ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 1996. Том 3, № 1, 23–42

УДК 519.6

О ЧИСЛЕ $(-1,1)$-МАТРИЦ ПОРЯДКА n С ФИКСИРОВАННЫМ ПЕРМАНЕНТОМ*)

А. Д. Коршунов

Найдены верхние оценки для числа $(-1,1)$-матриц порядка n, перманент которых равен k, $-n! \leqslant k \leqslant n!$. В частности, доказано, что число таких матриц с нулевым перманентом не превосходит $(2,3/\sqrt{n})2^{n^2}$.

§ 1. Некоторые свойства перманента $(-1,1)$-матриц

Пусть $M = (m_{ij})$ — квадратная матрица порядка n над коммутативным кольцом. *Перманентом* матрицы M, обозначаемого $\operatorname{per} M$, называется величина

$$\operatorname{per} M = \sum m_{1i_1} \ldots m_{ni_n}, \tag{1}$$

где суммирование осуществляется по всем перестановкам $(i_1, \ldots, i_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$.

Перманенты матриц изучаются многими исследователями. Им посвящены монографии [1, 2], в первой из которых приведена обширная библиография по перманентам. Довольно подробно рассмотрены перманенты $(0,1)$-матриц (т. е. матриц, состоящих из нулей и единиц) в монографии [3].

Ниже рассматриваются только квадратные $(-1,1)$-матрицы $M = (m_{ij})$ порядка n, $n = 1, 2, \ldots$, т. е. такие матрицы, в которых $m_{ij} = \pm 1$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$. Множество всех таких матриц обозначается через $\mathfrak{M}(n)$.

Пусть $\mathfrak{M}(n,k)$ обозначает множество матриц $M \in \mathfrak{M}(n)$ таких, что $\operatorname{per} M = k$. При каждом фиксированном n представляет интерес задача о нахождении мощности множества $\mathfrak{M}(n,k)$ при любом k. Так как число перестановок степени n равно $n!$, то перманент любой матрицы $M \in \mathfrak{M}(n)$ удовлетворяет неравенствам: $-n! \leqslant \operatorname{per} M \leqslant n!$.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–01–01484) и Международного научного фонда и Правительства РФ (грант RPY300).

Основной целью настоящей статьи является установление нетривиальных верхних оценок для размера множества $\mathfrak{M}(n,k)$ при любых n и k, где
$$-n! \leqslant k \leqslant n!. \qquad (2)$$
Ясно, что при любом $n \geqslant 2$ перманент любой матрицы из $\mathfrak{M}(n)$ является четным числом. Оказывается, что среди четных k из (2) имеется незначительное число k таких, что $|\mathfrak{M}(n,k)| \neq 0$. Этот факт вытекает из теоремы 1.

Предварительно убедимся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть n — произвольное натуральное число и $w = \lfloor \log_2 n \rfloor$. Тогда $n! \equiv 0 \pmod{2^{n-w}}$, если $n \neq 2^s-1$, и $n! \equiv 0 \pmod{2^{n-w-1}}$, если $n = 2^s - 1$ (s — натуральное число).*

Доказательство. Пусть m — произвольное натуральное число. Ясно, что среди первых 2^m натуральных чисел имеется точно 2^{m-1} четных чисел, 2^{m-2} чисел, делящихся на 4, 2^{m-3} чисел, делящихся на 8, и т. д. и, наконец, одно число, делящееся на 2^m. Следовательно,
$$2^m! = 2^{2^{m-1}+2^{m-2}+\dots+1} \cdot s = 2^{2^m-1}s, \qquad (3)$$
где s — нечетно.

Пусть n — произвольное натуральное число. Представим его в двоичной системе счисления: $n = 2^{v_k} + 2^{v_{k-1}} + \dots + 2^{v_1} + \alpha$, где $v_k > v_{k-1} > \dots > v_1 \geqslant 1$, $\alpha = 0$ при четном n, $\alpha = 1$ при нечетном n. Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ разобьем на $k + \alpha$ блоков. В первый блок включим первые 2^{v_k} чисел, во второй блок — следующие $2^{v_{k-1}}$ чисел, ..., в k-й блок включим числа, начиная с $2^{v_k} + 2^{v_{k-1}} + \dots + 2^{v_2} + 1$ и кончая числом $2^{v_k} + 2^{v_{k-1}} + \dots + 2^{v_1}$. Если n нечетно, то имеется $(k+1)$-й блок, состоящий из последнего числа. Произведение чисел, принадлежащих i-му блоку, обозначим через z_i, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Нетрудно видеть, что если $2^{v_i}! = 2^a p_1$, где p_1 нечетно, то $z_i = 2^a p_2$, где p_2 нечетно. Поэтому
$$n! = q \prod_{i=1}^{k} 2^{2^{v_i-1}} = q2^{n-k},$$
где q нечетно.

Ясно, что $n-k \geqslant n - \lfloor \log_2 n \rfloor = n - w$ при $n \neq 2^{v_k+1} - 1$ и $n - k = n - w$ при $n = 2^{v_k+1} - 2$. Следовательно, в этом случае
$$n! \equiv 0 \pmod{2^{n-w}}.$$

Далее, пусть $n = 2^{v_k+1} - 1$ и $n! = 2^a b_1$, где b_1 нечетно. Тогда $a = n - \log_2(n+1) = n - 1 - w$. Поэтому $n! \equiv 0 \pmod{2^{n-1-w}}$. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Пусть n — произвольное натуральное число, $n \geqslant 2$, и $w = \lfloor \log_2 n \rfloor$. Тогда если $n \neq 2^s - 1$ и $k \not\equiv 0 \pmod{2^{n-w}}$, или $n = 2^s - 1$ и $k \not\equiv 0 \pmod{2^{n-w-1}}$, то $|\mathfrak{M}(n,k)| = 0$.*

Доказательство. Теорема доказывается индукцией по n. Ясно, что перманент каждой $(-1,1)$-матрицы порядка 2 является четным числом. Следовательно, при $n = 2$ теорема справедлива.

Предположим, что теорема верна при любом $n < r$, где $r \geqslant 3$. Покажем, что теорема остается верной при $n = r$.

