ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 1996. Том 3, № 1, 75–79

УДК 519.854

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА НА МАКСИМУМ В ДВУМЕРНОМ НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ*)

А. И. Сердюков

Показано, что для любого множества $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ точек на плоскости с метрикой Минковского μ найдется циклическая подстановка $s_0 = s_0(X_n)$ из симметрической группы подстановок S_n (т. е. гамильтонов цикл) такая, что

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(x_i, x_{s_0(i)}) \geqslant \max \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i, x_{s(i)}),$$

где максимум берется по всем подстановкам $s \in S_n$, состоящим только из нечетных циклов. Доказательство проводится методом «склейки» циклов любой подстановки правой части в циклическую подстановку с указанным свойством.

Процедура склейки циклов (“patching”-процедура) [1] применительно к задаче коммивояжера на графах (орграфах) заключается в следующем. На вход подается однородный остовный подграф степени два (полустепени исходов и заходов равны единице) и в нем определенным образом выбирается несколько (не менее двух и не более числа имеющихся) циклов (контуров). В каждом выбранном цикле (контуре) удаляется некоторое ребро (дуга). Полученные цепи (пути) соединяются так, чтобы получился цикл (контур). С использованием процедуры склейки циклов ранее предложены малотрудоемкие алгоритмы с рекордными оценками точности решений (в среднем и наихудшем случаях) на сегодняшний день для разных классов задачи коммивояжера [2, 3] и задачи коммивояжера на максимум [2, 4, 5]. Как правило, на входе первого шага во всех таких алгоритмах использовано оптимальное решение задачи о 2-сочетании (о назначениях) для исходного графа.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–01–00417).

Пусть (R^2, μ) обозначает двумерное пространство с метрикой Минковского (т. е. $\mu(x, y) = ||x - y||$, $x \in R^2$, $y \in R^2$, $|| \cdot ||$ — некоторая норма, заданная в R^2); $G(X_n)$ — полный n-вершинный неориентированный граф с множеством вершин X_n; $C = (C_1, \ldots, C_t)$ — некоторое 2-сочетание (т. е. однородный степени два остовный подграф) графа G, $t \geqslant 2$. Любое размещение множества X_n на плоскости задает матрицу весов ребер (попарных расстояний между вершинами) графа G.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть все циклы 2-сочетания C в графе G нечетные. Тогда существует гамильтонов цикл в G, вес которого не меньше веса 2-сочетания C.*

Оказывается, что заключение этой теоремы не всегда верно, если в 2-сочетании C допускаются четные циклы. Точнее, справедлива

Теорема 2. *Пусть 2-сочетание C в графе G содержит четный цикл. Тогда существует размещение вершин графа G в R^2 такое, что вес любого гамильтонова цикла в G меньше веса 2-сочетания C.*

Замечание. Будем рассматривать только такие размещения, при которых любые три вершины графа переходят в неколинеарные точки. Это не ограничивает общности задачи, поскольку при любом малом ε точки всегда можно так расположить в пределах своих ε-окрестностей, что для них будет выполнено это свойство.

Определение. При заданном размещении вершин графа на плоскости пару несмежных ребер графа назовем *особой парой*, если соответствующие им отрезки на плоскости являются противоположными сторонами выпуклого четырехугольника (образуют особую пару).

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются теоремы 3 и 4.

Теорема 3. *Пусть задано произвольное размещение вершин графа G на плоскости. Тогда каждые два нечетных цикла в G, непересекающиеся по вершинам, имеют особую пару, содержащую по одному ребру из каждого цикла.*

В силу замечания любой отрезок (его продолжение) каждого из двух циклов не содержит концевых вершин отрезков другого цикла. Построим двудольный смешанный граф (т. е. граф, в котором есть дуги и ребра)

$$H = (Y_1, Y_2, U, U_1, U_2),$$

где Y_1, Y_2 суть отрезки, соответствующие ребрам первого и второго циклов (Y_1 — множество вершин первой доли и Y_2 — множество вершин второй доли графа H); $U = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$ и отрезки y_1, y_2

пересекаются$\}$ — множество ребер; $U_1 = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$ и продолжение отрезка y_1 пересекает отрезок $y_2\}$ — множество дуг, ведущих из вершин первой доли во вторую; $U_2 = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in Y_2, y_2 \in Y_1$ и продолжение отрезка y_1 пересекает отрезок $y_2\}$ — множество дуг, ведущих из вершин второй доли в первую.

Тогда число ребер в U четно, поскольку любые две замкнутые кривые на плоскости имеют четное число точек пересечения. Аналогично степень плюс полустепень исхода для любой вершины есть четное число, поскольку любая прямая на плоскости пересекает замкнутую кривую в четном числе точек. Следовательно, число дуг, ведущих из каждой доли в другую, четно. Тогда общее количество дуг и ребер в графе также четно. Поэтому найдутся две вершины (по одной в каждой доле), которые между собой не соединены ребром или дугой. Они соответствуют ребрам особой пары, упомянутой в теореме 3. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *При заданном размещении на плоскости с метрикой Минковского трех непересекающихся по вершинам нечетных циклов в G найдется хотя бы один цикл с тем же множеством вершин, вес которого не меньше суммы весов исходных трех циклов.*

Доказательство. По теореме 3 любые два из трех циклов имеют особую пару, содержащую по одному ребру из каждого цикла. Пусть один из циклов имеет два ребра: одно ребро входит в особую пару с ребром из второго цикла, другое — с ребром из третьего. Тогда, используя дважды процедуру склейки циклов, три цикла объединяем в один, последовательно заменяя особые пары диагональными элементами в соответствующих двух четырехугольниках. Вес полученного цикла не меньше веса исходных циклов, т. е. в этом случае теорема 4 справедлива.

