ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 1996. Том 3, № 1, 57–74

УДК 519.854

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ OPEN SHOP*)

С. В. Севастьянов, И. Д. Черных

Рассматривается задача построения расписания минимальной длины выполнения n работ на m машинах, известная как задача open shop [1]. Поскольку уже при $m \geqslant 3$ она является NP-трудной [1], имеет смысл как поиск алгоритмов приближенного решения этой задачи, так и поиск ее полиномиально разрешимых подклассов. В данной статье продолжается начатое в [2] рассмотрение подклассов задач с так называемым условием доминирования, когда нагрузка одной машины, называемой машиной-доминантой, превышает нагрузки остальных машин на величину Δ, ограниченную снизу некоторой функцией от входных данных. Доказано, что при $\Delta \geqslant mp_{\max}$ оптимальное расписание имеет длину $C^*_{\max} = l_{\max}$, где $l_{\max}$ — максимальная нагрузка машины и $p_{\max}$ — максимальная длительность операции. Приводится алгоритм с временно́й сложностью $O(nm^2)$ для нахождения такого расписания. Это же свойство оптимального расписания доказано в случае $m \leqslant 4$ при более слабом условии на величину доминирования: $\Delta \geqslant (m-1)p_{\max}$. При дальнейшем ослаблении условия доминирования (т. е. при $\Delta < (m-1)p_{\max}$) свойство $C^*_{\max} = l_{\max}$ может не выполняться.

Введение

Рассматривается следующая задача теории расписаний, которая известна как задача open shop. Пусть имеется m машин $M_1, \ldots, M_m$ и n работ $J_1, \ldots, J_n$. Работа J_r, $1 \leqslant r \leqslant n$, состоит из m операций O_{ri}, $1 \leqslant i \leqslant m$. Операция O_{ri} выполняется на машине M_i за время p_{ri}. Порядок выполнения операций каждой работы не фиксирован, операции разных работ могут выполняться в произвольном порядке. Прерывать операции нельзя. При этом должны выполнятся следующие условия:

(*) в каждый момент времени любая машина выполняет не более одной операции;

*) Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–01–00489) и Международного научного фонда (грант NQC000).

(**) каждая работа может выполняться одновременно не более чем на одной машине.

Под *расписанием* S понимается множество $\{s_{ri}\}$ моментов начала выполнения операций O_{ri}, $1 \leqslant r \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant m$. (Будем говорить также, что операция O_{ri} *назначена* в момент s_{ri}.) Расписание, удовлетворяющее перечисленным условиям, называется *допустимым*. Поскольку все операции выполняются без прерываний, операция O_{ri} завершается в момент $c_{ri} = s_{ri} + p_{ri}$. Под *длиной* расписания S понимается величина $C_{\max}(S) \doteq \max_{r,i} c_{ri}$.

Задача заключается в нахождении оптимального расписания, т. е. допустимого расписания с минимально возможной длиной.

В [1] предложен алгоритм полиномиальной сложности для решения задачи open shop с двумя машинами и показано, что при $m \geqslant 3$ эта задача является NP-трудной. Поэтому представляет интерес как поиск алгоритмов приближенного решения этой задачи, так и поиск полиномиально разрешимых подклассов. В настоящей работе мы расширяем полиномиально разрешимый подкласс задачи open shop с так называемым условием доминирования. Введем следующие обозначения. Пусть

$$p_{\max} = \max_{r,i} p_{ri}, \quad l_i = \sum_{r=1}^{n} p_{ri}, \quad l_{\max} = \max_i l_i.$$

Величину l_i будем называть *нагрузкой* машины M_i. В настоящей статье мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда имеется только одна машина с максимальной нагрузкой. Без ограничения общности будем полагать, что такой машиной является M_1. Машину M_1 будем называть *машиной-доминантой*. В этом случае $l_1 = l_{\max}$. Величину $\Delta = l_{\max} - \max_{i>1} l_i$ будем называть *величиной доминирования*.

В [3] было установлено, что при выполнении условий вида

$$l_{\max} \geqslant \varphi(m) p_{\max} \tag{1}$$

для некоторой функции $\varphi(m)$ от числа машин длина оптимального расписания $l^*_{\max}$ в задаче open shop равна $l_{\max}$, т. е.

$$\mathrm{C}^*_{\max} = l_{\max}. \tag{2}$$

Это свойство рассматриваемой задачи мы называем свойством *существования беспростойного оптимального расписания*, или СБОР-свойством. Ясно, что при выполнении СБОР-свойства машина-доминанта в оптимальном расписании работает без простоев. Дальнейшие ослабления условий (1) для выполнения (2) были получены в [4–7]. Важно отметить, что во всех указанных случаях установление СБОР-свойства сопровождается описанием алгоритма полиномиальной сложности для нахождения оптимального расписания. Таким образом, условия вида

(1) описывают полиномиально разрешимый подкласс задачи open shop при определенных значениях функции $\varphi(m)$.

В [2] установлено, что СБОР-свойство также имеет место при выполнении условий вида

$$\Delta \geqslant \Delta(m)p_{\max} \tag{3}$$

(которое мы и называем *условием доминирования*) в следующих случаях:

а) $\Delta(m) = 2m - 4$ при $m \geqslant 3$,

б) $\Delta(m) = m - 1$ при $m \leqslant 3$,

в) $\Delta(m) = m - 1$ при $l_{\max} \geqslant (5.45m - 7)p_{\max}$.

При этом в каждом случае для нахождения оптимального расписания, удовлетворяющего (2), предлагается алгоритм полиномиальной сложности. Ясно, что чем меньше функция $\Delta(m)$ в условии (3), тем более широкий полиномиально разрешимый подкласс задачи open shop описывает условие (3).

Через $\Delta^*(m)$ обозначим наименьшую функцию $\Delta(m)$ такую, что из (3) следует (2). Тогда из результатов работы [2] вытекают оценки

$$\Delta^*(m) \leqslant 2m - 4 \text{ при } m \geqslant 3, \tag{4}$$

$$\Delta^*(m) \geqslant m - 1 \text{ при } m \geqslant 2. \tag{5}$$

В [2] также высказана гипотеза о том, что

$$\Delta^*(m) = m - 1, \tag{6}$$

и дано ее подтверждение при $m = 2$ и $m = 3$.

