ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 1996. Том 3, № 1, 9–22

УДК 519.8

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ СИСТЕМ НЕЗАВИСИМОСТИ

В. П. Ильев

Рассматривается градиентный (жадный) алгоритм оптимизации неотрицательной аддитивной функции на системе независимости и ее двойственном аналоге — верхней системе независимости. В работах [1,2] установлено, что на некоторых системах независимости этот алгоритм может давать сколь угодно плохое решение задачи минимизации. В то же время в этих работах для задачи максимизации на системе независимости получена нижняя оценка погрешности решения с использованием градиентного алгоритма в наихудшем случае. В настоящей работе получена верхняя оценка погрешности решения задачи минимизации на верхней системе независимости посредством градиентного алгоритма. Предложены оценки погрешности такого решения в терминах вспомогательного гиперграфа. Эти оценки эффективно вычислимы для ряда задач минимизации и максимизации на системах независимости. В дальнейшем эта техника применяется для получения оценки погрешности решения задачи о минимальном двусвязном остовном подграфе посредством известного градиентного алгоритма.

§ 1. Системы независимости и градиентный алгоритм

Пусть U — конечное множество, $\mathscr{S} \subseteq 2^U$ — непустое семейство его подмножеств. Семейство $\mathscr{S}$ называется *системой независимости*, если

$$(X \subseteq Y \in \mathscr{S}) \Rightarrow X \in \mathscr{S}.$$

Система независимости называется *дискретной*, если $\mathscr{S} = 2^U$.

Множество U называется *носителем* системы $\mathscr{S}$, а множества семейства $\mathscr{S}$ — *независимыми множествами*. Подмножества U, не вошедшие в семейство $\mathscr{S}$, называются *зависимыми*, а минимальные по включению зависимые множества — *циклами*.

Базой множества $W \subseteq U$ называется любое максимальное по включению независимое подмножество W. Базы множества U называются *базами* системы независимости. Введем обозначения:

$$lr(W) = \min\{|B| : B \text{ — база множества } W\},$$

$$ur(W) = \max\{|B| : B \text{ — база множества } W\}.$$

Числа $lr(W), ur(W)$ называются соответственно *нижним* и *верхним рангами* множества W. Величина

$$c = c(\mathscr{S}) = \min_{W \subseteq U} \frac{lr(W)}{ur(W)}$$

называется *кривизной* системы независимости $\mathscr{S}$. Очевидно, что для любой системы независимости величина c удовлетворяет неравенствам $0 < c \leqslant 1$.

Матроидом называется система независимости кривизны 1.

Рассмотрим дискретную оптимизационную задачу вида: найти

$$\max\{f(X) : X \in \mathscr{S}\} \text{или} \min\{f(X) : X \in \mathscr{S}\}, \tag{1}$$

где $\mathscr{S} \subseteq 2^U$ — система независимости, а $f : U \to R_+$ — неотрицательная аддитивная весовая функция. Многие хорошо известные комбинаторные проблемы относятся к этому типу.

Для решения задачи (1) применим следующий алгоритм.

Алгоритм A_1

Шаг 0. Упорядочить множество $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ по невозрастанию весов (для задачи максимизации) или по неубыванию весов (для задачи минимизации); $X := \varnothing$; перейти на шаг 1.

Шаг i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Если $X \cup u_i \in \mathscr{S}$, то $X := X \cup u_i$; если $i < n$, то перейти на шаг $i + 1$, иначе $Gr := X$.

Конец.

Алгоритмы такого типа в англоязычной литературе имеют название *greedy*, что обычно переводится как *жадный*. Жадный алгоритм является дискретным аналогом градиентного алгоритма, поэтому его называют также *градиентным алгоритмом*.

Следующая теорема является одной из центральных в теории матроидов.

Теорема 1 (Радо, Эдмондс). *Пусть U — конечное множество, $\mathscr{S} \subseteq 2^U$ — система независимости. Множество $Gr \in \mathscr{S}$, найденное градиентным алгоритмом A_1, является оптимальным решением задачи (1) для всякой аддитивной весовой функции f тогда и только тогда, когда $\mathscr{S}$ является матроидом.*

Теорема 1 была установлена Р. Радо [3] и получила широкую известность после работ Дж. Эдмондса [4, 5]. Независимо Н. И. Глебов [6, 7] установил более общий результат о максимизации выпуклой сепарабельной функции на обобщенной матроидной структуре в целочисленной решетке Z_+^n.