Пусть $M = (m_{ij})$ — произвольная матрица из $\mathfrak{M}(r)$. Обозначим через M_i матрицу порядка $r-1$, получаемую из M удалением последней строки и i-го столбца. Из определения перманента следует, что

$$\operatorname{per} M = \sum_{i=1}^{r} m_{ri} \operatorname{per} M_i. \tag{4}$$

Таким образом, обозначив через a сумму положительных слагаемых из (4), получаем, что сумма отрицательных слагаемых в (4) равна $r! - a$. Поэтому

$$\operatorname{per} M = a - (r! - a) = 2a - r!. \tag{5}$$

Сначала предположим, что $r = 2^s - 1$. В этом случае согласно лемме 1 справедливо соотношение

$$r! \equiv 0 \pmod{2^{r-1-\lfloor \log_2 r \rfloor}}, \tag{6}$$

а по индукционному предположению $\operatorname{per} M_i \equiv 0 \pmod{2^{r-1-\lfloor \log_2 (r-1) \rfloor}}$, т. е. $\operatorname{per} M_i \equiv 0 \pmod{2^{r-1-\lfloor \log_2 r \rfloor}}$. Поэтому

$$a \equiv 0 \pmod{2^{r-1-\lfloor \log_2 r \rfloor}}. \tag{7}$$

Из (5)–(7) следует, что если $r = 2^s - 1$, то

$$\operatorname{per} M \equiv 0 \pmod{2^{r-1-\lfloor \log_2 r \rfloor}}. \tag{8}$$

Пусть $r \neq 2^s - 1$ и $r \neq 2^s$. Тогда согласно лемме 1 справедливо соотношение

$$r! \equiv 0 \pmod{2^{r-\lfloor \log_2 r \rfloor}}, \tag{9}$$

а по индукционному предположению $\operatorname{per} M_i \equiv 0 \pmod{2^{r-1-\lfloor \log_2 (r-1) \rfloor}}$, т. е. $\operatorname{per} M_i \equiv 0 \pmod{2^{r-1-\lfloor \log_2 r \rfloor}}$. Поэтому

$$a \equiv 0 \pmod{2^{r-1-\lfloor \log_2 r \rfloor}}. \tag{10}$$

Из (5), (9) и (10) следует, что если $r \neq 2^s - 1$ и $r \neq 2^s$, то

$$\operatorname{per} M \equiv 0 \pmod{2^{r-\lfloor \log_2 r \rfloor}}. \tag{11}$$

Наконец, пусть $r = 2^s$. Тогда согласно (3) справедливо соотношение

$$r! \equiv 0 \pmod{2^{r-1}}, \tag{12}$$

а по индукционному предположению $\operatorname{per} M_i \equiv 0 \pmod{2^{r-2-\lfloor \log_2(r-1) \rfloor}}$, т. е. $\operatorname{per} M_i \equiv 0 \pmod{2^{r-1-\lfloor \log_2 r \rfloor}}$. Поэтому

$$a \equiv 0 \pmod{2^{r-1-\lfloor \log_2 r \rfloor}}. \tag{13}$$

Пользуясь (5), (12) и (13), получаем, что если $r = 2^s$, то

$$\operatorname{per} M \equiv 0 \pmod{2^{r-\lfloor \log_2 r \rfloor}}. \tag{14}$$

Из (8), (11) и (14) вытекает, что теорема справедлива при любом n. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 является усилением утверждения 1 из [4] и следствия 3.4 из [5].

Задача нахождения мощности множества $\mathfrak{M}(n, k)$ при условии, что k удовлетворяет (2), является весьма сложной, за исключением тех k, о которых говорится в теореме 1, и случаев, когда k близко либо к $n!$, либо к $-n!$. Ниже (теоремы 2 и 3) рассматриваются такие k, что $|k| > n! - 2(n-1)! = (n-1)!(n-2)$.

Обозначим через M_n^0 квадратную матрицу порядка n, состоящую из одних единиц. Матрицу $M \in \mathfrak{M}(n)$ назовем *регулярной*, если M может быть получена из M_n^0 инвертированием некоторых строк, а затем в полученной матрице — инвертированием некоторых столбцов (инвертирование строки (столбца) означает умножение этой строки (столбца) на -1). В противном случае M называется *нерегулярной*.

Теорема 2. *Перманент любой нерегулярной* $(-1, 1)$*-матрицы* M *порядка* n *удовлетворяет неравенству*

$$|\operatorname{per} M| \geqslant n! - 2(n-1)!.$$

Доказательство. Пусть $M = (m_{ij})$ — произвольная нерегулярная матрица из $\mathfrak{M}(n, k)$, $n \geqslant 2$. Пользуясь определением нерегулярной $(-1, 1)$-матрицы, легко видеть, что в M имеются две строки (скажем, k-я и v-я) и два столбца (скажем, s-й и w-й) такие, что среди элементов m_{ks}, m_{kw}, m_{vs} и m_{vw} имеются точно три одинаковых элемента. Без уменьшения общности можно полагать, что $k = s = 1$, $v = w = 2$. Нетрудно убедиться, что в подматрице, состоящей из первых двух строк матрицы M, имеется еще не менее $n - 2$ подматриц порядка 2, в каждой из которых содержится точно три одинаковых элемента.

Обозначим через M_{ij} матрицу порядка $n-2$, получаемую из M удалением первой и второй строк, а также i-го и j-го столбцов. Тогда имеем

$$|\mathrm{per}\, M| \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (m_{1v}m_{2j} + m_{2i}m_{1j})\mathrm{per}\, M_{ij}|$$
$$\leqslant (n-2) \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |(m_{1i}m_{2j} + m_{2i}m_{1j})|.$$

Поскольку среди сумм $m_{1i}m_{2j} + m_{2i}m_{1j}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, не менее $n-1$ сумм равны нулю, то

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |m_{1v}m_{2j} + m_{2i}m_{1j}| \leqslant 2\left(\binom{n}{2} - (n-1)\right) = (n-1)(n-2).$$

Следовательно,

$$|\mathrm{per}\, M| \leqslant (n-2)!(n-1)(n-2) = n! - 2(n-1)!.$$

Теорема 2 доказана.

Другое доказательство теоремы 1 содержится в [3, утверждение 3].

Следствие 1. *Для $(-1,1)$-матрицы M порядка n равенство $|\mathrm{per}\, M| = n!$ справедливо тогда и только тогда, когда M является регулярной.*

Теорема 3. *При любом $n \geqslant 1$ справедливо соотношение*

$$|\mathfrak{M}(n,n!)| = |\mathfrak{M}(n,-n!)| = 2^{2n-2}.$$

Доказательство. Согласно следствию 1 достаточно ограничиться рассмотрением только регулярных $(-1,1)$-матриц порядка n. Сначала найдем число таких матриц. Во-первых, общее число инвертирований строк и столбцов матрицы M_n^0 равно $2^n \times 2^n = 2^{2n}$. Во-вторых, каждая регулярная матрица из $\mathfrak{M}(n)$ может быть получена из M_n^0 двумя способами. Действительно, пусть M получена из M_n^0 инвертированием некоторых r строк и w столбцов. Тогда нетрудно понять, что M также получается из M_n^0 инвертированием остальных $n-r$ строк и $n-w$ столбцов, а при инвертировании любой другой совокупности строк и столбцов в M_n^0 получается матрица, отличная от M. Поэтому число регулярных матриц из $\mathfrak{M}(n)$ равно 2^{2n-1}.