В настоящей работе мы устанавливаем более точную по сравнению с (4) верхнюю оценку для функции $\Delta^*(m)$:

$$\Delta^*(m) \leqslant m \text{ при } m \geqslant 2$$

и получаем точное значение $\Delta^*(4) = 3$, подтверждающее гипотезу (6) при $m = 4$. При получении этих результатов используются алгоритмы полиномиальной сложности, находящие оптимальные расписания в задаче open shop при выполнении условий $\Delta \geqslant mp_{\max}$ при $m \geqslant 2$ и $\Delta \geqslant 3p_{\max}$ при $m = 4$.

1. Достаточное условие эффективной разрешимости задачи open shop с произвольным числом машин

В этом разделе мы рассмотрим алгоритм построения допустимого расписания в задаче open shop с n работами и m машинами и докажем оптимальность полученного алгоритмом расписания при условии выполнения неравенства

$$\Delta \geqslant mp_{\max}. \tag{7}$$

Опишем общую схему алгоритма. Операции машины M_1 выполняются без простоев в фиксированном порядке $O_{11}, \ldots, O_{n1}$. Вводится понятие *границы определенности* частичного расписания машины M_i, т. е. такого неотрицательного числа τ_i, возрастающего в ходе работы алгоритма, которое показывает, что в интервале $[0, \tau_i]$ расписание машины M_i полностью определено. (Это означает, что в любой момент работы алгоритма возможны лишь назначения операций O_{ri} в моменты $s_{ri} \geqslant \tau_i$.) Определяется также общая граница определенности $\tau = \min \tau_i$, где минимум берется только по работающим машинам. Каждая операция O_{ri}, $1 \leqslant r \leqslant n$, $2 \leqslant i \leqslant m$, в ходе работы алгоритма может принимать одно из четырех состояний: *выполненная, выполняемая, разрешенная* (для выполнения), *запрещенная*, определяемых относительно текущего значения τ:

Если момент s_{ri} уже определен, то

• при $s_{ri} + p_{ri} < \tau$ операция всегда является выполненной;

• при $s_{ri} + p_{ri} = \tau$ она может быть выполненной или выполняемой (если не зафиксировано, что она выполнена);

• при $s_{ri} + p_{ri} > \tau$ операция выполняемая.

Если момент s_{ri} еще не определен, то

• операция O_{ri} является запрещенной, если установлено, что другая операция этой же работы выполняется в момент τ на другой машине, либо назначение $s_{ri} := \tau$ приведет к перекрытию операции O_{ri} с операцией O_{r1};

• в противном случае операция является разрешенной.

После фиксирования расписания машины M_1 расписание для остальных машин составляется по следующему принципу: как только машина M_i освобождается, на нее назначается очередная разрешенная операция, если такая найдется. Если буквально реализовать этот принцип, перебирая по очереди еще не выполненные операции машины M_i, то получится алгоритм с временно́й сложностью $O(n^2 m)$. Мы предлагаем следующий алгоритм с временно́й сложностью $O(nm^2)$. (При выполнении условия (7) имеем $n \geqslant m$, что обеспечивает $O(nm^2) \leqslant O(n^2 m)$.)

Алгоритм A

Шаг 1. На машине M_1 выполняются все операции без простоев в порядке $O_{11}, \ldots, O_{n1}$:

$$s_{11} := 0; \quad c_{11} := p_{11};$$

$$s_{r1} := c_{r-1,1}; \quad c_{r1} := s_{r1} + p_{r1}, \text{ при } r = 2, \ldots, n.$$

Шаг 2. Создаются вспомогательная матрица $Q = (q_{ri})$, $1 \leqslant r \leqslant n$, $2 \leqslant i \leqslant m$, состояний операций, матрица $M = (j_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, состояний машин и матрица $J = (m_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, состояний работ. Вначале для всех r, i, j полагаем

$$q_{ri} := 0, \quad m_j := 0, \quad j_i := n + i.$$

Элементы этих матриц интерпретируются следующим образом:

$q_{ri} = -2$ означает, что операция O_{ri} выполнена;

$q_{ri} = -1$ означает, что операция O_{ri} выполняется;

$q_{ri} = 0$ означает, что операция O_{ri} разрешена;

$q_{ri} = k > 0$ означает, что операция O_{ri} запрещена по причине ее перекрытия с уже назначенной операцией O_{rk};

$j_i = 0$ означает, что машина M_i свободна;

$j_i = k > 0$ означает номер работы, выполняемой на машине M_i (полагаем, что вначале каждая машина M_i не является свободной, но выполняет некоторую фиктивную работу $n + i$);

$m_j = 0$ означает, что ни одна операция работы J_j не является выполняемой;

$m_j = k > 0$ означает номер машины, на которой выполняется операция O_{jk} работы J_j.

Кроме того, для каждой машины M_i, $2 \leqslant i \leqslant m$, формируется упорядоченный список работ S_i, операции которых на машине M_i являются разрешенными. Вначале полагается

$$S_i := (1, 2, \dots, n), \quad 2 \leqslant i \leqslant m; \quad \tau_i := 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Шаги 3–8 выполняются в цикле до полной остановки алгоритма.

Шаг 3. Находятся $\tau := \min \tau_i$ по всем работающим машинам (т. е. имеющим $j_i > 0$) и машина M_i с минимальным номером $i = i^*$, на которой достигается этот минимум. Если $j^* \doteq j_{i^*} \leqslant n$, то переход к шагу 4, иначе — к шагу 5.

Шаг 4. Полагается

$$q_{j^*i^*} := -2; \quad m_{j^*} := 0; \quad j_{i^*} := 0.$$

Просматривается строка j^* матрицы Q и каждое значение $q_{j^*i} = i^*$ заменяется на $q_{j^*i} := 0$, а операция O_{j^*i} одновременно добавляется в список $S_i : S_i := S_i \cup \{j^*\}$.

Если при этом найдется такое i, что $q_{j^*i} = 0$ и $j_i = 0$ (т. е. машина M_i свободна, а список S_i уже не пуст), то для наименьшего такого i полагается

$$q_{j^*i} := -1; \; j_i := j^*; \; m_{j^*} := i; \; s_{j^*i} := \tau; \; \tau_i := \tau + p_{j^*i}; \; S_i := S_i \setminus \{j^*\}.$$

Шаг 5. Если $M_{i^*} = M_1$, то переход к шагу 6, иначе — к шагу 7.

Шаг 6. Если $j^* \neq n$, то

$$\text{begin } j_1 := \begin{cases} 1 \text{ при } j^* > n; \\ j^* + 1 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$m_{j_1} := 1; \tau_1 := \tau + p_{j_1 1};$$

end,

иначе $j_1 := 0$.

Переход к шагу 8.

