits_{j=0}^{T-1} \pi_j x^j$; его степень по построению не превосходит $T-1$. При $k < T/3$ по условию леммы 9 $\sum\limits_{j=0}^{T-1} \pi_j \varepsilon_{kj} = 0$. По замечанию 2 имеем $\varepsilon_{kj} = \varepsilon_k^j$, поэтому ε_k — корень многочлена $\Pi(x)$.

Каждый корень степени T из единицы является примитивным корнем из единицы некоторой натуральной степени h, делящей T нацело, причем примитивным корнем 1-й степени из единицы является лишь ε_0, 2-й степени — лишь $\varepsilon_{T/2}$ (если T делится на 2), 3-й степени — лишь $\varepsilon_{T/3}$ и $\varepsilon_{2T/3}$ (если T делится на 3). Пусть ε_j — произвольный примитивный корень из единицы степени h, $h > 3$, тогда $\varepsilon_{T/h}$ — также примитивный корень из единицы степени h. Так как $T/h < T/3$, то число $\varepsilon_{T/h}$ является по доказанному выше корнем многочлена $\Pi(x)$; по лемме 8 получаем, что ε_j также корень многочлена $\Pi(x)$. Следовательно, корнями многочлена $\Pi(x)$ являются все корни из единицы степени T, за исключением, быть может, ε_0, $\varepsilon_{T/2}$ (если T делится на 2), $\varepsilon_{T/3}$ и $\varepsilon_{2T/3}$ (если T делится на 3).

Обозначим через $\Psi(x)$ многочлен $\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq T/3, T/2, 2T/3}}^{T-1} (x - \varepsilon_j)$. Все корни многочлена $\Psi(x)$ являются корнями многочлена $\Pi(x)$, и в поле многочленов с комплексными коэффициентами нет делителей нуля, поэтому $\Pi(x)$ делится на $\Psi(x)$. Частное обозначим через $\Theta(x)$: $\Pi(x) = \Psi(x)\Theta(x)$, $\deg \Theta(x) \leqslant \deg \Pi(x) - \deg \Psi(x)$. (Знак неравенства поставлен с тем, чтобы не исключать возможный случай $\Pi(x) \equiv 0$.) В зависимости от того, делится ли T на 2 и 3, возможны четыре случая.

1. Пусть T не делится ни на 2, ни на 3. Тогда

$$\Psi(x) = \prod_{j=1}^{T-1} (x - \varepsilon_j) = \frac{\prod\limits_{j=0}^{T-1} (x - \varepsilon_j)}{x - \varepsilon_0} = \frac{x^T - 1}{x - 1} = \sum_{j=0}^{T-1} x^j.$$

Отсюда следует, что $\Pi(x) = \sum\limits_{j=0}^{T-1} x^j \cdot \Theta(x)$. Из того, что $\deg \Theta(x) \leqslant \deg \Pi(x) - \deg \Psi(x) \leqslant 0$, получаем, что многочлен $\Theta(x)$ равен некоторой константе a. Следовательно, $\Pi(x) = a\sum\limits_{j=0}^{T-1} x^j$ и, таким образом, коэффициенты при всех степенях многочлена $\Pi(x)$ равны. Тогда, очевидно, равенство $\pi_j = \pi_{j+1}$ выполняется для любого целого неотрицательного j. Поэтому функция f имеет период 1.

2. Пусть $T = 2t$, T не делится на 3. Тогда

$$\Psi(x) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{T-1}(x-\varepsilon_j) = \frac{\prod\limits_{j=0}^{T-1}(x-\varepsilon_j)}{(x-\varepsilon_0)(x-\varepsilon_t)} = \frac{x^{2t}-1}{(x-1)(x+1)} = \sum_{j=0}^{t-1} x^{2j}.$$

Отсюда имеем $\Pi(x) = \sum\limits_{j=0}^{t-1} x^{2j}\cdot\Theta(x)$. Из того, что $\deg\Theta(x) \leqslant \deg\Pi(x) - \deg\Psi(x) \leqslant 2t-1-(2t-2) = 1$, следует, что многочлен $\Theta(x)$ имеет вид $ax+b$. Следовательно, $\Pi(x) = (ax+b)\sum\limits_{j=0}^{t-1} x^{2j}$ и, таким образом, последовательность коэффициентов многочлена $\Pi(x)$ имеет период 2. Поэтому функция f также имеет период 2.