Заметим, что градиентный алгоритм A_1 представляет собой эффективный метод решения целого ряда дискретных оптимизационных задач. Как следует из теоремы Радо — Эдмондса, алгоритм A_1 является точным алгоритмом решения задачи (1) на матроиде. Если же система $\mathscr{S}$ не матроид, то алгоритм A_1 в общем случае не находит оптимального решения и может рассматриваться лишь как приближенный метод решения задачи (1). В связи с этим большой интерес представляют оценки погрешности решения, получаемого градиентным алгоритмом.

Рассмотрим произвольную систему независимости $\mathscr{S}$ с носителем U, и пусть $Opt \in \mathscr{S}$ — оптимальное решение задачи (1), $Gr \in \mathscr{S}$ — решение, найденное алгоритмом A_1. Очевидно, что в случае задачи максимизации $f(Gr)/f(Opt) \leqslant 1$. В работе [1] получена следующая нижняя оценка погрешности решения задачи максимизации с помощью градиентного алгоритма.

Теорема 2 [4]. *Пусть $\mathscr{S}$ — произвольная система независимости. Тогда для любой аддитивной весовой функции задачи максимизации* (1) *имеет место достижимая оценка*

$$\frac{f(Gr)}{f(Opt)} \geqslant c, \tag{2}$$

где c — кривизна системы $\mathscr{S}$.

В случае задачи минимизации справедливо неравенство $f(Gr)/f(Opt) \geqslant 1$. Однако для градиентного алгоритма решения этой задачи в общем случае не существует верхней оценки погрешности, подобной (2). В работе [8] доказано существование систем независимости $\mathscr{S}$ с носителем U, обладающих следующим свойством: для любой постоянной $a > 1$ существует такая аддитивная весовая функция $f : U \to R_+$, что $f(Gr)/f(Opt) > a$. Мы докажем более сильное утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{S} \subseteq 2^U$ — произвольная система независимости, отличная от матроида. Тогда для любой постоянной $a > 1$ существует такая аддитивная весовая функция $f : U \to R_+$ задачи минимизации* (1), *что*

$$\frac{f(Gr)}{f(Opt)} > a.$$

Доказательство. Известно, что система независимости является матроидом тогда и только тогда, когда семейство $\mathscr{B}$ ее баз обладает следующим свойством: для любых A, B из $\mathscr{B}$ и любого $u \in A \setminus B$ существует $v \in B \setminus A$ такое, что $(A \setminus u) \cup v \in \mathscr{B}$. Поскольку $\mathscr{S}$ отлична от матроида, в ней найдутся две базы $A, B \in \mathscr{B}$ и такой элемент $u_0 \in A \setminus B$, что $(A \setminus u_0) \cup v \notin \mathscr{B}$ для всякого $v \in B \setminus A$.

Пусть $a > 1$ — произвольная постоянная. Зададим аддитивную весовую функцию f следующим образом: $f(u) = 1$ для всех $u \in A \setminus u_0$, $f(u_0) = \max(0, 2a|B \setminus A| + (a-1)|A \cap B| - |A \setminus B| + 2)$, $f(v) = 2$ для всех $v \in B \setminus A$ и $f(u) = b$ для всех остальных элементов $u \in U$, где b — число, большее $\sum\limits_{u \in A \cup B} f(u)$. Тогда

$$\begin{aligned} f(A) &= |A| - 1 + f(u_0) \geqslant |A \setminus B| + |A \cap B| - 1 + 2a|B \setminus A| \\ &\quad + (a-1)|A \cap B| - |A \setminus B| + 2 = 2a|B \setminus A| + a|A \cap B| + 1 \\ &= a(2|B \setminus A| + |A \cap B|) + 1 = af(B) + 1 > af(B). \end{aligned}$$

Но, очевидно, $Gr = A$, $Opt = B$, т. е. $f(Gr) > af(Opt)$. Теорема 3 доказана.