Шаг 7. (Назначение очередной операции на машину M_{i^*}.) Повторяем в цикле:

если список S_{i^*} пуст, то $\{j_{i^*} := 0$; переход на шаг 8$\}$, иначе берется первый элемент t из списка S_{i^*} (соответствующий операции O_{ti^*}) и проверяются следующие два условия:

если $\tau \leqslant s_{t1} < \tau + p_{ti^*}$ (т. е. назначение операции O_{ti^*} в момент τ приведет к ее пересечению с операцией O_{t1}) или $m_t > 0$ (т. е. работа J_t выполняется на машине M_{m_t}), то элементу q_{ti^*} присваивается значение 1 — в первом случае и значение m_t — во втором; в обоих случаях операция O_{ti^*} становится запрещенной и удаляется из списка S_{i^*}: $S_{i^*} := S_{i^*} \setminus \{t\}$.

Если же ни одно из двух условий не выполняется, то на машину M_{i^*} назначается операция O_{ti^*}:

$$q_{ti^*} := -1;\ j_{i^*} := t;\ m_t := i^*;\ s_{ti^*} := \tau;\ \tau_{i^*} := \tau + p_{ti^*};\ S_{i^*} := S_{i^*} \setminus \{t\},$$

и переход на шаг 8.

Шаг 8. Если $j_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, то алгоритм завершает работу, иначе переходит на шаг 3.

$S = \{s_{ri}\}$ — выход алгоритма A.

Конец.

Теорема 1. *Для задачи open shop с n работами, m машинами и величиной доминирования $\Delta \geqslant m p_{\max}$ алгоритм A с трудоемкостью $O(nm^2)$ находит оптимальное расписание длины $l_{\max}$.*

Доказательство. Несложно убедиться, что алгоритм А строит допустимое расписание задачи open shop. Оценим трудоемкость алгоритма.

Шаг 1 выполняется за $O(n)$ операций, шаг 2 — за $O(nm)$. Шаги 3–8 выполняются в цикле не более $nm+m$ раз, поскольку при каждой итерации цикла (кроме первых m) некоторая операция переходит в состояние «выполненная» ($q_{ri} := -2$). Поскольку трудоемкость каждого шага 3–6 и 8 не превосходит $O(m)$, их совокупная трудоемкость не превосходит $O(nm^2)$. Оценим общую трудоемкость шага 7.

Внутри каждой итерации цикла по шагам 3–8 совершается несколько «внутренних» итераций цикла шага 7, каждая внутренняя итерация приводит либо к назначению некоторой операции O_{ti^*} на машину M_{i^*}, либо к переводу O_{ti^*} в состояние «запрещенная» (и исключению из списка S_{i^*}) по причине наложения O_{ti^*} на другую, ранее назначенную операцию O_{tk} работы J_t. Обратный переход операции O_{ti^*} в состояние «разрешенная» возможен только после завершения операции O_{tk}. Таким образом, процедура исключения каждой операции O_{ti} из списка S_i применяется в течение работы всего алгоритма не более $(m-1)$ раз и один раз совершается ее назначение. Отсюда общая трудоемкость шага 7

в течение выполнения алгоритма составляет $O(nm^2)$. Этой же величиной оценивается общая временна́я сложность алгоритма A. Теперь достаточно доказать, что длина получаемого расписания равна $l_{\max}$.

Пусть S — допустимое расписание, полученное алгоритмом A. Поскольку при этом расписании машина M_1 заканчивает работу в момент $C_1 = l_1 = l_{\max}$, остается доказать, что моменты C_i завершения работы машин M_i, $2 \leqslant i \leqslant m$, также не превосходят $l_{\max}$. Рассмотрим машину M_i $(2 \leqslant i \leqslant m)$ и последнюю операцию O_{ri} на этой машине в расписании S. В каждый момент τ простоя машины M_i операция O_{ri} была «запрещенной». Следовательно, либо τ содержался в интервале выполнения какой-то операции O_{rt} работы J_r на другой машине, либо выполнялось условие $\tau \leqslant s_{r1} < \tau + p_{ri}$. Совокупная длина временны́х интервалов, покрывающих все такие моменты τ, меньше величины $\sum\limits_{v=1}^{m} p_{rv} \leqslant mp_{\max}$. Таким образом, суммарная длительность простоев машины M_i не превосходит $mp_{\max}$. Поэтому $C_i \leqslant l_i + mp_{\max} \leqslant l_1 = l_{\max}$. Теорема 1 доказана.

2. Точное значение функции $\Delta^*(m)$ при $m = 4$

Утверждение 1. *При любом m справедливо неравенство*

$$\Delta^*(m) \geqslant m - 1.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно для любого $\varepsilon > 0$ указать пример таких начальных условий задачи open shop, что при $\Delta \geqslant (m - 1 - \varepsilon)p_{\max}$ расписания длины $l_{\max}$ не существует. Приведем такие условия. Пусть в задаче open shop с m машинами длительность операций работы J_1 на каждой машине $M_1, \ldots, M_m$ равна $p_{\max}$, длительность операций каждой работы $J_2, \ldots, J_n$ не превосходит $p_{\max}$ на машине M_1 и равна нулю на остальных машинах, а сумма длительностей операций $O_{11}, \ldots, O_{n1}$ равна $(m - \varepsilon)p_{\max}$. Тогда $\Delta = (m - 1 - \varepsilon)p_{\max}$ и $l_{\max} = l_1 = (m - \varepsilon)p_{\max}$. Но из условия (**) допустимости расписания следует, что длина любого расписания не может быть меньше $\sum\limits_{i=1}^{m} p_{1i} = mp_{\max} > l_{\max}$. Следовательно, при такой величине доминирования может не существовать расписания длины $l_{\max}$, как показывает приведенный пример. Поскольку это верно для любых $m \geqslant 2$ и $\varepsilon > 0$, утверждение 1 доказано.

Из теоремы 1 и утверждения 1 вытекает

Следствие. *При любом $m \geqslant 2$ справедливы неравенства*

$$m - 1 \leqslant \Delta^*(m) \leqslant m.$$

Теперь докажем точность приведенной выше нижней оценки функции $\Delta^*(m)$ при $m = 4$. Пусть $m = 4$ и

$$\Delta \geqslant (m - 1)K = 3K. \tag{8}$$

Будем рассматривать класс так называемых плотных расписаний.

Определение. Расписание называется *плотным*, если любая машина простаивает тогда и только тогда, когда нет работы, которая может выполняться на этой машине.