Далее, в результате инвертирования первой строки во всех регулярных матрицах из $\mathfrak{M}(n)$ с положительным перманентом получаются различные регулярные матрицы с отрицательным перманентом, а в результате инвертирования первой строки во всех регулярных матрицах из $\mathfrak{M}(n)$ с отрицательным перманентом получаются разные регулярные матрицы с положительным перманентом. Следовательно,

$$|\mathfrak{M}(n,n!)| = |\mathfrak{M}(n,-n!)| = 2^{2n-2}.$$

Теорема 3 доказана.

Из следствия 1 вытекает, что среди $(-1,1)$-матриц порядка n нет матриц M с перманентом, удовлетворяющим неравенствам: $n! - 2(n-1)! < |\operatorname{per} M| < n!$.

Верхние оценки для числа таких $(-1,1)$-матриц M порядка n, что $|\operatorname{per} M| = k$, где $0 \leqslant k \leqslant n! - 2(n-1)!$, устанавливаются ниже.

§ 2. Верхняя оценка для числа $(-1,1)$-матриц с большим перманентом

Теорема 4. *При любом* $\lambda > 1$ *число* $(-1,1)$-*матриц* M *порядка* n *таких, что* $|\operatorname{per} M| \geqslant \sqrt{2n!\lambda}$, *не превосходит* $2^{n^2}/\lambda$.

Доказательство. Справедливость этой теоремы устанавливается с привлечением следующего неравенства Чебышева. Пусть ξ — случайная величина с конечным математическим ожиданием $M\xi$ и дисперсией $D\xi$. Тогда (см., например, [6]) при любом $u > 0$

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant u\} \leqslant D\xi/u^2 = \frac{M\xi^2 - M^2\xi}{u^2}. \tag{15}$$

Будем считать, что все матрицы из $\mathfrak{M}(n)$ равновероятны, а элементы каждой матрицы порождаются независимо друг от друга с вероятностью $1/2$. В качестве ξ будем рассматривать число положительных слагаемых из (1) для случайной матрицы $M \in \mathfrak{M}(n)$.

Пусть M — произвольная матрица из $\mathfrak{M}(n)$. Обозначим через $r(M)$ число положительных слагаемых из (1). Тогда имеем

$$M\xi = 2^{-n^2} \sum_{M \in \mathfrak{M}(n)} r(M). \tag{16}$$

Будем полагать, что все матрицы из $\mathfrak{M}(n)$ и все перестановки степени n произвольным образом перенумерованы соответственно числами $1, 2, \ldots, 2^{n^2}$ и $1, 2, \ldots, n!$. Введем предикат

$$F(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если слагаемое из (1), задаваемое } j\text{-й} \\ & \text{перестановкой для } i\text{-й матрицы, равно 1;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует, что

$$M\xi = 2^{-n^2} \sum_{i \geqslant 1} \sum_{j=1}^{n!} F(i,j) = 2^{-n^2} \sum_{j=1}^{n!} \sum_{i \geqslant 1} F(i,j). \tag{18}$$

Если n четно, то при каждом фиксированном j внутренняя сумма из правой части (18) равна числу таких матриц из $\mathfrak{M}(n)$, в которых среди n

элементов, задаваемых j-й перестановкой, имеется четное число единиц. Следовательно, при четном n и любом фиксированном j имеем

$$\sum_{i\geqslant 1} F(i,j) = 2^{n(n-1)} \sum_{v=0}^{n/2} \binom{n}{2v} = 2^{n^2-1}. \tag{19}$$

Если же n нечетно, то внутренняя сумма из правой части (18) равна числу таких матриц из $\mathfrak{M}(n)$, в которых среди n элементов, задаваемых j-й перестановкой, имеется нечетное число единиц. Следовательно, при нечетном n и любом фиксированном j имеем

$$\sum_{i\geqslant 1} F(i,j) = 2^{n(n-1)} \sum_{v=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2v+1} = 2^{n^2-1}. \tag{20}$$

Из (18)–(20) следует, что

$$M\xi = \frac{1}{2}n!. \tag{21}$$

Вычислим величину $M\xi^2$, задаваемую соотношением

$$M\xi^2 = \sum_{M\in\mathfrak{M}(n)} r^2(M). \tag{22}$$

Введем предикат

$$F(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если слагаемые из (1), задаваемые } j\text{-й и } v\text{-й} \\ & \text{перестановками для } i\text{-й матрицы из } \mathfrak{M}(n)\text{, равны 1;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{23}$$

Пользуясь (22) и (23), получаем

$$M\xi^2 = 2^{-n^2} \sum_{i\geqslant 1} \sum_{j=1}^{n!} \sum_{v=1}^{n!} F(i,j,v) = 2^{-n^2} \sum_{j=1}^{n!} \sum_{v=1}^{n!} \sum_{i\geqslant 1} F(i,j,v). \tag{24}$$

Если $j = v$, то из (19) и (20) следует, что

$$\sum_{i\geqslant 1} F(i,j,v) = 2^{n^2-1}. \tag{25}$$

Если же $j \neq v$, то, как и при доказательстве соотношений (19), (20), нетрудно убедиться в том, что

$$\sum_{i\geqslant 1} F(i,j,v) = 2^{n^2-2}. \tag{26}$$

Подставляя (25) и (26) в (24), получаем

$$M\xi^2 = \frac{1}{2}n! + \frac{1}{4}n!(n!-1) = \frac{1}{4}(n!)^2 + \frac{1}{4}n! = M^2\xi + \frac{1}{2}M\xi. \tag{27}$$

Пользуясь (15) и (27), имеем

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant u\} \leqslant \frac{M\xi}{2u^2}.$$

Положив $u = \frac{1}{2}\sqrt{n!\lambda} = \sqrt{\frac{1}{2}\lambda M\xi}$, получаем

$$P\left\{|\xi - M\xi| \geqslant \sqrt{\frac{1}{2}\lambda M\xi}\right\} \leqslant \frac{1}{\lambda}. \tag{28}$$

Если число положительных слагаемых в (1) для M равно $(1/2)n! + a$, то $\operatorname{per} M = 2a$. Отсюда и из (28) следует утверждение теоремы 4.

Из теоремы 4 непосредственно вытекает

Следствие 2. *Пусть целое число s удовлетворяет неравенству $|s| \geqslant \sqrt{n!2n}$. Тогда число $(-1,1)$-матриц M порядка n таких, что $\operatorname{per} M = 2s$, не превосходит*

$$2^{n^2+1}n!/s! < 2^{n^2}/n.$$

В оставшейся части статьи устанавливается следующий основной результат.

Теорема 5. *При любых n и k, $n \geqslant 4$, $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{n!2n}$, в $\mathfrak{M}(n)$ имеется не более $(2,3/\sqrt{n})2^{n^2}$ матриц M таких, что $|\operatorname{per} M| = k$.*

Доказательство этой теоремы осуществляется в два этапа. Сначала в множестве так называемых типичных матриц из $\mathfrak{M}(n)$ находится верхняя оценка для числа матриц с перманентом, равным k (теорема 6). Затем индукцией по n устанавливается верхняя оценка для числа остальных матриц из $\mathfrak{M}(n)$ (теорема 7).