Как следует из теоремы 3, градиентный метод решения задачи минимизации на системах независимости может приводить к сколь угодно плохому решению. Это обстоятельство может служить основанием для вывода об ограниченной применимости градиентных алгоритмов для решения задач комбинаторной оптимизации, сводящихся к минимизационной схеме (1). Лучших результатов позволяет достичь сведе́ние таких задач к задаче минимизации аддитивной функции на так называемой верхней системе независимости.

§ 2. Верхние системы независимости

Пусть U — конечное множество, $\overline{\mathscr{S}} \subseteq 2^U$ — непустое семейство его подмножеств. Семейство $\overline{\mathscr{S}}$ называется *верхней системой независимости*, если

$$(X \in \overline{\mathscr{S}}, X \subseteq Y) \Rightarrow Y \in \overline{\mathscr{S}}.$$

(Обычные системы независимости, определение которых приведено в § 1, будем считать *нижними системами независимости.*) Верхняя система независимости называется *дискретной*, если $\overline{\mathscr{S}} = 2^U$, и *тривиальной*, если $\overline{\mathscr{S}} = \{U\}$.

Множество U называется *носителем* системы $\overline{\mathscr{S}}$, а множества семейства $\overline{\mathscr{S}}$ — *верхними независимыми множествами.* Подмножества U, не принадлежащие семейству $\overline{\mathscr{S}}$, называются *верхними зависимыми*, а максимальные по включению верхние зависимые множества — *верхними циклами.*

Примером может служить *система (вершинных) покрытий графа*, в которой $\overline{\mathscr{S}}$ есть семейство всех вершинных покрытий некоторого графа

$G = (U, E)$, а верхними циклами являются всевозможные множества вида $U \setminus \{u, v\}$, где $uv \in E$.

Верхней базой множества $W \subseteq U$ называется любое минимальное по включению верхнее независимое множество, содержащее W. Верхние базы пустого множества $\varnothing$ называются *верхними базами* системы $\overline{S}$. Введем обозначения:

$$\overline{lr}(W) = \min\{|B| : B\text{— верхняя база множества } W\},$$

$$\overline{ur}(W) = \max\{|B| : B\text{— верхняя база множества } W\}.$$

Величина

$$\bar{c} = \bar{c}(\overline{\mathscr{S}}) = \max_{\substack{W \subseteq U \\ W \notin \overline{\mathscr{S}}}} \frac{\overline{ur}(W) - |W|}{\overline{lr}(W) - |W|}$$

называется *кривизной* верхней системы независимости $\overline{\mathscr{S}}$, или *верхней кривизной* системы $\overline{\mathscr{S}}$. Очевидно, что для любой верхней системы независимости $\bar{c} \geqslant 1$.

Верхним матроидом называется верхняя система независимости кривизны 1. Верхние матроиды и их обобщения изучались в [9].

Легко видеть, что если $\overline{\mathscr{S}} \subseteq 2^U$ — верхняя система независимости, то семейство

$$\mathscr{S} = \{W \subseteq U : U \setminus W \in \overline{\mathscr{S}}\}$$

является нижней системой независимости, и наоборот.

Систему (3) будем называть <u>*двойственной*</u> системой независимости к верхней системе независимости $\overline{\mathscr{S}}$. Аналогично верхнюю систему независимости $\overline{\mathscr{S}}$ назовем *двойственной* к системе независимости $\mathscr{S}$. Двойственные системы независимости рассматривались в [10].

Теорема 4. *Если c — кривизна системы независимости $\mathscr{S}$, а $\bar{c}$ — кривизна двойственной верхней системы независимости $\overline{\mathscr{S}}$, то*

$$\bar{c} = \frac{1}{c}.$$

Доказательство. Напомним, что

$$c = c(\mathscr{S}) = \min_{W \subseteq U} \frac{lr(W)}{ur(W)}.$$

Пусть W^* — множество, на котором достигается минимум, B_1, B_2 — его базы мощности $lr(W^*), ur(W^*)$ соответственно, т. е.

$$c = \frac{lr(W^*)}{ur(W^*)} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $W^* = B_1 \cup B_2$.