3. Пусть $T = 3t$, T не делится на 2. Тогда

$$\Psi(x) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq t,2t}}^{T-1}(x-\varepsilon_j) = \frac{\prod\limits_{j=0}^{T-1}(x-\varepsilon_j)}{(x-\varepsilon_0)(x-\varepsilon_t)(x-\varepsilon_{2t})}$$
$$= \frac{x^{3t}-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \sum_{j=0}^{t-1} x^{3j}.$$

Отсюда имеем $\Pi(x) = \sum\limits_{j=0}^{t-1} x^{3j}\cdot\Theta(x)$. Из того, что $\deg\Theta(x) \leqslant \deg\Pi(x) - \deg\Psi(x) \leqslant 3t-1-(3t-3) = 2$, следует, что многочлен $\Theta(x)$ имеет вид ax^2+bx+c. Следовательно, $\Pi(x) = (ax^2+bx+c)\sum\limits_{j=0}^{t-1} x^{3j}$ и последовательность коэффициентов многочлена $\Pi(x)$ имеет период 3. Поэтому функция f также имеет период 3.

4. Пусть $T = 6t$. Тогда

$$\Psi(x) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2t,3t,4t}}^{T-1} (x-\varepsilon_j) = \frac{\prod\limits_{j=0}^{T-1}(x-\varepsilon_j)}{(x-\varepsilon_0)(x-\varepsilon_{2t})(x-\varepsilon_{3t})(x-\varepsilon_{4t})}$$

$$= \frac{x^{6t}-1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{x^6-1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}\sum_{j=0}^{t-1} x^{6j} = (x^2-x+1)\sum_{j=0}^{t-1} x^{6j}.$$

Отсюда имеем $\Pi(x) = (x^2-x+1)\sum\limits_{j=0}^{t-1} x^{6j}\Theta(x)$. Из того, что $\deg\Theta(x) \leqslant \deg\Pi(x) - \deg\Psi(x) \leqslant 6t-1-(6t-4) = 3$, следует, что многочлен $\Theta(x)$ имеет вид ax^3+bx^2+cx+d. Следовательно, $\Pi(x) = ((ax^3+bx^2+cx+d)(x^2-x+1))\sum\limits_{j=0}^{t-1} x^{6j}$ и последовательность коэффициентов многочлена $\Pi(x)$ имеет период 6. Поэтому функция f также имеет период 6. Покажем, что 6 — не минимальный период. Из равенства $\sum\limits_{j=0}^{6t-1}\pi_j\varepsilon_{tj} = 0$ следует, что $\sum\limits_{j=0}^{6t-1}\pi_j\varepsilon_{tj} = \sum\limits_{i=0}^{t-1}\sum\limits_{j=0}^{5}\pi_{j+6i}\varepsilon_{t(j+6i)} = \sum\limits_{i=0}^{t-1}\sum\limits_{j=0}^{5}\pi_j\varepsilon_{tj} = t\sum\limits_{j=0}^{5}\pi_j\varepsilon_j^t = 0$ и, таким образом, $\sum\limits_{j=0}^{5}\pi_j\varepsilon_j^t = 0$. Поскольку ε^t является первым корнем 6-й степени из единицы, условия леммы 7 полностью соблюдены и, таким образом, функция f имеет период не более 3.

Все случаи рассмотрены. Лемма 9 доказана.

Обозначим через $\mathscr{F}(l, T_{\max})$ множество, состоящее из всех l-уравновешенных периодических симметрических булевых функций с периодом, не превосходящим $T_{\max}$.

Лемма 10. *Для любого натурального l множество $\mathscr{F}(l, 2^{l+1})\backslash\mathscr{F}(l,3)$ конечно.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\pi}[T]$ — некоторый характеристический отрезок длины T, где $T \leqslant 2^{l+1}$. Рассмотрим последовательность периодических симметрических булевых функций $F(\widetilde{\pi}[T]) = \{f_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, задаваемую характеристическим отрезком $\widetilde{\pi}[T]$. Если последовательность $F(\widetilde{\pi}[T])$ содержит бесконечное число l-уравновешенных функций, то по леммам 6 и 9 и замечанию 6 все функции из последовательности $F(\widetilde{\pi}[T])$ являются периодическими симметрическими булевыми функциями с периодом, не превосходящим 3. Таким образом, последовательность $F(\widetilde{\pi}[T])$ в любом случае содержит лишь конечное число функций из множества $\mathscr{F}(l, 2^{l+1}) \setminus \mathscr{F}(l, 3)$.