§ 3. Верхняя оценка для числа типичных матриц из $\mathfrak{M}(n)$ с небольшим перманентом

Множество $\mathfrak{M}(n)$ разобьем на попарно непересекающиеся подмножества такие, что две матрицы включаются в одно подмножество тогда и только тогда, когда они различаются только в n-й строке. Будем полагать, что эти подмножества произвольным образом перенумерованы числами $1, 2, \ldots, 2^{n(n-1}$ и i-е подмножество обозначено через $\mathfrak{M}_j(n)$.

Ясно, что

$$|\mathfrak{M}(n)| = \sum_{j=1}^{2^{n(n-1)}} |\mathfrak{M}_j(n)|, \tag{29}$$

а при каждом j, $1 \leqslant j \leqslant 2^{n(n-1)}$,

$$|\mathfrak{M}_j(n)| = 2^n. \tag{30}$$

Множество $\mathfrak{M}_j(n)$ назовем *типичным*, если для любой матрицы $M \in \mathfrak{M}_j(n)$ имеется не менее $\lfloor 2n/3 \rfloor$ подматриц M_i из (4) с ненулевым перманентом. В противном случае множество $\mathfrak{M}_j(n)$ назовем *нетипичным*. Матрицы, принадлежащие типичным множествам, будем называть *типичными*.

Теорема 6. *При любом k, $|k| \leqslant \sqrt{n!2n}$, в любом типичном множестве $\mathfrak{M}_j(n)$ имеется не более $(1/\sqrt{n})2^n$ матриц M таких, что* $\operatorname{per} M = k$.

Доказательство, основанное на использовании шпернеровых семейств, состоит в следующем. Пусть $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_v)$ и $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_v)$ — произвольные наборы длины v, элементами которых являются числа из заданного множества. Будем говорить, что набор $\tilde{\alpha}$ *предшествует* набору $\tilde{\beta}$ (обозначение: $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$), если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant v$. Если $\tilde{\alpha}$ не предшествует $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta}$ не предшествует $\tilde{\alpha}$, то наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ называются *несравнимыми*. По отношению к операции предшествования $\preceq$ множество всех рассматриваемых наборов заданной длины является частично упорядоченным множеством.

Очевидно, что максимальное число попарно несравнимых $(-1,1)$-наборов длины n совпадает с максимальным числом попарно несравнимых двоичных наборов той же длины (т. е. наборов, состоящих из нулей и единиц) и согласно [7] (см. также [8]) равно $\binom{v}{\lfloor v/2 \rfloor}$.

Пусть $\mathfrak{M}_j(n)$ — произвольное типичное множество. Ясно, что матрицы $M_1, \dots, M_n$ из (4) одни и те же для всех матриц $M \in \mathfrak{M}(n)$ и среди $M_1, \dots, M_n$ имеется не менее $\lfloor 2n/3 \rfloor$ матриц, перманенты которых отличны от нуля. Без уменьшения общности будем полагать, что M_1, $\dots, M_v$ — совокупность всех подматриц с ненулевыми перманентами, $v \geqslant \lfloor 2n/3 \rfloor$. Ясно, что все матрицы M из $\mathfrak{M}_j(n)$ такие, что $\operatorname{per} M = k$, могут быть получены следующим способом. Берется $(-1,1)$-матрица M' размера $(n-1) \times n$ такая, что после удаления i-го столбца из M' получается матрица M_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ (однозначно). Затем к M' добавляется n-я строка, в которой последние $n - v$ позиций заполняются произвольно (имеется 2^{n-v} возможностей), а первые v позиций заполняются так (если это возможно), чтобы перманент полученной матрицы порядка n оказался равным k.

Если содержание n-й строки обозначить через $(m_1, \dots, m_n)$, то должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \operatorname{per} M_i = \sum_{i=1}^{v} m_i \operatorname{per} M_i.$$

При фиксированных $m_{v+1}, \ldots, m_n$ оценим сверху число разных $(-1,1)$-наборов $\widetilde{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ таких, чтобы выполнялось (31).

Обозначим через $A(M', k)$ множество всех $(-1,1)$-наборов длины v, являющихся решениями уравнения

$$\sum_{i=1}^{v} x_i \operatorname{per} M_i = k. \tag{31}$$

В каждом наборе из $A(M', k)$ проинвертируем i-й разряд, если $\operatorname{per} M_i < 0$, и оставим этот разряд без изменения, если $\operatorname{per} M_i > 0$. Полученное множество $(-1,1)$-наборов обозначим через $A_1(M', k)$. Ясно, что каждый набор из $A_1(M', k)$ является решением уравнения

$$\sum_{i=1}^{v} y_i |\operatorname{per} M_i| = k \tag{32}$$

и число решений уравнения (32) совпадает с числом решений уравнения (31).

Пусть $\widetilde{m} = (m_1, \ldots, m_v)$ — произвольный набор из $A_1(M', k)$. Легко видеть, что если $(-1,1)$-набор $\widetilde{m}'$ длины v таков, что либо $\widetilde{m}' \succ \widetilde{m}$, либо $\widetilde{m}' \prec m$, то набор $\widetilde{m}'$ не является решением уравнения (32). Поэтому при фиксированных $m_{v+1}, \ldots, m_n$ число решений уравнения (32), а следовательно, уравнения (31) не превосходит максимального числа попарно несравнимых $(-1,1)$-наборов длины v, т. е. величины $\binom{v}{\lfloor v/2 \rfloor}$. Следовательно, в $\mathfrak{M}_j(n)$ содержится не более $\binom{v}{\lfloor v/2 \rfloor} 2^{n-v}$ матриц M таких, что $\operatorname{per} M = k$. Поскольку в интервале $[1, n]$ функция $f(v) = \binom{v}{\lfloor v/2 \rfloor} 2^{-v}$ не возрастает, а $v \geqslant \lfloor 2n/3 \rfloor$, то имеем

$$|\mathfrak{M}_j(n)| \leqslant \binom{\lfloor 2n/3 \rfloor}{\lfloor n/3 \rfloor} 2^{n - \lfloor 2n/3 \rfloor}.$$

Пользуясь этим неравенством и формулой Стирлинга, получаем

$$|\mathfrak{M}_j(n)| < \frac{1}{\sqrt{n}} 2^n.$$

Теорема 6 доказана.