Заметим, что $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, так как иначе

$$\frac{lr(W^* \setminus (B_1 \cap B_2)}{ur(W^* \setminus (B_1 \cap B_2)} < \frac{lr(W^*)}{ur(W^*)}.$$

Поэтому $U \setminus B_1 = B_2 \cup (U \setminus W^*), U \setminus B_2 = B_1 \cup (U \setminus W^*)$.

Так как $U \setminus B_1$, $U \setminus B_2$ — верхние базы множества $U \setminus W^*$ мощности $\overline{ur}(U \setminus W^*)$, $\overline{lr}(U \setminus W^*)$ соответственно, то

$$\frac{\overline{ur}(U \setminus W^*) - |U \setminus W^*|}{\overline{lr}(U \setminus W^*) - |U \setminus W^*|} = \frac{|U \setminus B_1| - |U \setminus W^*|}{|U \setminus B_2| - |U \setminus W^*|} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{c}.$$

Отсюда следует, что

$$\bar{c} = \max_{\substack{W \subseteq U \\ W \notin \overline{\mathscr{S}}}} \frac{\overline{ur}(W) - |W|}{\overline{lr}(W) - |W|} = \frac{\overline{ur}(U \setminus W^*) - |U \setminus W^*|}{\overline{lr}(U \setminus W^*) - |U \setminus W^*|} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{c}.$$

Теорема 4 доказана.

§ 3. Оценка погрешности градиентного алгоритма для задачи минимизации на верхней системе независимости

Рассмотрим дискретную оптимизационную задачу: найти

$$\min\{f(X) : X \in \overline{\mathscr{S}}\}, \tag{4}$$

где $\overline{\mathscr{S}} \subseteq 2^U$ — верхняя система независимости, а $f : U \to R_+$ — неотрицательная аддитивная весовая функция.

Рассмотрим следующий вариант градиентного алгоритма решения задачи (4).

Алгоритм A_2

Шаг 0. Упорядочить множество U по невозрастанию весов

$$f(u_1) \geqslant f(u_2) \geqslant \cdots \geqslant f(u_n);$$

$X := U$; перейти на шаг 1.

Шаг i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Если $X \setminus u_i \in \overline{\mathscr{S}}$, то $X := X \setminus u_i$; если $i < n$, то перейти на шаг $i + 1$, иначе $\overline{Gr} := X$.

Конец.

Несложно проверить, что для верхних систем независимости и алгоритма A_2 справедлив аналог теоремы Радо — Эдмондса, из которого следует, что A_2 — точный алгоритм решения задачи (4) на верхнем матроиде, а для произвольной верхней системы независимости в общем случае этот алгоритм не находит оптимального решения.

Пусть $\overline{\mathscr{S}}$ — произвольная верхняя система независимости с носителем U, $\overline{Opt} \in \overline{\mathscr{S}}$ — оптимальное решение задачи (4), а $\overline{Gr} \in \overline{\mathscr{S}}$ — решение, найденное алгоритмом A_2. Как и ранее, нас будет интересовать оценка погрешности решения, получаемого градиентным алгоритмом A_2.

Справедлива следующая оценка, аналогичная (2), использующая кривизну верхней системы независимости $\overline{\mathscr{S}}$.

Теорема 5. *Пусть $\overline{\mathscr{S}} \subseteq 2^U$ — произвольная верхняя система независимости. Тогда для любой аддитивной целевой функции задачи (4) имеет место достижимая оценка*

$$\frac{f(\overline{Gr})}{f(\overline{Opt})} \leqslant \overline{c}, \tag{5}$$

где $\overline{c}$ — кривизна системы $\overline{\mathscr{S}}$.

Доказательство. Пусть, как и ранее,

$$f(u_1) \geqslant f(u_2) \geqslant \cdots \geqslant f(u_n).$$

Положим $U_i = \{u_1, \ldots, u_i\}$, $\overline{U}_i = U \setminus U_i$, $i = 1, \ldots, n$, $f(u_{n+1}) = 0$. Тогда

$$f(\overline{Gr}) = \sum_{i=1}^{n} |\overline{Gr} \cap U_i|(f(u_i) - f(u_{i+1})),$$

$$f(\overline{Opt}) = \sum_{i=1}^{n} |\overline{Opt} \cap U_i|(f(u_i) - f(u_{i+1})).$$