В дальнейшем считаем, что каждый из трех циклов имеет единственное (особое) ребро, входящее в особые пары с другими циклами. Возможны два случая.

Случай 1. Существует прямая, содержащая один особый отрезок, соответствующий особому ребру (скажем, первого цикла), относительно которой особые отрезки других циклов лежат в одном открытом полупространстве.

1а. Если прямая, содержащая один из диагональных элементов выпуклого четырехугольника, образованного особыми отрезками второго и третьего циклов, не пересекает особый отрезок первого цикла, то из трех циклов строится один цикл с тем же множеством вершин следующим образом. Вначале из заданных трех циклов удаляются особые отрезки второго и третьего циклов и добавляются диагональные элементы соответствующего четырехугольника.

Возникший четный цикл имеет особый отрезок (один из вышеупомянутых диагональных элементов), входящий в особую пару с особым отрезком первого цикла. Теперь два цикла (первый и только что построенный) склеиваем в один, заменяя особые отрезки диагональными элементами соответствующего четырехугольника. Вес полученного цикла не меньше веса исходных трех циклов.

1b. Пусть подслучай 1a не имеется. Тогда, как нетрудно видеть, первый случай имеется также для одного из двух особых отрезков (второго либо третьего). Ясно, что относительно последнего отрезка имеется подслучай 1a. Теорема 4 в первом случае доказана.

Случай 2. Любые два особых отрезка расположены в разных открытых полупространствах относительно прямой, содержащей третий отрезок. Тогда три особых отрезка можно заменить двумя способами на три диагональных элемента, лежащих в трех выпуклых соответствующих четырехугольниках.

Заменив особые отрезки тремя диагональными элементами с максимальным весом, получим искомый цикл. Теорема 4 во втором случае доказана. Теорема 4 доказана полностью.

Доказательство теоремы 1. Используем метод математической индукции по $t > 1$ (числу циклов в исходном 2-сочетании C).

При $t = 2$ или $t = 3$ достаточные условия вытекают из теорем 3 и 4.

Предположим, что теорема 1 справедлива при $t \leqslant k$, $k > 3$. Убедимся в ее справедливости при $t = k + 1$.

Поскольку $t > 3$, выбрав три произвольных цикла из 2-сочетания C и воспользовавшись теоремой 4, мы получим новый набор t нечетных циклов, $t < k$, суммарный вес которых не меньше суммарного веса исходных циклов. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $B(S)$ — граница единичного шара S, отвечающего данной норме (метрике Минковского). Легко показать, что существуют четыре различные точки $\{x_1, x_2, x_3, z_4 \mid x_3 = -x_1, x_4 = -x_2\}$ в $B(S)$ такие, что

$$\mu(x_1, x_3) + \mu(x_2, x_4) - \max\{\mu(x_1, x_2) + \mu(x_3, x_4), \mu(x_1, x_4) + \mu(x_2, x_3)\} = \alpha > 0.$$

Предположим, что исходное 2-сочетание $C = C_1, \dots, C_t$ содержит четный цикл C_1. Выделим ε-окрестности точек $x_1, x_2, \mathbf{0}, x_3, x_4$ при достаточно малом ε. Вершины цикла C_1 помещаем в окрестности точек x_1, x_3, чередуя при этом окрестности в порядке обхода вершин цикла. Аналогичное преобразование проделываем с другими четными циклами, размещая их вершины в окрестности точек x_2, x_4. Одну вершину каждого

нечетного цикла поместим в окрестность точки $\mathbf{0}$, остальные — в окрестности точек x_2, x_4 таким образом, чтобы любые две смежные вершины цикла лежали в разных окрестностях. Легко заметить, что при любом числе вершин исходного графа можно выбрать достаточно малое ε, при котором для данного размещения точек длина каждого однородного степени два остовного связного подграфа строго меньше суммарной длины циклов исходного 2-сочетания. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **The Traveling Salesman Problem.** A Guided Tour of Combinatorial Optimization. Chichester: Wiley, 1985.
2. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Сердюков А. И.** Алгоритм для приближенного решения задачи коммивояжера и его вероятностный анализ // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 2. С. 8–17.
3. **Papadimitriou S. H., Yannakakis M.** The traveling salesman problem with distances one and two // Math. Oper. Res. 1993. V. 18, N 1. P. 1–11.
4. **Сердюков А. И.** Задача коммивояжера на максимум в конечномерных вещественных пространствах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 1. С. 50–56.
5. **Сердюков А. И.** Полиномиальные алгоритмы с оценками точностей для одного класса задач коммивояжера на максимум // Комбинаторно-алгебраические методы в дискретной оптимизации. Нижний Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 1991. С. 107–114.

Адрес автора:

Россия,
630090 Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН

Статья поступила

22 декабря 1995 г.