Из теоремы 6 непосредственно получаем

Следствие 3. *При любых n и k, $n \geqslant 2$, $|k| \leqslant \sqrt{n!2n}$, в $\mathfrak{M}(n)$ имеется менее $(1/\sqrt{n})|\mathfrak{M}(n)|$ типичных матриц M таких, что $\operatorname{per} M = k$. В частности, в $\mathfrak{M}(n)$ имеется менее $(1/\sqrt{n})|\mathfrak{M}(n)|$ типичных матриц с нулевым перманентом.*

§ 4. Вспомогательные утверждения

Обозначим через $\mathfrak{N}(s,r)$ множество всех $(-1,1)$-матриц размера $s\times r$, а через $A(n-1,n)$ среднее число подматриц порядка $n-1$ с нулевым перманентом, содержащихся в случайной матрице из $\mathfrak{N}(n-1,n)$. (Предполагается, что все матрицы из $\mathfrak{N}(n-1,n)$ равновероятны, а элементы каждой матрицы порождаются независимо друг от друга с вероятностью $1/2$.)

Лемма 2. *Если число матриц с нулевым перманентом из $\mathfrak{M}(n-1)$ равно $\gamma_{n-1}2^{(n-1)^2}$, то*

$$A(n-1,n)=n\gamma_{n-1}.$$

Доказательство. Пусть M — произвольная матрица из $\mathfrak{N}(n-1,n)$. Обозначим через $a(M)$ число подматриц порядка $n-1$ с нулевым перманентом, содержащихся в M. Тогда имеем

$$A(n-1,n)=2^{-n(n-1)}\sum_{M\in\mathfrak{N}(n-1,n)}a(M). \tag{33}$$

Будем полагать, что все матрицы из $\mathfrak{N}(n-1,n)$ произвольным образом перенумерованы числами $1,2,\dots,2^{n(n-1)}$, а подматрице порядка $n-1$, полученной из матрицы $M\in\mathfrak{N}(n-1,n)$ удалением j-го столбца, присвоен номер j, $1\leqslant j\leqslant n$. Введем предикат

$$P(i,j)=\begin{cases}1, & \text{если } j\text{-я подматрица порядка } n-1 \text{ из } i\text{-й матрицы}\\ & \text{множества } \mathfrak{N}(n-1,n) \text{ имеет нулевой перманент;}\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{34}$$

Из (33) и (34) следует, что

$$A(n-1,n)=2^{-n(n-1)}\sum_{i\geqslant1}\sum_{j=1}^{n}P(i,j)=2^{-n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\geqslant1}P(i,j). \tag{35}$$

При каждом фиксированном j внутренняя сумма из правой части (35) равна числу таких матриц M из $\mathfrak{N}(n-1,n)$, что перманент j-й подматрицы порядка $n-1$ матрицы M равен нулю. Поэтому при любом фиксированном j имеем

$$\sum_{i\geqslant1}P(i,j)=\gamma_{n-1}2^{(n-1)^2}\cdot2^{n-1}=\gamma_{n-1}2^{n(n-1)}.$$

Следовательно, $A(n-1,n)=n\gamma_{n-1}$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *При любом t, $n\gamma_{n-1}<t\leqslant n$, число матриц из $\mathfrak{N}(n-1,n)$, в каждой из которых содержится не менее t подматриц порядка $n-1$ с нулевым перманентом, не превосходит $n\gamma_{n-1}2^{n(n-1)}/t$.*

Справедливость леммы 3 непосредственно вытекает из леммы 2 и следующего неравенства Чебышева: если математическое ожидание неотрицательной случайной величины ξ равно $M\xi$, то вероятность того, что ξ принимает значение, не меньшее $tM\xi$, не превосходит $1/t$.

Пусть M — произвольная матрица из $\mathfrak{N}(n-1,r)$, $r<n$. Матрицу M назовем *невырожденной*, если среди подматриц порядка r матрицы M имеется по крайней мере одна подматрица с ненулевым перманентом.

Матрицу M и ее последний столбец назовем *особыми*, если перманент каждой подматрицы порядка r матрицы M равен нулю, а матрица, состоящая из первых $r-1$ столбцов, является невырожденной.

Обозначим через $\mathfrak{N}^*(n-1,r)$ множество особых матриц $M=(m_{ij})$ из $\mathfrak{N}(n-1,r)$, $1\leqslant r<n$.

Лемма 4. *При любых n и r, $n\geqslant 3$, $r<n$, справедливо неравенство*

$$|\mathfrak{N}^*(n-1,r)|<|\mathfrak{N}(n-1,r)|2^{-n+r}.$$

Доказательство. Все матрицы из $\mathfrak{N}^*(n-1,r)$ (и некоторые другие) могут быть получены следующим способом. Сначала берется произвольная невырожденная матрица M из $\mathfrak{N}(n-1,r-1)$ (имеется не более $2^{(n-1)(r-1)}$ возможностей). Из определения невырожденности матриц следует, что в M имеется по крайней мере одна подматрица порядка $r-1$ с ненулевым перманентом. Пусть для определенности такая подматрица состоит из $r-1$ первых строк. Добавим к M r-й столбец и заполним в нем r первых позиций произвольным образом (имеется 2^{r-1} возможностей). Подматрицу, состоящую из $r-1$ первых строк матрицы M и добавленного столбца, обозначим через M^0.

Убедимся в том, что существует не более одного способа заполнения $n-r$ остальных позиций r-го столбца, при котором получаемая матрица размера $(n-1)\times r$ оказывается особой. Обозначим через M_i^0 матрицу порядка $r-1$, получаемую из M^0 удалением i-го столбца.

Рассмотрим подматрицу M' порядка r, состоящую из строк матрицы M^0 и s-й строки матрицы M, $r\leqslant s\leqslant n-1$. В этой подматрице требуется определить только элемент m_{sr}, поскольку остальные элементы заданы. Согласно (4) имеем

$$\operatorname{per} M'=\sum_{i=1}^{r} m_{si}\operatorname{per} M_i^0.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{r} m_{si}\operatorname{per} M_i^0=\text{const}+m_{sr}\operatorname{per} M_r^0$$

и per $M_r^0 \neq 0$, то равенство per $M' = 0$ может быть справедливым только при одном значении m_{sr}. Это означает, что элементы $m_{rr}, \ldots, m_{n-1,r}$ определяются однозначно. Следовательно,

$$|\mathfrak{N}^*(n-1,r)| < 2^{(n-1)(r-1)+r-1} = |\mathfrak{N}(n-1,r)|2^{-n+r}.$$

Лемма 4 доказана.

Пусть M — произвольная матрица из $\mathfrak{N}(n-1,n)$. Определим по индукции особые столбцы в M. Сначала среди $n-1$ первых столбцов матрицы M выделяется (если возможно) минимальное число первых столбцов, которые образуют особую матрицу. Эту матрицу обозначим через M_1. Последний столбец из M_1 объявляется *особым* столбцом в M. Если особый столбец не обнаружен, то процесс отыскания особых столбцов прекращается.

Пусть в M выделены матрицы $M_1, \ldots, M_r$ и r особых столбцов, $r \geqslant 1$. Тогда среди столбцов из M, не вошедших в $M_1, \ldots, M_r$, выбирается (если возможно) такое минимальное число очередных столбцов из M, чтобы матрица M_{r+1}, состоящая из этих столбцов и всех предшествующих неособых столбцов матрицы M, оказалась особой. Последний столбец из M_{r+1} объявляется *особым* столбцом в M.