Поскольку $(\overline{Opt} \cap U_i) \cup \overline{U}_i$ является верхним независимым множеством, содержащим $\overline{U}_i$, имеем $|\overline{Opt} \cap U_i| \geqslant \overline{lr}(\overline{U}_i) - |\overline{U}_i|$. А так как $(\overline{Gr} \cap U_i) \cup \overline{U}_i$ является верхней базой множества $\overline{U}_i$, то $|\overline{Gr} \cap U_i| \leqslant \overline{ur}(\overline{U}_i) - |\overline{U}_i|$. Следовательно,

$$\frac{f(\overline{Gr})}{f(\overline{Opt})} \leqslant \max \frac{\overline{ur}(\overline{U}_i) - |\overline{U}_i|}{\overline{lr}(\overline{U}_i) - |\overline{U}_i|} \leqslant \max_{\substack{W \subseteq U \\ W \notin \overline{\mathscr{S}}}} \frac{\overline{ur}(W) - |W|}{\overline{lr}(W) - |W|} = \overline{c},$$

где первый максимум берется по всем верхним зависимым множествам $\overline{U}_i$. Теорема 5 доказана.

§ 4. Оценки кривизны

Следует отметить, что оценки (2), (5) имеют преимущественно теоретический характер. Вообще говоря, вычислить кривизну системы независимости ничуть не легче, чем решить задачу (1) или (4), поскольку определение кривизны требует в худшем случае экспоненциального относительно n числа обращений к оракулу, выясняющему независимость системы.

В связи с этим возникает вопрос о получении эффективно вычислимых оценок уклонения градиентных решений задач (1), (4) от оптимальных решений. Далее предлагаются оценки в терминах вспомогательного гиперграфа, которые являются эффективно вычислимыми для ряда дискретных оптимизационных задач.

Рассмотрим произвольную нижнюю систему независимости $\mathscr{S}$ с носителем U. Семейство всех циклов системы $\mathscr{S}$ обозначим $\mathscr{E}$. Очевидно, что семейство $\mathscr{E}$ обладает следующим свойством:

$$\text{если } C, D \in \mathscr{E} \text{ и } C \subseteq D, \text{то } C = D. \tag{6}$$

Будем рассматривать семейство $\mathscr{E}$ как множество ребер гиперграфа $H = (U, \mathscr{E})$ с множеством вершин U. Очевидно, что гиперграф H однозначно определяется системой независимости $\mathscr{S}$, и наоборот. Поэтому в дальнейшем семейство $\mathscr{S}$ будем называть *системой независимости гиперграфа* H, а множества из $\mathscr{S}$ — *независимыми множествами гиперграфа* H и записывать $H = (U, \mathscr{S})$. Будем рассматривать только гиперграфы, множества ребер которых обладают свойством (6).

Обозначим через $\mathscr{E}(u)$ множество ребер гиперграфа $H = (U, \mathscr{E})$, инцидентных вершине u. Величину $d(u) = |\mathscr{E}(u)|$ будем называть *степенью* вершины u. Максимальную степень вершин гиперграфа H обозначим Δ. Рассмотрим произвольное подмножество $W \subseteq U$ и через $\mathscr{B}(W)$ обозначим семейство баз множества W.

Лемма 1. *Пусть $W \subseteq U$ и $A, B \in \mathscr{B}(W)$. Тогда для каждой вершины $u \in A \setminus B$ существует такая вершина $v \in B \setminus A$, что u — единственная не принадлежащая B вершина некоторого ребра $E \in \mathscr{E}(v)$.*

Доказательство. Сначала отметим, что ребра гиперграфа H — это циклы системы независимости гиперграфа, а A, B — независимые множества. Значит, ни одно ребро из H не содержится целиком ни в A, ни в B.

Заметим, что существует ребро $E \in \mathscr{E}(u)$, единственной не принадлежащей B вершиной которого является u. Действительно, если бы в каждом ребре гиперграфа H, инцидентном u, существовала другая вершина, не принадлежащая B, то множество $B \cup u$ не содержало бы ребер гиперграфа H и, значит, было бы независимым. Но это невозможно, так как $B \cup u \subseteq W$, а B — база множества W.