Утверждение 2. *Пусть S — плотное расписание, I — произвольный интервал простоя машины M_i в расписании S, O_{ri} — операция, выполненная на этой машине после интервала I. Тогда интервал I должен быть покрыт интервалами выполнения других операций работы J_r. (Действительно, в противном случае по определению плотного расписания выполнение операции O_{ri} должно было бы начаться раньше.)*

Из утверждения 2 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Утверждение 3. *Если в плотном расписании машина M_i простаивает в интервале I, то имеется не более $m-1$ операций, выполняемых на M_i после I.*

Утверждение 4. *Пусть O_{ri} — первая операция работы J_s в плотном расписании S. Тогда в интервале $[0, s_{ri}]$ нет простаивающих машин.*

Обозначим $l' = l_{\max} - (m-1)p_{\max}$. Без ограничения общности можем считать, что нагрузка каждой машины, кроме машины-доминанты, равна l'. В противном случае всегда можно произвести увеличение длительностей p_{ri} без изменения величин $n, m, p_{\max}$ и l'. Трудоемкость этой операции равна $O(nm)$. Далее всегда можно пронормировать p_{ri} так, что $p_{\max}$ станет равной 1. Поэтому будем считать, что $p_{\max} = 1$. Обозначим через $I(O_{ri})$ интервал выполнения операции O_{ri}. Если $\widetilde{S}$ — какое-нибудь частичное расписание на некоторой машине, то через $I(\widetilde{S})$ будем обозначать интервал выполнения $\widetilde{S}$, а через $C_{\widetilde{S}}(S)$ — момент завершения $\widetilde{S}$ в расписании S. Если I — произвольный интервал, то через $|I|$ будем обозначать его длительность. Если какой-то интервал содержит интервалы простоя машины M_i и, возможно, интервалы выполнения операций на этой машине, то этот временно́й интервал будем называть *областью* и обозначать буквой R с некоторыми индексами. При этом первый интервал простоя области будем обозначать буквой I с такими же индексами. Под длительностью области будем понимать только суммарную длительность интервалов простоя машины M_i, содержащихся в этой области. Если I_1 и I_2 — два произвольных интервала в расписании S таких, что I_1 завершается не позднее, чем начинается I_2, то будем писать $I_1 \prec I_2$.

Итак, рассматривается задача open shop с четырьмя машинами, выполнено $p_{\max} = 1$ и нагрузка машины M_1 превышает нагрузку каждой из остальных машин по крайней мере на 3, т. е. выполняется усло-

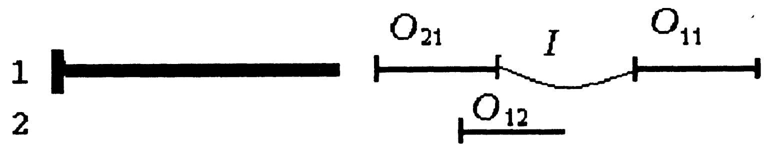

Рис. 1

вие (7). Докажем, что длина оптимального расписания равна $l_{\max}$, и приведем алгоритм построения такого расписания.

Рассмотрим произвольное плотное расписание S для задачи open shop с n работами и m машинами, которое можно построить с временно́й сложностью $O(nm^2)$ (алгоритм с такой оценкой имеется, например, в [2]). При фиксированном числе машин расписание S можно построить за $O(n)$ операций. Без ограничения общности считаем, что на машине-доминанте M_1 операции выполняются в порядке $O_{n1}, \ldots, O_{21}$, O_{11}. Из утверждения 3 следует, что простои машины M_1 могут быть только перед выполнением операций O_{31}, O_{21} и O_{11}.

Лемма 1. *В расписании S не существует простоя машины M_1 между операциями O_{21} и O_{11}.*

Доказательство. Пусть существует интервал простоя I непосредственно перед выполнением операции O_{11}. Тогда по утверждению 2 интервал I должен быть покрыт интервалами выполнения других операций работы J_1. Пусть O_{12} — первая из операций, покрывающих I (рис. 1).

Так как $c_{21} \geqslant l_{\max} - p_{11} \geqslant l_{\max} - 1 = l' + 2$, то $c_{12} > l' + 2$. Поскольку нагрузка машины M_2 равна l', суммарная длительность простоев машины M_2 до выполнения операции O_{12} больше 2. Но все эти простои должны быть покрыты интервалами выполнения операций O_{13} и O_{14}, что невозможно, так как суммарная длительность операций O_{13} и O_{14} не превышает 2. Противоречие доказывает утверждение леммы 1.

Замечание. Этот результат легко обобщается на случай с произвольным m.

Лемма 2. *В расписании S не существует простоя машины M_1 между операциями O_{31} и O_{21}.*

Доказательство. Предположим, что есть интервал простоя I машины M_1 непосредственно перед выполнением операции O_{21}. Он должен быть покрыт операциями работ J_1 и J_2. Операции работ, участвующие в покрытии последнего интервала I простоя машины M_1, будем называть *предкритическими.* Так как $c_{31} \geqslant l_{\max} - p_{11} - p_{21} \geqslant l_{\max} - 2 = l' + 1$, то суммарная длительность простоев машины, предшествующих ее предкритическим операциям, строго больше 1. Убедимся в том, что

среди предкритических операций есть единственная операция работы J_1 и единственная операция работы J_2. Пусть это не так, т. е. в покрытии интервала I участвуют, например, две операции работы J_1. Тогда на покрытие простоев перед предкритическими операциями остается только одна операция работы J_1, в то время как суммарная длительность этих простоев строго больше 1. Противоречие доказывает, что интервал I покрыт одной операцией работы J_1 и одной операцией работы J_2. Можем считать, что эти операции суть O_{12} и O_{23} (рис. 2).

Заметим, что интервалы простоев машин M_2 и M_3 до предкритических операций не могут пересекаться: если бы такое случилось, то пересечение этих интервалов было бы покрыто как операцией работы J_1, так и операцией работы J_2. Но поскольку для этого имеется единственная машина M_4, в силу условия (*) такого не может быть в плотном расписании. Так как машины M_2 и M_3 симметричны, то без ограничения общности можно считать, что среди машин M_2 и M_3 первой простаивает M_2. Обозначим через R'_α область, содержащую ту часть интервалов простоев машины M_2, которая включает в себя начало первого интервала простоя машины M_2 и покрывается одной операцией работы J_1. Тогда $|R'_\alpha| \leqslant 1$. Отсюда следует, что есть другие простои машины M_2, которые мы обозначим через R''_α. Поскольку R'_α содержит первый интервал простоя машин M_2 и M_3, все интервалы простоев машины M_3 расположены после R'_α. Эти интервалы простоев не могут быть покрыты одной операцией, так как общая длительность простоев машины M_3 до предкритической операции строго больше 1. Поэтому интервал выполнения операции O_{22} должен пересекаться с интервалами простоя машины M_3, и, следовательно, в расписании S операция O_{22} расположена правее R'_α. Таким образом, область R'_α должна быть покрыта как операцией работы J_1, так и операцией работы J_2. Так как R'_α не может быть покрыта операцией O_{23}, то она покрыта операциями O_{13} и O_{24} (рис. 3).