Существует лишь конечное число характеристических отрезков длины, не превосходящей 2^{l+1}, и, значит, множество $\mathscr{F}(l, 2^{l+1}) \setminus \mathscr{F}(l, 3)$ покрывается конечным числом последовательностей $F(\widetilde{\pi}[T])$. Следовательно, множество $\mathscr{F}(l, 2^{l+1}) \setminus \mathscr{F}(l, 3)$ конечно.

Лемма 11. *Для любых натуральных l и n' существует такое натуральное N, что у любой l-уравновешенной булевой функции f от N переменных найдется периодическая симметрическая подфункция f' от n' переменных с периодом, не превосходящим 3.*

Доказательство. По лемме 10 найдется такое натуральное n_2, не меньшее n', для которого не существует булевых функций, принадлежащих множеству $\mathscr{F}(l, 2^{l+1}) \setminus \mathscr{F}(l, 3)$ и имеющих не менее n_2 переменных. По лемме 4 существует такое натуральное N, что у любой l-уравновешенной булевой функции f от N переменных найдется периодическая симметрическая подфункция f' от n_2 переменных с периодом, не превосходящим 2^{l+1}, и, следовательно, не превосходящим 3. Функция $f'[0, n']$ является, очевидно, периодической симметрической подфункцией от n' переменных с периодом, не превосходящим 3. Лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Пусть функция f является периодической симметрической булевой функцией от n' переменных с периодом $T \leqslant 3$. Тогда $W_f \in \{0, \lfloor 2^{n'}/3 \rfloor, \lceil 2^{n'}/3 \rceil, 2^{n'}/2, \lfloor 2^{n'+1}/3 \rfloor, \lceil 2^{n'+1}/3 \rceil, 2^{n'}\}$.*

Доказательство. 1. Пусть $T = 1$. Тогда $W_f = \sum_{i=0}^{n'} \binom{n'}{i} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{n'} \binom{n'}{i} = \pi_0 \cdot 2^{n'}$ и, следовательно, в этом случае $W_f \in \{0, 2^{n'}\}$.

2. Пусть $T = 2$. Тогда по лемме 5 имеем

$$W_f = \sum_{i=0}^{n'} \binom{n'}{i} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\lfloor n'/2 \rfloor} \binom{n'}{2i} + \pi_1 \sum_{i=0}^{\lfloor (n'-1)/2 \rfloor} \binom{n'}{1+2i}$$
$$= \frac{2^{n'}}{2}\pi_0 + \frac{2^{n'}}{2}\pi_1 = (\pi_0 + \pi_1)\frac{2^{n'}}{2}$$

и, следовательно, в этом случае $W_f \in \{0, 2^{n'}/2, 2^{n'}\}$.

3. Пусть $T = 3$. По лемме 5, учитывая, что $r_1 = 1$, имеем

$$W_f = \sum_{i=0}^{n'} \binom{n'}{i} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\lfloor n'/3 \rfloor} \binom{n'}{3i} + \pi_1 \sum_{i=0}^{\lfloor (n'-1)/3 \rfloor} \binom{n'}{1+3i}$$

$$+ \pi_2 \sum_{i=0}^{\lfloor (n'-2)/3 \rfloor} \binom{n'}{2+3i} = \left(\frac{2^{n'}}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{\pi n'}{3} \right) \pi_0$$

$$+ \left(\frac{2^{n'}}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{\pi (n'-2)}{3} \right) \pi_1$$

$$+ \left(\frac{2^{n'}}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{\pi (n'-4)}{3} \right) \pi_2 = \frac{2^{n'}}{3} (\pi_0 + \pi_1 + \pi_2)$$

$$+ \frac{2}{3} \left(\pi_0 \cos \frac{\pi n'}{3} + \pi_1 \cos \frac{\pi (n'-2)}{3} + \pi_2 \cos \frac{\pi (n'-4)}{3} \right).$$

Из того, что $\cos \frac{\pi n'}{3} + \cos \frac{\pi (n'-2)}{3} + \cos \frac{\pi (n'-4)}{3} = 0$, заключаем, что $\left| \pi_0 \cos \frac{\pi n'}{3} + \pi_1 \cos \frac{\pi (n'-2)}{3} + \pi_2 \cos \frac{\pi (n'-4)}{3} \right| \leqslant 1$. Отсюда получаем неравенства

$$\left\lfloor \frac{2^{n'}(\pi_0 + \pi_1 + \pi_2)}{3} \right\rfloor \leqslant W_f \leqslant \left\lceil \frac{2^{n'}(\pi_0 + \pi_1 + \pi_2)}{3} \right\rceil.$$

Следовательно, в этом случае $W_f \in \{0, \lfloor 2^{n'}/3 \rfloor, \lceil 2^{n'}/3 \rceil, \lfloor 2^{n'+1}/3 \rfloor, \lceil 2^{n'+1}/3 \rceil, 2^{n'}\}$.