Далее, в этом ребре E обязательно найдется хотя бы одна вершина $v \in B \setminus A$. В самом деле, все вершины ребра E, кроме u, принадлежат

B, и если бы все они также принадлежали A, то ребро E целиком содержалось бы в A. Итак, $E \in \mathscr{E}(v)$ для некоторой вершины $v \in B \setminus A$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть система независимости $\mathscr{S} \subseteq 2^U$ отлична от дискретной и $W \subseteq U$. Тогда для любых $A, B \in \mathscr{B}(W)$ справедливо неравенство*

$$|A| \leqslant \Delta |B|.$$

Доказательство. Так как система $\mathscr{S}$ отлична от дискретной, то гиперграф $H = (U, \mathscr{E})$ имеет ребра, откуда $\Delta \geqslant 1$.

В лемме 1 каждой вершине $u \in A \setminus B$ ставится в соответствие некоторая вершина $v \in B \setminus A$. Множество вершин $u \in A \setminus B$, которым соответствует одна и та же $v \in B \setminus A$, обозначим $N(v)$. Если какая-то вершина $v \in B \setminus A$ не соответствует в указанном смысле ни одной вершине $u \in A \setminus B$, то положим $N(v) = \varnothing$. Следовательно,

$$A \setminus B = \bigcup_{v \in B \setminus A} N(v).$$

Из леммы 1 также следует, что $|N(v)| \leqslant d(v) \leqslant \Delta$. Поэтому

$$|A \setminus B| = |\bigcup_{v \in B \setminus A} N(v)| = \sum_{v \in B \setminus A} |N(v)| \leqslant \Delta |B \setminus A|.$$

Далее имеем

$$|A| - |B| = |A \setminus B| - |B \setminus A| \leqslant \Delta |B \setminus A| - |B \setminus A| = (\Delta - 1)|B \setminus A| \leqslant (\Delta - 1)|B|,$$

откуда и следует утверждение леммы 2.

Непосредственно из леммы 2 вытекает следующая

Теорема 6. *Для кривизны с произвольной отличной от дискретной системы независимости справедлива оценка*

$$c \geqslant \frac{1}{\Delta}.$$

Следствием теорем 2 и 6 является

Теорема 7. *Пусть $\mathscr{S}$ — произвольная система независимости, отличная от дискретной. Тогда для любой аддитивной целевой функции f задачи* (1) *справедлива нижняя оценка*

$$\frac{f(Gr)}{f(Opt)} \geqslant \frac{1}{\Delta}. \tag{7}$$

Из теорем 4, 5 и 6 следует также верхняя оценка качества градиентного решения задачи минимизации на верхней системе независимости.

Теорема 8. *Пусть $\overline{\mathscr{S}}$ — произвольная верхняя система независимости, отличная от дискретной. Тогда для любой аддитивной весовой функции задачи* (4) *справедлива оценка*

$$\frac{f(\overline{Gr})}{f(\overline{Opt})} \leqslant \Delta, \tag{8}$$

где Δ *— максимальная степень вершин гиперграфа* $H = (U, \mathscr{S})$, *а* $\mathscr{S}$ *— двойственная система независимости.*

Замечание 1. Оценки (7), (8) являются достижимыми.

Оценка (7) достигается, например, на системах независимости звездных графов. Рассмотрим звезду $K_{1,n-1}$, вершину степени $n-1$ обозначим u_1, а висячие вершины — $u_2, \ldots, u_n$. Веса всех вершин положим равными единице.

Пусть вершины графа упорядочены (на шаге 0 алгоритма A_1) в соответствии с их номерами: $f(u_1) \geqslant f(u_2) \geqslant \cdots \geqslant f(u_n)$. Тогда градиентный алгоритм на шаге 1 поместит в Gr вершину u_1, а затем на шагах $2, \ldots, n$ отбросит последовательно все остальные вершины, так как элементы $u_2, \ldots, u_n$ зависимы от u_1. Следовательно, $Gr = \{u_1\}, f(Gr) = |Gr| = 1$. Но очевидно, что $Opt = \{u_2, \ldots, u_n\}, f(Opt) = |Opt| = n-1$. Поэтому $f(Gr) = \frac{1}{n-1} f(Opt)$. Легко проверить, что кривизна системы независимости графа $K_{1,n-1}$ равна $1/(n-1)$.