Совокупность простоев машины M_3 разобьем на области R'_β и R''_β, каждая из которых покрывается одной операцией работы J_2. Так как O_{24} является первой операцией работы J_2, то R'_β должна быть покрыта операцией O_{24}, а R''_β — операцией O_{22} (рис. 4).

Рассмотрим теперь R''_α — область, содержащую оставшиеся интервалы простоев машины M_2. Область R''_α не может предшествовать O_{22}, ибо в противном случае она должна быть покрыта операцией O_{24}, что невозможно. Таким образом, $R''_\beta \prec R''_\alpha$. Заметим, что непосредственно после области R'_α должна находиться некоторая операция O_{X2}, $X \neq 1, 2, 3$. Действительно, $X \neq 1$, поскольку интервалы R'_α и $I(O_{12})$ разделены интервалом R''_α; $X \neq 2$, поскольку некоторая часть операции O_{X2} перекрывается операцией O_{24}. Наконец, R'_α должна быть покрытой интервалом $I(O_{X1})$. Но это не может быть операцией O_{31}, так как иначе все интервалы простоя машины M_2 были бы покрыты одной операцией.

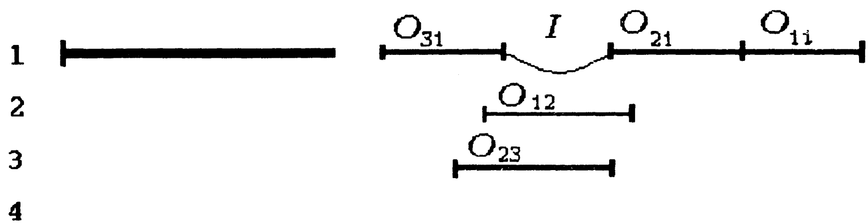

Рис 2

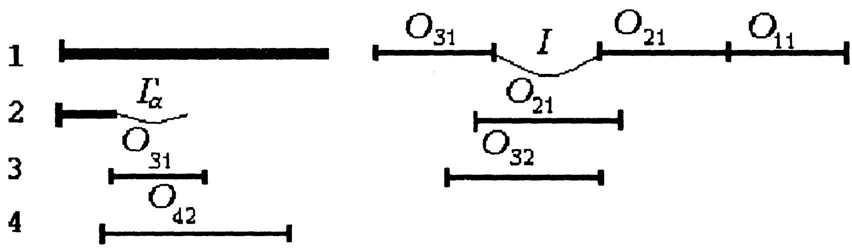

Рис. 3

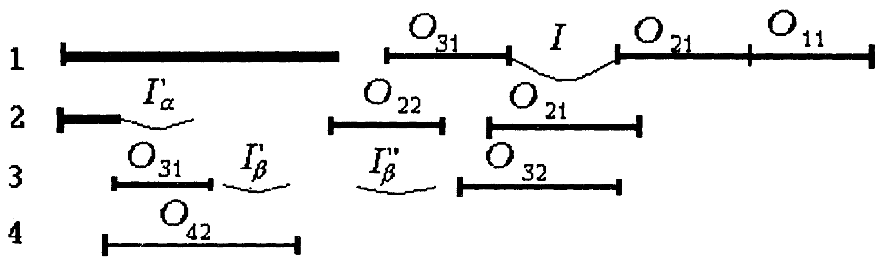

Рис. 4

Следовательно, $X \neq 3$.

По утверждению 3, после R'_α машина M_2 не может выполнять других операций, кроме O_{12}, O_{22} и O_{X2}. Кроме того, заметим, что область R''_α должна быть покрыта интервалом $I(O_{14})$ выполнения операции O_{14} (рис. 5).

Так как $c_{12} > l' + 1$, то имеем $c_{14} = s_{12} > l'$. Поэтому до выполнения операции O_{14} с необходимостью должна существовать непустая область R_γ, содержащая интервал простоя машины M_4. Очевидно, что этот простой должен быть покрыт операцией работы J_1. Но в расписании S операции O_{14} предшествует только одна операция работы J_1, а именно операция O_{13}. Так как O_{24} — первая операция работы J_2, то по утверждению 4 соотношение $R_\gamma \prec O_{24}$ невозможно. Если же $O_{24} \prec R_\gamma$, то R_γ не может быть покрыта операцией O_{13}, поскольку $c_{13} < c_{24}$. Противоречие доказывает лемму 2.

Таким образом, в плотном расписании интервал простоя I машины

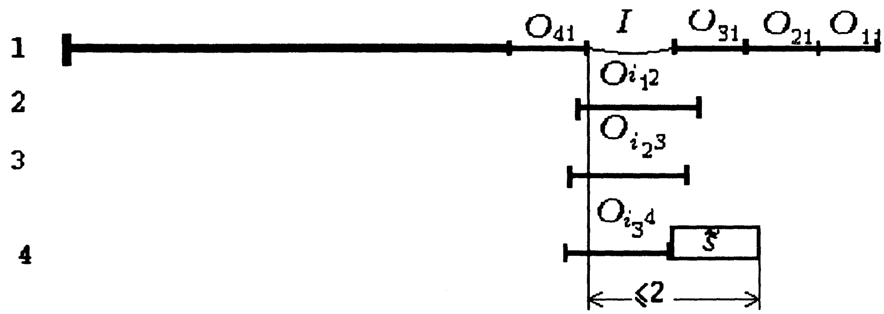

Рис. 5

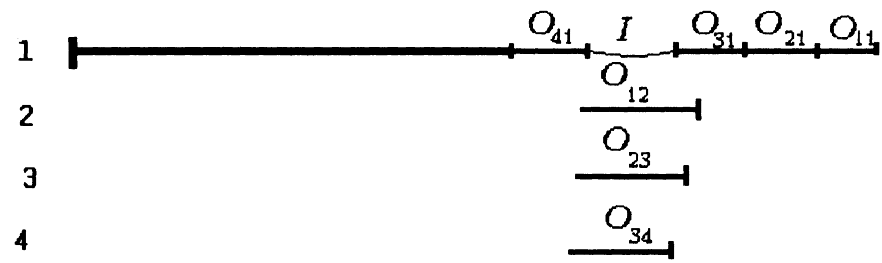

Рис. 6

M_1 может существовать только непосредственно перед выполнением операции O_{31}. Не ограничивая общности, можем считать, что в покрытии интервала I участвуют операции O_{12}, O_{23} и O_{34} и что $c_{i-1,i} \geqslant s_{31}$ для $i \in \{2,3,4\}$ (рис. 6).