Все случаи рассмотрены. Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Для любого натурального l и любого положительного ε существует такое натуральное N, что для любого натурального n, $n \geqslant N$, и для любой l-уравновешенной булевой функции f от n переменных имеет место одно из следующих пяти неравенств:*

$$\begin{aligned} &\rho(f) < \varepsilon; \\ &|\rho(f) - 1/3| < \varepsilon; \\ &|\rho(f) - 1/2| < \varepsilon; \\ &|\rho(f) - 2/3| < \varepsilon; \\ &\rho(f) > 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Доказательство. По леммам 11 и 12 для любых натуральных l и n' существует такое натуральное N, что у любой l-уравновешенной булевой функции f от N переменных найдется периодическая симметрическая подфункция от n' переменных, вес которой принадлежит множеству $\{0, \lfloor 2^{n'}/3 \rfloor, \lceil 2^{n'}/3 \rceil, 2^{n'}/2, \lfloor 2^{n'+1}/3 \rfloor, \lceil 2^{n'+1}/3 \rceil, 2^{n'}\}$. Тогда из свойства l-уравновешенности следует, что веса всех n-местных подфункций f' функции f должны одновременно удовлетворять одному из неравенств

$$W_{f'} < l+1;$$
$$\left|W_{f'} - 2^{n'}/3\right| < l+1;$$
$$\left|W_{f'} - 2^{n'-1}\right| < l+1;$$
$$\left|W_{f'} - 2^{n'+1}/3\right| < l+1;$$
$$W_{f'} > 2^{n'} - (l+1).$$

Положим $n' = \lceil \log_2 \frac{l+1}{\varepsilon} \rceil$ и разделим обе части каждого из 5 неравенств на $2^{n'}$. Учитывая, что $\min\limits_{f'} \rho(f') \leqslant \rho(f) \leqslant \max\limits_{f'} \rho(f')$, получим заключение леммы 13.

Справедливость теоремы непосредственно следует из лемм 2 и 13.

Следствие 1. *Пусть $F = \{f_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ — последовательность различных l-уравновешенных булевых функций для некоторого заданного l, причем число переменных, от которых зависят функции этой последовательности, не убывает. Тогда множество предельных значений плотности функций из последовательности F содержится в множестве $\{0, 1/3, 1/2, 2/3, 1\}$.*

Следствие 2. *Пусть $F = \{f_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательность булевых функций, причем число переменных, от которых зависят функции этой последовательности, не убывает и стремится к бесконечности. Пусть множество предельных значений плотности функций из последовательности F не пересекается с множеством $\{1/3, 1/2, 2/3\}$ и пусть веса функций из последовательности F и их отрицаний стремятся к бесконечности. Тогда для любого натурального l найдется такое натуральное $k(l)$, что все функции из последовательности F, начиная с $f_{k(l)}$, не являются l-уравновешенными.*

Автор выражает искреннюю признательность О. Б. Лупанову, О. М. Касим-Заде и М. И. Гринчуку за внимание к данной работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Липатов Е. П.** Об одной классификации двоичных наборов и свойствах классов однородности // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1982. Вып. 39. С. 67–84.
2. **Таранников Ю. В.** Класс 1-уравновешенных функций и сложность его реализации // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1991. N 2. С. 83–85.
3. **Таранников Ю. В.** О числе единичных значений l-уравновешенных булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. 1995. Т. 2, N 1. С. 80–81.

4. **Рыбников К. А.** Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.
5. **Nešetřil J.** Some nonstandard Ramsey-like applications // Theor. Comput. Sci. 1984. V. 34, N 1–2. P. 3–15.
6. **Риордан Дж.** Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982.
7. **Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.** Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. М.: Наука, 1992.
8. **Ван дер Варден Б. Л.** Алгебра. М.: Наука, 1979.

Адрес автора:

Россия,
119899 Москва,
Воробьевы горы,
МГУ, мех.-мат. факультет

Статья поступила
19 сентября 1995 г.