Аналогично можно показать, что оценка (7) достигается на системах независимости графов, в каждом из которых любая компонента связности представляет собой звезду $K_{1,n-1}$.

Оценка (8) достигается на двойственной системе независимости.

Замечание 2. В ряде случаев величина Δ эффективно вычислима. Так будет, например, если циклы системы независимости $\mathscr{S}$ (т. е. ребра гиперграфа $H = (U, \mathscr{E})$) имеют ограниченную мощность.

Такое ограничение нередко естественно возникает в реальных задачах, моделью которых является дискретная оптимизационная задача (1).

§ 5. Оценка погрешности алгоритма построения минимального двусвязного остова

В данном параграфе в основном использована терминология из [11].

Рассмотрим следующую экстремальную задачу на графе.

Задача о минимальном k-связном остове. Дан взвешенный неориентированный граф $G = (V, U)$, связность которого не меньше k (скажем, полный граф). Требуется найти в G k-связный остовный подграф минимального веса.

При $k = 1$ имеем полиномиально разрешимую задачу поиска остовного дерева минимального веса, а в случае $k \geqslant 2$ задача является NP-трудной [12].

В [13] приведен следующий приближенный метод решения данной задачи.

Алгоритм A_3

Шаг 0. Упорядочить ребра графа G в порядке невозрастания их весов, $G_0 := G, i := 1$. Перейти на шаг 1.

Шаг 1. Удалить из G_{i-1} ребро $u_i = x_i y_i$ и получить граф G_i. Перейти на шаг 2.

Шаг 2. Если вершины x_i, y_i локально k-связны в G_i, то $i := i + 1$ и перейти на шаг 4, иначе на шаг 3.

Шаг 3. В G_i восстановить ребро u_i, $i := i + 1$ и перейти на шаг 4.

Шаг 4. Если $i \leqslant |U|$, то перейти на шаг 1, иначе на шаг 5.

Шаг 5. k-связный остовный подграф построен.

Конец.

В [13] показано, что алгоритм A_3 правильно находит k-связный остовный подграф данного графа G. Однако ничего не было известно о том, как сильно отличается решение, полученное этим алгоритмом, от оптимального. Далее предлагается оценка погрешности алгоритма A_3 для случая $k = 2$, основанная на результатах § 3.

Заметим, что семейство всех k-связных остовных подграфов (рассматриваемых как множества ребер) данного графа $G = (V, U)$ образует верхнюю систему независимости с носителем U. Поэтому задача о минимальном k-связном остове является частным случаем дискретной оптимизационной задачи (4) на верхней системе $\overline{\mathscr{S}} \subseteq 2^U$ всех k-связных остовных подграфов графа G, а алгоритм A_3 есть не что иное, как градиентный алгоритм решения этой задачи.

Рассмотрим подробно случай $k = 2$. Следующее утверждение получено нами совместно с И. А. Молдовзновым [14].

Теорема 9. *Пусть G — произвольный n-вершинный граф, связность которого не меньше 2, $\overline{\mathscr{S}}$ — верхняя система независимости, образованная всеми двусвязными остовными пографами в G. Тогда*

$$\overline{c} = \overline{c}(\overline{\mathscr{S}}) \leqslant n - 2.$$

Доказательство. Величины $\overline{ur}(W) - |W|$ и $\overline{lr}(W) - |W|$, $W \subseteq U$, фигурирующие в определении кривизны $\overline{c}$, можно интерпретировать соответственно как наибольшее и наименьшее числа ребер, которые необходимо добавить к множеству F, чтобы получить двусвязный остовный подграф такой, что после удаления из него любого добавленного ребра получается подграф, не являющийся двусвязным (т. е. верхнюю базу системы $\overline{\mathscr{S}}$). Легко видеть, что

$$\bar{c} = \max_{\substack{W \subseteq U \\ W \notin \overline{\mathscr{S}}}} \frac{\overline{ur}(W) - |W|}{\overline{lr}(W) - |W|} \leqslant \frac{\max(\overline{ur}(W) - |W|)}{\min(\overline{lr}(W) - |W|)} = \frac{t+p}{t+q} \leqslant \frac{p}{q},$$