Так как $c_{i-1,i} > c_{41} = l_{\max} - p_{11} - p_{21} - p_{31} \geqslant l'$ для всех $i \in \{2,3,4\}$, то на машинах M_2, M_3 и M_4 имеются простои перед выполнением предкритических операций. Справедлива следующая

Лемма 3. *Для каждой машины M_i, $i \in \{2,3,4\}$, все интервалы ее простоев, которые предшествуют моменту c_{41}, покрываются единственной операцией работы J_{i-1}.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть простои одной машины, скажем M_2, покрываются операциями O_{13} и O_{14} работы J_1. Заметим, что интервалы простоев машин до выполнения предкритических операций не могут пересекаться. (Доказательство этого факта аналогично приведенному в доказательстве леммы 2.) Без ограничения общности можем считать, что область R'_α простоев машины M_2, покрываемая операцией O_{13}, предшествует области R''_α, содержащей простои, которые покрываются операцией O_{14}, или, что то же самое, $O_{13} \prec O_{14}$ (рис. 7).

Так как R'_α не может быть покрыта операцией работы J_3, то $I(O_{32}) \prec R'_\alpha$. Аналогично $I(O_{22}) \prec R''_\alpha$. Далее, поскольку O_{13} — первая

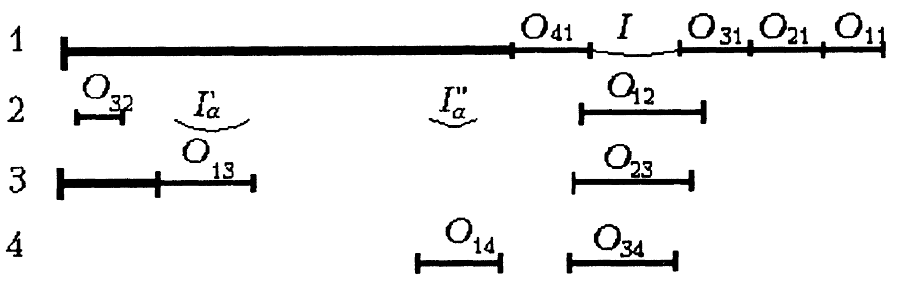

Рис. 7

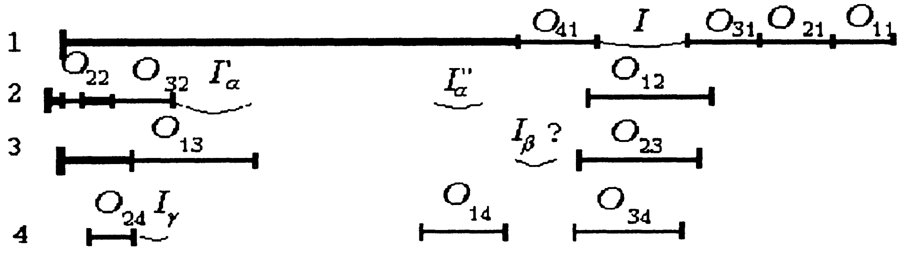

Рис. 8

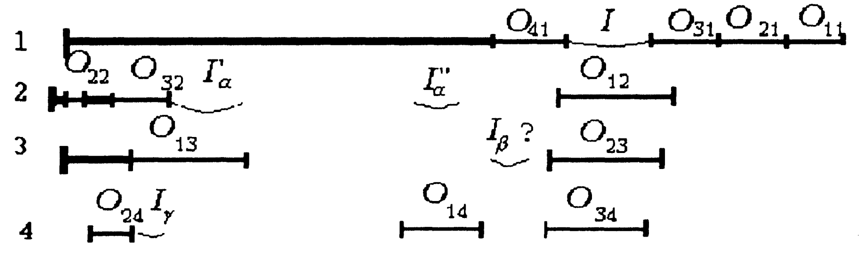

Рис. 9

операция работы J_1, по утверждению 4 перед началом ее выполнения нет простоев ни одной машины. Докажем, что простой I_γ машины M_4 не может предшествовать операции O_{14}. Предположим противное. Тогда I_γ должен быть покрыт как операцией работы J_3, так и операцией работы J_1. Следовательно, I_γ не может быть покрыт операцией работы J_2 и $I(O_{24}) \prec I_\gamma$. Значит, операция O_{24} не может покрывать интервал R'_α, откуда $I(O_{22}) \prec R'_\alpha$. Таким образом, простой I_β машины M_3 не может быть покрыт никакой операцией работы J_2 (рис. 8), что противоречит утверждению 2.

Таким образом, $O_{14} \prec I_\gamma$ и простой I_γ должен быть покрыт интервалом выполнения операции O_{33}. Простой I_β машины M_3 не может

быть покрыт операцией работы J_3 (кроме, возможно, O_{34}). Поэтому $I(O_{33}) \prec I_\beta$ (рис. 9). Интервал простоя I_β должен быть покрыт интервалом выполнения операции работы J_2. Эта операция отлична от O_{22}, поскольку $I(O_{22}) \prec R''_\alpha$ и $R''_\alpha \prec I_\beta$. Значит, такой операцией является O_{24}. Но в этом случае $I_\gamma \prec I(O_{24})$ и, следовательно, интервал простоя I_γ должен быть покрыт операцией O_{22}. Это невозможно, поскольку они находятся по разные стороны от R''_α (см. рис. 9). Полученное противоречие доказывает лемму 3.

Таким образом, на машинах M_2, M_3, M_4 выполнение предкритической операции в расписании S завершается к моменту $l' + 1$. Выясним, какой вид будет иметь расписание S. Без ограничения общности можно считать, что среди машин M_2, M_3, M_4 первой простаивает M_2. Интервал I_α такого простоя машины M_2 должен быть покрыт интервалом выполнения операции работы J_1. Без ограничения общности можно считать, что такой операцией является O_{13}. Тогда по лемме 3 все простои машины M_2 покрываются операцией O_{13}. Так как I_α не может быть покрыт операцией работы J_3, то $I(O_{32}) \prec I_\alpha$ (рис. 10).