Процесс выделения особых столбцов в M продолжается до полного исчерпания всех столбцов из M.

Ясно, что перманент подматрицы порядка $n-1$, состоящей из $n-1$ первых столбцов матрицы M из $\mathfrak{N}(n-1,n)$, равен нулю тогда и только тогда, когда среди $n-1$ первых столбцов из M имеется по крайней мере один особый столбец.

Поэтому число таких матриц M из $\mathfrak{N}(n-1,n)$, что перманент каждой подматрицы порядка $n-1$ матрицы M равен нулю, не превосходит числа матриц из $\mathfrak{N}(n-1,n)$, в каждой из которых имеется не менее двух особых столбцов. Верхняя оценка для числа таких матриц содержится в лемме 7.

Прежде чем переходить к установлению упомянутых оценок, докажем несколько утверждений.

Обозначим через $\mathfrak{N}_1(n-1,n)$ множество матриц M из $\mathfrak{N}(n-1,n)$ таких, что среди $n-4-\lceil\log_2 n\rceil$ первых столбцов матрицы M имеется по крайней мере один особый столбец.

Лемма 5. *При любом $n \geqslant 9$ справедливо неравенство*

$$|\mathfrak{N}_1(n-1,n)| \leqslant |\mathfrak{N}(n-1,n)|/(8n).$$

Доказательство. Из определения множества $\mathfrak{N}_1(n-1,n)$ следует, что

$$|\mathfrak{N}_1(n-1,n)| = \sum_{r=1}^{n-\lceil\log_2 n\rceil-4} |\mathfrak{N}^*(n-1,r)| 2^{(n-1)(n-r)} < (\text{см. лемму 4})$$

$$< \sum_{r=1}^{n-\lceil\log_2 n\rceil-4} |\mathfrak{N}(n-1,r)| 2^{(n-1)(n-r)-n+r} = |\mathfrak{N}(n-1,n)| 2^{-n} \sum_{r=1}^{n-\lceil\log_2 n\rceil-4} 2^r$$

$$< |\mathfrak{N}(n-1,n)| 2^{-\lceil\log_2 n\rceil-3} \leqslant |\mathfrak{N}(n-1,n)|/(8n).$$

Лемма 5 доказана.

Следующее утверждение является усилением леммы 4.

Лемма 6. *При любых n и r справедливо неравенство*

$$|\mathfrak{N}^*(n-1,r)| < 3\gamma_r 2^{-n+r} |\mathfrak{N}(n-1,r)|,$$

где γ_r есть доля матриц с нулевым перманентом из $\mathfrak{M}(r)$.

Доказательство. Пусть M — произвольная невырожденная матрица из $\mathfrak{N}(n-1,r-1)$ и M_1 — матрица, состоящая из r первых строк матрицы M. Добавим к M r-й столбец и заполним его следующим способом. Если в M_1 имеется по крайней мере одна подматрица порядка $r-1$ с ненулевым перманентом, то в r-м столбце заполняются r первых позиций так, чтобы подматрица M_2 порядка r, состоящая из r первых строк, имела нулевой перманент. Остальные позиции этого столбца заполняются однозначно.

Если в M_1 любая подматрица порядка $r-1$ имеет нулевой перманент, то в M выделяется другая подматрица M_3 порядка $r-1$ с ненулевым перманентом, что осуществимо в силу невырожденности матрицы M. Затем произвольным способом заполняются позиции r-го столбца, которые находятся в тех же строках, что и строки матрицы M_3, а остальные позиции заполняются однозначно.

Поскольку число матриц порядка r с нулевым перманентом равно $\gamma_r 2^{r^2}$, то в первом случае получается не более $\gamma_r 2^{r^2+(n-r-1)(r-1)} = \gamma_r 2^{(n-1)r-n+r+1}$ особых матриц размера $(n-1)\times r$. В то же время ясно, что число матриц M_1, в которых все подматрицы порядка $r-1$ имеют нулевой перманент, меньше чем $\gamma_r 2^{r(r-1)}$. Поэтому во втором случае получается менее $\gamma_r 2^{r(r-1)+(n-r-1)(r-1)+r-1} = \gamma_r 2^{(n-1)r-n+r}$ особых матриц размера $(n-1)\times r$. Следовательно, $|\mathfrak{N}^*(n-1,r)| < 3\gamma_r 2^{(n-1)r-n+r}$. Лемма 6 доказана.

Обозначим через $\mathfrak{N}(n-1,n,v)$ множество матриц из $\mathfrak{N}(n-1,n)$, в которых содержится по v подматриц порядка $n-1$ с ненулевым перманентом.

Лемма 7. *Пусть $n \geqslant 25$, а $\gamma_r \leqslant 2,3/\sqrt{r}$ при любом $r < n$. Тогда* $|\mathfrak{N}(n-1,n,0)| < 4,5\gamma_{n-1}^2|\mathfrak{N}(n-1,n)|$.

Доказательство. Ясно, что если в матрице M из $\mathfrak{N}(n-1,n)$ имеется не более одного особого столбца, то в M содержится по крайней мере одна подматрица порядка $n-1$ с ненулевым перманентом, т. е. $M \notin \mathfrak{N}(n-1,n,0)$. Поэтому величина $|\mathfrak{N}(n-1,n,0)|$ не превосходит числа матриц из $\mathfrak{N}(n-1,n)$, в каждой из которых имеется не менее двух особых столбцов. Верхнюю оценку для $|\mathfrak{N}(n-1,n,v)|$ при $v \geqslant 2$ установим индукцией по v.

Через $\mathfrak{N}(n-1,n,v,i)$ обозначим множество матриц из $\mathfrak{N}(n-1,n,v)$, в которых i-й столбец является последним особым столбцом, а через $\mathfrak{N}_1(n-1,n-v+1,i-v+1)$ — множество матриц размера $(n-1)\times(n-v+1)$, в которых $(i-v+1)$-й столбец является единственным особым столбцом.

Начнем с рассмотрения множества $\mathfrak{N}(n-1,n,2)$. Если в каждой матрице из $\mathfrak{N}(n-1,n,2,i)$ удалить первый особый столбец, то множество возникших матриц совпадет с множеством $\mathfrak{N}_1(n-1,n-1,i-1)$. Справедливость этого утверждения следует из того, что последнее множество получается из матриц размера $(n-1)\times n$, в которых только $(i-1)$-й и i-й столбцы являются особыми, после удаления из них $(i-1)$-го столбца.

Далее, число матриц из $\mathfrak{M}(n-1)$ с одним особым столбцом, находящимся среди $i-1$ первых столбцов, меньше числа матриц из $\mathfrak{M}(n-1)$ с нулевым перманентом, т. е. величины $\gamma_{n-1}2^{(n-1)^2}$. Поэтому имеется не более $\gamma_{n-1}2^{n-1}$ способов добавления j-го особого столбца при всех $j < i$ к матрице порядка $n-1$, в которой i-й столбец является особым.