где t — число ребер, которое нужно добавить для получения связного остовного подграфа (не обязательно одного и того же в числителе и знаменателе), а p, q — количества ребер для последующего построения верхних баз. Так как число блоков в произвольном n-вершинном графе не превосходит $n-1$ и это число уменьшается при добавлении к графу любого ребра, концы которого принадлежат разным блокам, то $p \leqslant n-2$. Используя также очевидное неравенство $q \geqslant 1$, получаем $\bar{c} \leqslant n-2$. Теорема 9 доказана.

Следствие. *Для полного графа* K_n

$$\bar{c} = n - 2.$$

Доказательство. В качестве W рассмотрим множество ребер произвольной гамильтоновой цепи в полном n-вершинном графе $G = K_n$. Тогда наименьшая верхняя база для W — это соответствующий гамильтонов цикл, полученный из W добавлением одного ребра, а наибольшая верхняя база для W — квадрат исходной гамильтоновой цепи. Следовательно, $\overline{lr}(W) = 1$, $\overline{ur}(W) = n-2$ и $\bar{c} = n-2$.

Из теорем 5, 9 вытекает следующая оценка погрешности алгоритма A_3.

Теорема 10. *Для произвольного взвешенного n-вершинного графа, связность которого не меньше 2, отношение веса двусвязного остова, построенного алгоритмом A_3, к весу минимального двусвязного остова не превосходит $n-2$.*

Замечание 3. Оценка достижима в случае, если допускаются ребра нулевого веса. Если веса всех ребер положительны, то величина $f(\overline{Gr})/f(\overline{Opt})$ может принимать значения, сколь угодно близкие к $n-2$.

В силу замечания 3 можно утверждать, что асимптотически алгоритм A_3 может давать сильно отличающееся от оптимального решение, однако для фиксированного графа отношение веса приближенного решения к весу оптимального решения ограничено сверху константой.

Автор благодарен А. А. Колоколову и А. В. Косточке за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Korte B., Hausmann D.** An analysis of the greedy heuristic for independence systems // Ann. Discrete Math. Amsterdam: North-Holland, 1978. V. 2. P. 65–74.
2. **Hausmann D., Korte B.** Lower bounds on the worst-case complexity of some oracle algorithms // Discrete Math. 1978. V. 24, N 3. P. 261–276.
3. **Rado R.** Note on independence functions // Proc. London. Math. Soc. 1957. V. 7, N 26. P. 300–320.
4. **Edmonds J.** Submodular functions, matroids and certain polyhedra // Combinatorial Structures and their Applications. New York: Gordon and Breach, 1970. P. 69–87.
5. **Edmonds J.** Matroids and the greedy algorithm // Math. Programming. 1971. V. 1, N 2. P. 127–136.
6. **Глебов Н. И.** Об одном классе задач выпуклого целочисленного программирования // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1973. Вып. 11. С. 38–42.
7. **Глебов Н. И.** О применимости метода покоординатного спуска к некоторым задачам выпуклого целочисленного программирования // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1978. Вып. 17. С. 52–59.
8. **Korte B.** Approximative algorithms for discrete optimization problems // Ann. Discrete Math. Amsterdam: North-Holland, 1979. V. 4. P. 85–120.
9. **Ковалев М. М.** Матроиды в дискретной оптимизации. Минск: Университетское, 1987.
10. **Исаченко А. Н.** Об одном критерии для матроидов // Вестн. Белорус. гос. ун-та. 1983. Сер. 1, № 2. С. 59–60.
11. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973.
12. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
13. **Попков В. К.** Математические модели живучести сетей связи. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1990.

14. **Ильев В. П., Молдованов И. А.** Оценка погрешности градиентного алгоритма для задачи о минимальном двусвязном остове // 10-я Байкальская школа-семинар по методам оптимизации и их приложениям: Тез. докл. Иркутск, 1995. С. 298–299.

Адрес автора:

Россия,
644077 Омск,
пр. Мира, 55а,
Омский
государственный университет
E-mail: iljev@univer.omsk.su

Статья поступила

22 сентября 1995 г.