Рассмотрим интервал I_γ простоя машины M_4. Он должен быть покрыт некоторой операцией работы J_3. Эта операция отлична от O_{32}, поскольку $I(O_{32}) \prec I_\alpha \prec I_\gamma$. Таким образом, I_γ покрыт операцией O_{33}. Рассмотрим теперь интервал I_β простоев машины M_3. Он не может быть покрыт операцией работы J_3 в случае $I_\beta \prec I(O_{33})$. Следовательно, $I(O_{33}) \prec I_\beta$ (рис. 11).

Интервал I_β должен быть покрыт некоторой операцией работы J_2. Эта операция отлична от O_{24}, так как иначе I_γ должен быть покрыт операцией O_{22}. Но тогда интервал I_α не покрывается никакой операцией работы J_2 (рис. 12).

Таким образом, I_β покрыт операцией O_{22} и, следовательно, I_α покрыт операцией O_{24}. Поскольку I_γ не может быть покрыт операцией работы J_1, имеем $I(O_{14}) \prec I_\gamma$. Итак, все операции работ J_1, J_2 и J_3, за исключением операций O_{31}, O_{21}, O_{11}, предшествуют предкритическим операциям и их выполнение завершается до момента $t = s_{31}$ (рис. 13).

Обозначим через $C_i(S)$ момент окончания работы машины M_i в расписании S.

Лемма 4. *Имеется по крайней мере одна машина M_i, $i \in \{2,3,4\}$, такая, что $C_i(S) \leqslant l' + 2$.*

Доказательство. Предположим, что это не так, т. е. для каждого $i \in \{2,3,4\}$

$$C_i(S) > l' + 2. \tag{9}$$

Тогда суммарная длительность интервалов простоев машины M_2 строго больше 2. По лемме 3 до момента t длительность простоев машины M_1 не превышает 1. Отсюда следует, что операция O_{12} выполняется не

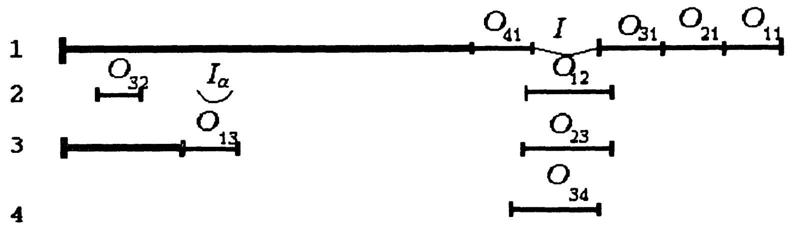

Рис. 10

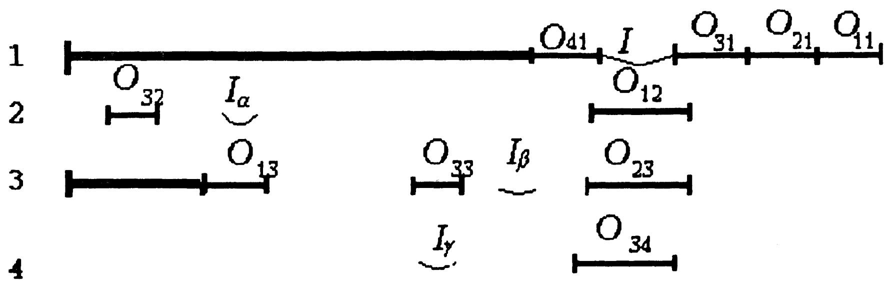

Рис. 11

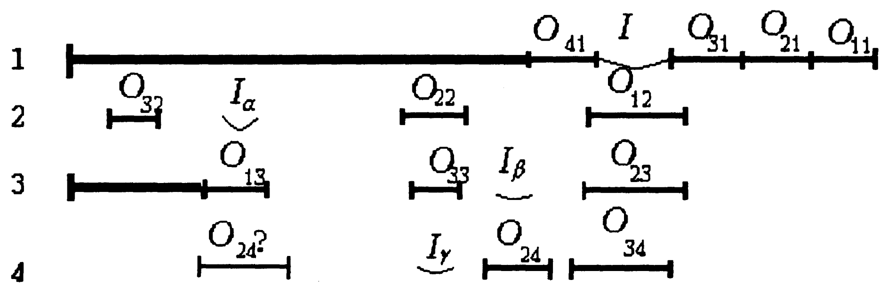

Рис. 12

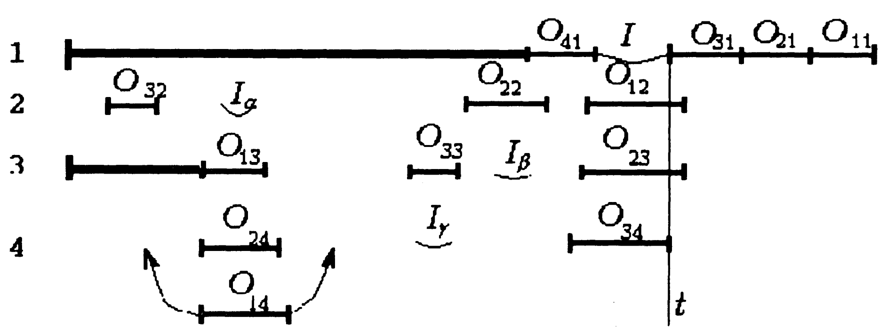

Рис. 13

последней на машине M_2. Пусть O_{X2} — последняя операция машины M_2, тогда $X \notin \{1,2,3\}$.

Так как операции O_{22}, O_{12} и O_{X2} выполняются на M_2 после простоя I_α, то из утверждения 3 следует, что между операциями O_{12} и O_{X2} на M_2 не выполняются другие операции. По предположению (9) длительность простоя машины M_2 между $I(O_{12})$ и $I(O_{X2})$ больше 1. Поэтому по утверждению 2 этот простой должен покрываться не менее чем двумя операциями работы J_x, выполняемыми после момента t. Так как $X \notin \{1,2,3\}$, то эти операции выполняются на машинах M_3 и M_4. Без ограничения общности можем считать, что $I(O_{X4}) \prec I(O_{X3})$.

Рассмотрим более детально часть расписания S после момента t. Так как простои машины M_3 между операциями O_{23} и O_{X3} покрываются единственной операцией O_{X4}, их длительность не превосходит 1. Отсюда по предположению следует, что есть простои машины M_3 и на ней выполняется хотя бы одна операция после O_{X3}. Пусть $I(O_{X3}) \prec I(O_{Y3})$, причем между операциями O_{X3} и O_{Y3} есть интервал простоя (рис. 14).