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{N}(n-1,n,2)| &< \gamma_{n-1}2^{n-1}\sum_{i=2}^{n}|\mathfrak{N}_1(n-1,n-1,i-1)| \\
&< \gamma_{n-1}2^{n-1}|\mathfrak{M}(n-1,0)| = \gamma_{n-1}^2 2^{n(n-1)}. \qquad (36)
\end{aligned}
$$

Теперь оценим сверху величину $|\mathfrak{N}(n-1,n,3)|$. Если в каждой матрице из $|\mathfrak{N}(n-1,n,3,i)|$ удалить два первых особых столбца, то множество возникших матриц совпадет с множеством $\mathfrak{N}_1(n-1,n-2,i-2)$. Справедливость этого утверждения следует из того, что последнее множество получается из матриц размера $(n-1)\times n$, в которых только $(i-2)$, $(i-1)$ и i-й столбцы являются особыми, после удаления из них $(i-2)$-го и $(i-1)$-го столбцов.

Ясно, что

$$|\mathfrak{N}_1(n-1,n-2,i-2)| < |\mathfrak{N}^*(n-1,i-2)|2^{(n-1)(n-i)}. \qquad (37)$$

Пользуясь (37) и леммой 6, получаем

$$|\mathfrak{N}_1(n-1,n-2,i-2)| < 3\gamma_{i-2}2^{(n-1)(n-2)-n+i-2}. \tag{38}$$

Далее, число матриц из $\mathfrak{M}(n-1)$ с двумя особыми столбцами, находящимися среди $i-1$ первых столбцов, не превосходит числа матриц из $\mathfrak{M}(n-1)$ с нулевым перманентом. Согласно (36) число последних матриц меньше величины $\gamma_{n-1}^2 2^{n(n-1)}$. Отсюда и из (38) следует, что

$$|\mathfrak{N}(n-1,n,3)| < 3\gamma_{n-1}^2 2^{2(n-1)} \sum_{i=3}^{n} \gamma_{i-2}2^{(n-1)(n-2)-n+i-2}$$
$$= 3\gamma_{n-1}^2 2^{n(n-1)-n-2} \sum_{i=3}^{n} \gamma_{i-2}2^{i}.$$

Так как $\gamma_{i-1} \leqslant 2,3/\sqrt{i-1}$, то

$$|\mathfrak{N}(n-1,n,3)| < \frac{7}{2\sqrt{n}}\gamma_{n-1}^2|\mathfrak{N}(n-1,n)|.$$

Повторяя приведенные рассуждения, убеждаемся в том, что при любом $v \geqslant 3$

$$|\mathfrak{N}(n-1,n,v)| < \left(\frac{7}{2\sqrt{n}}\right)^{v-2} \gamma_{n-1}^2|\mathfrak{N}(n-1,n)|.$$

Следовательно,

$$|\mathfrak{N}(n-1,n,0)| < \gamma_{n-1}^2|\mathfrak{N}(n-1,n)| \left(1 + \sum_{v\geqslant 3}\left(\frac{7}{2\sqrt{n}}\right)^{v-2}\right)$$
$$< \frac{4,5}{\sqrt{n}}\gamma_{n-1}^2|\mathfrak{N}(n-1,n)|.$$

Лемма 7 доказана.

§ 5. Завершение доказательства теоремы 5

Верхняя оценка для величины $|\mathfrak{M}(n,k)|$ из теоремы 5, по-видимому, очень груба. Это подтверждается при начальных n. Так, $|\mathfrak{M}(1,0)| = 0$, $|\mathfrak{M}(2,0)| = (1/2)\,|\mathfrak{M}(2)|$, $|\mathfrak{M}(3,0)| = 0$, $|\mathfrak{M}(4,0)| < (1/3)\,|\mathfrak{M}(4)|$, $|\mathfrak{M}(5,0)| < 0,24\,|\mathfrak{M}(5)|$, $|\mathfrak{M}(8,0)| < (1/9)\,|\mathfrak{M}(8)|$. Эти оценки сильно отличаются от оценки из теоремы 5.

Обозначим через $\mathfrak{M}'(n,k)$ множество нетипичных матриц из $\mathfrak{M}(n,k)$, т. е. таких матриц $M \in \mathfrak{M}(n)$, что среди подматриц M_i из (4) матрицы M содержится менее $\lfloor 2n/3 \rfloor$ подматриц с ненулевым перманентом.

Грубость верхней оценки для $|\mathfrak{M}(n,k)|$ из теоремы 5 связана с грубостью верхней оценки для числа типичных матриц из $\mathfrak{M}(n,k)$ (теорема 6). Дело в том, что предлагаемый способ доказательства теоремы 7 позволяет получить верхнюю оценку для $|\mathfrak{M}'(n,k)|$, которая менее чем в 1,5 раза превосходит любую верхнюю оценку для числа типичных матриц из $\mathfrak{M}(n,k)$. Поэтому любое понижение верхней оценки для числа типичных матриц из $\mathfrak{M}(n,k)$ позволяет улучшить верхнюю оценку для $|\mathfrak{M}(n,k)|$.

Поскольку теорема 7 доказывается индукцией по n, грубость верхней оценки для числа типичных матриц из $\mathfrak{M}(n,k)$ усложняет доказательство теоремы 7 при небольших n, т. е. индукцию приходится начинать не с начальных значений n.

Теорема 7. *При любых n и $|k| \leqslant \sqrt{n!2n}$ справедливо неравенство*

$$|\mathfrak{M}'(n,k)| < \frac{1,3}{\sqrt{n}} 2^{n^2}.$$

Доказательство. Так как доказательство теоремы одинаково при всех k, то мы ограничимся рассмотрением множества $\mathfrak{M}'(n,0)$ и сначала рассмотрим случай достаточно больших n.

Из определения множества $\mathfrak{M}'(n,k)$ и рассуждений из доказательства теоремы 6 следует, что

$$|\mathfrak{M}'(n,0)| = |\mathfrak{N}(n-1,n,0)| 2^n + \sum_{v=2}^{\lfloor 2n/3 \rfloor} |\mathfrak{N}(n-1,n,v)| f(v), \tag{39}$$

где

$$f(v) = \binom{v}{\lfloor v/2 \rfloor} 2^{-v}. \tag{40}$$

Оценим сверху правую часть из (39). Так как в интервале $[1,n]$ функция $f(v)$ не возрастает и $\gamma_{n-1} < 2n/3$ при больших n (например, при $n \geqslant 13$), то из леммы 3 следует, что при любом натуральном v_0, $0 \leqslant v_0 \leqslant \lfloor 2n/3 \rfloor$, справедливо неравенство

$$\sum_{v=0}^{v_0} |\mathfrak{N}(n-1,n,v)| \leqslant n\gamma_{n-1} 2^{n(n-1)}/v_0. \tag{41}$$

Поскольку мы не знаем истинного значения величины $|\mathfrak{N}(n-1,n,v)|$, при получении верхней оценки для правой части из (39) используем функцию $\varphi(v)$ такую, что $\varphi(0) = |\mathfrak{N}(n-1,n,0)|$, $\varphi(2) = n\gamma_{n-1}2^{n(n-1)}/(n-2) - \varphi_0$, а при каждом v_0, $3 \leqslant v_0 \leqslant 2n/3$, справедливо неравенство

$$\sum_{v=0}^{v_0} \varphi(v) = n\gamma_{n-1} 2^{n(n-1)}/(n-v_0),$$

т. е.

$$\varphi(v_0)=\sum_{v=0}^{v_0}\varphi(v)-\sum_{v=0}^{v_0-1}\varphi(v)=n\gamma_{n-1}2^{n(n-1)}\left(\frac{1}{n-v_0}-\frac{1}{n-v_0+1}\right)$$
$$=n\gamma_{n-1}2^{n(n-1)}/((n-v_0)(n-v_0+1)).$$

Пользуясь невозрастанием функции $f(v)$, нетрудно понять, что

$$\sum_{v=2}^{\lfloor 2n/3\rfloor}|\mathfrak{N}(n-1,n,v)|f(v)\leqslant\sum_{v=2}^{\lfloor 2n/3\rfloor}\varphi(v)f(v)$$
$$=(1/2)\varphi(2)+n\gamma_{n-1}2^{n(n-1)}\sum_{v=3}^{\lfloor 2n/3\rfloor}\binom{v}{\lfloor v/2\rfloor}\Big/(2^v(n-v)^2). \quad (42)$$

Из (39) и (42) следует, что

$$|\mathfrak{M}'(n,0)|<\varphi(0)2^n+\varphi(2)2^{n-1}+n\gamma_{n-1}2^{n^2}\sum_{v=3}^{\lfloor 2n/3\rfloor}\frac{1}{\sqrt{v}(n-v)^2}. \quad (43)$$

Так как в интервале $[1,n]$ функция $\Psi(v)=1/(\sqrt{v}(n-v)^2)$ выпукла, то при больших n имеем

$$\sum_{v=3}^{\lfloor 2n/3\rfloor}\frac{1}{\sqrt{n}(n-v)^2}<\int_0^{2n/3}\frac{dx}{\sqrt{x}(n-x)^2}$$
$$=(\text{полагаем } \sqrt{x}=y)=2\int_0^{\sqrt{2n/3}}\frac{dy}{(n-y^2)^2}$$
$$=\frac{1}{2n\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{2n/3}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+y}+\frac{1}{\sqrt{n}-y}+\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+y)^2}+\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n}-y)^2}\right)dy$$
$$=\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\ln\frac{\sqrt{n}+y}{\sqrt{n}-y}-\frac{1}{2n(\sqrt{n}+y)}+\frac{1}{2n(\sqrt{n}-y)}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2n/3}}<\frac{4,5}{n\sqrt{n}}. \quad (44)$$

Подставляя (44) в (43), получаем

$$|\mathfrak{M}'(n,0)|<\varphi(0)2^n+\varphi(2)2^{n-1}+\frac{4,5}{\sqrt{n}}\gamma_{n-1}2^{n^2}$$
$$=\varphi(0)2^n+\frac{n\gamma_{n-1}}{2(n-2)}2^{n^2}+\frac{4,5}{\sqrt{n}}\gamma_{n-1}2^{n^2}. \quad (45)$$

Если предположить, что при некотором достаточно большом $n-1$ справедливо неравенство $\gamma_{n-1} < 2,3/\sqrt{n-1}$, то из (45) и леммы 7 следует неравенство

$$|\mathfrak{M}'(n,0)| < \frac{1,3}{\sqrt{n}}2^{n^2} = \frac{1,3}{\sqrt{n}}|\mathfrak{M}(n)|,$$

т. е. справедливость индукционного шага.

Безусловно, для полного доказательства теоремы 5 нужно убедиться в ее справедливости при начальных значениях n. Приведенные рассуждения не позволяют этого сделать. Для таких n справедливость теоремы 5 проверяется с привлечением вспомогательных рассуждений. Поскольку их детальное описание является кропотливым и длинным, мы не имеем возможности подробно осветить это. Отметим лишь следующие факты.

Во-первых, величина γ_n при $n \leqslant 8$ оценена сверху непосредственным подсчетом. В частности, $\gamma_8 < 1/9$, что сильно отличается от верхней оценки для γ_n из теоремы 5. Этим можно воспользоваться для понижения верхней оценки для γ_n при очередных n.

Во-вторых, при небольших n целесообразно варьировать множество типичных классов матриц из $\mathfrak{M}(n)$, что позволяет понизить правую часть из (44) и улучшить оценку из леммы 7.

В-третьих, когда величина $2,3/\sqrt{n}$ близка к $2n/3$, можно использовать лучшую верхнюю оценку для числа типичных матриц из $\mathfrak{M}(n)$ по сравнению с оценкой из следствия 3.

Замечание. Грубость верхней оценки для $|\mathfrak{M}(n,k)|$ из теоремы 5 в основном связана с грубостью аналогичной оценки из теоремы 6. Действительно, при различных per M_i, $1 \leqslant i \leqslant v$, число решений уравнения (31) существенно отличается от $\binom{v}{\lfloor v/2 \rfloor}$. Однако при доказательстве теоремы 6 мы не смогли этим воспользоваться. По-видимому, для величины $|\mathfrak{M}(n,k)|$ справедливо неравенство $|\mathfrak{M}(n,k)| < c2^{-n/2}|\mathfrak{M}(n)|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Минк Х.** Перманенты. М: Мир, 1982.
2. **Borovskich Yu. V., Korolyuk V. S.** Random permanents. Utrecht: VSP, 1994.
3. **Тараканов В. Е.** Комбинаторные задачи и $(0,1)$-матрицы. М.: Наука, 1985.
4. **Wang E. T.-H.** On permanents of $(1,-1)$-matrices // Israel J. Math. 1974. V. 18, N 14. P. 353–361.

5. **Perfect H.** Positive diagonals of ±-matrices // Monatsh. Math. 1973. Bd 77, N 3. P. 225–240.
6. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т. М.: Мир, 1967. Т. 1.
7. **Sperner S.** Ein Satz uber Unfermengen einer endlichen Menge // Math. Z. 1928. Bd 27. S. 544–548.
8. **Мешалкин Л. Д.** Обобщение теоремы Шпернера о числе подмножеств конечного множества // Теория вероятностей и ее применения. 1963. Т. 8, вып. 2. С. 219–220.

Адрес автора:

Россия,
630090 Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН

Статья поступила
27 ноября 1995 г.