Этот интервал должен покрываться операцией работы J_Y. Такой операцией может быть только O_{Y4}. Между операциями O_{34} и O_{Y4} не может быть простоев машины M_4 (в расписании S не существует операций работы J_Y, которые могли бы покрывать интервалы этих простоев). Следовательно, по предположению (9) имеются простои машины M_4 (а значит, еще хотя бы одна операция) после операций O_{X4}, O_{Y4}. Таким образом, после интервала I_γ простоя машины M_4 выполняется по крайней мере четыре операции, что невозможно по утверждению 3. Противоречие доказывает лемму 4.

Без ограничения общности будем предполагать, что M_4 — искомая машина из леммы 4 (т. е. $C_4(S) \leqslant l' + 2$) и на машинах M_2, M_3, M_4 выполняются предкритические операции работ J_{i_1}, J_{i_2}, J_{i_3} соответственно. Через $\widetilde{S}$ обозначим завершающую часть расписания S на машине M_4 после операции O_{i_34} (рис. 15).

Перестроим расписание S в расписание S' (рис. 16). Операции O_{11}, O_{21}, O_{31} выполним без простоев в порядке O_{i_31}, O_{i_21}, O_{i_11}, начиная с момента c_{41}. Переставим операцию O_{i_34}, поставив ее в расписании S' после $\widetilde{S}$ так, чтобы она заканчивалась в момент $l_{\max}$. Расписание $\widetilde{S}$ сдвинем до момента c_{41} (хотя последнее необязательно). Ясно, что $C_{\max}(S') = l_{\max}$.

Осталось доказать, что расписание S' является допустимым. Поскольку из леммы 3 следует, что $c_{i_12} \leqslant l' + 1$, $c_{i_23} \leqslant l' + 1$, в то время как $s_{i_11}(S') \geqslant l_{\max} - 1 = l' + 2$, $s_{i_21}(S') \geqslant l_{\max} - 2 = l' + 1$, то операции работ J_{i_1} и J_{i_2} в расписании S' не перекрываются.

Поскольку $c_{41} < c_{i_12} \leqslant l' + 1$ влечет $c_{i_31}(S') = c_{41} + p_{i_31} < l' + 2$, в то время как $s_{i_34}(S') \geqslant l_{\max} - 1 = l' + 2$, то операции работы J_{i_3} в расписании S' не перекрываются.

Наконец, так как $C_{\widetilde{S}}(S') \leqslant l' + 2 \leqslant s_{i_34}(S')$, то операции из $\widetilde{S}$ не пере-

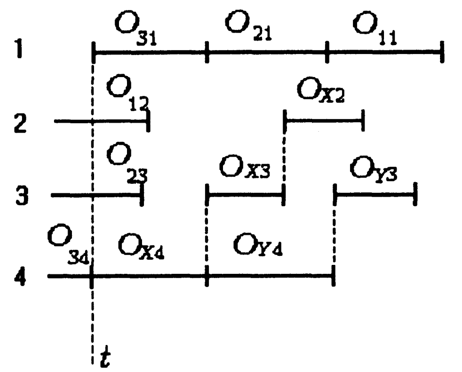

Рис. 14

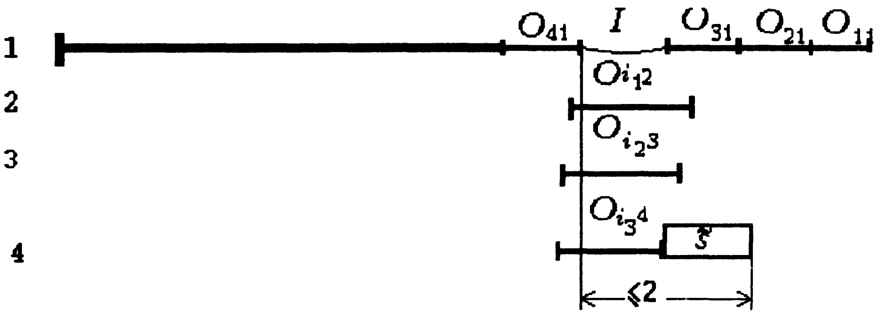

Рис. 15

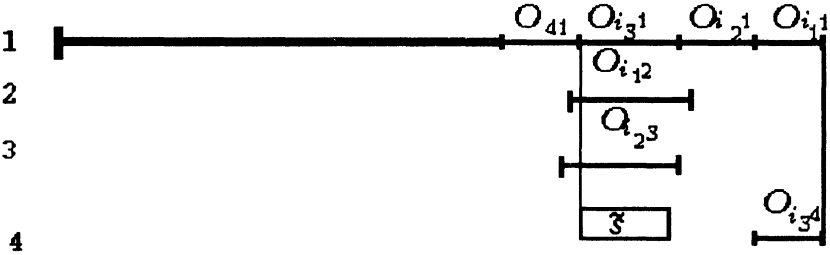

Рис. 16

крываются с операцией $O_{i_3 4}$ в расписании S', что завершает доказательство допустимости расписания S'. Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *При выполнении условия* (7) *длина оптимального расписания для задачи open shop с четырьмя машинами равна* $l_{\max}$. *Для нахождения такого расписания достаточно использовать* $O(n)$ *операций.*

Следствие. $\Delta^*(4) = 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Gonzalez T., Sahni S.** Open shop scheduling to minimize finish time // J. Assoc. Comput. Mach. 1976. V. 23, N 4. P. 665–679.
2. **Севастьянов С. В.** Эффективное построение расписаний в системах открытого типа // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 1, С. 20–42.
3. **Fiala T.** An algorithm for the open shop problem // Math. Oper. Res. 1983. V. 8, N 1. P. 100–109.
4. **Bárány I., Fiala T.** Nearly optimum solution of multimachine scheduling problem // Szigma — Mat.-Kžgaz daságі. Folyóirat. 1982. V. 15, N 3. P. 177–191.
5. **Севастьянов С. В.** Полиномиально разрешимый случай задачи open shop с произвольным числом машин // Кибернетика и системный анализ. 1992. № 6. С. 135–154.
6. **Sevast'janov S. V.** Vector summation in Banach space and polynomial algorithms for flow shops and open shops // Math. Oper. Res. 1995. V. 20, N 1. P. 90–103.
7. **Севастьянов С. В.** Нестрогое суммирование векторов на плоскости и его применение в задачах теории расписаний // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 2. С. 69–100.

Адреса авторов:

С. В. Севастьянов
Россия,
630090 Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: seva@math.nsk.su

И. Д. Черных
Россия,
630090 Новосибирск,
ул. Пирогова, 2,
Новосибирский
государственный университет

Статья поступила
23 мая 1995 г.