ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 1996. Том 3, № 1, 80–90

УДК 519.854

О СЛОЖНОСТИ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЙ ДВУХСТАНОЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЖОНСОНА*)

А. Г. Щукин, Н. И. Глебов

Рассматриваются некоторые обобщения двухстаночной задачи Джонсона, изучавшиеся ранее другими авторами в предположении, что последовательности обработки деталей на первом и втором станках совпадают. При таком допущении задачи оказывались полиномиально разрешимыми, так как они сводились (с линейной сложностью) к обычной задаче Джонсона с двумя станками.

В статье доказана теорема, одним из следствий которой является утверждение о том, что эти задачи NP-трудны, если не предполагать совпадения упомянутых последовательностей. Другое следствие этой теоремы характеризует один известный полиномиальный алгоритм в определенном смысле как достаточно точный приближенный алгоритм для решения рассматриваемых задач. Наряду с этим получено также некоторое достаточное условие полиномиальной разрешимости.

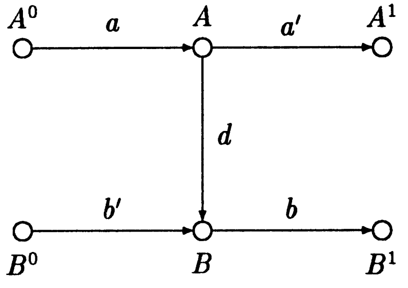
Известно, что в двухстаночной задаче Джонсона [1] (и в некоторых ее обобщениях) существуют оптимальные перестановочные расписания, т. е. расписания, в которых последовательности обработки деталей на каждом станке одинаковы. Однако не все обобщения этой задачи обладают указанным свойством. Тем не менее в работах [2–20] при рассмотрении различных обобщений двухстаночной задачи изначально предполагается, что последовательности обработки деталей на каждом станке совпадают. Как показано в этих работах, при таком допущении эти более общие задачи оказываются полиномиально разрешимыми, а если говорить точнее, они полиномиально (с линейной сложностью) сводятся к исходной задаче Джонсона.

В данной работе мы рассматриваем, по существу, те же самые обобщения двухстаночной задачи, но при этом допускаем, что последовательности обработки деталей на первом и втором станках могут не совпадать, т. е. отыскиваем оптимальное расписание в более широком

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–01–00489).

классе допустимых расписаний. Такое расширение множества допустимых расписаний может привести и, как правило, приводит к тому, что задача существенно усложняется и становится NP-трудной.

1. Далее будем предполагать, что интересующие нас особенности технологии изготовления каждой детали описываются сетевым графиком (см. рисунок), имеющим два полюса-входа A^0, B^0, два полюса-выхода A^1, B^1 и пять дуг-операций с заданными длительностями.



Операции (A^0, A) и (A, A^1) выполняются на первом станке и имеют длительности a и a' соответственно, а операции (B^0, B) и (B, B^1), имеющие длительности b' и b соответственно, выполняются на втором станке. Пятая операция (A, B), имеющая длительность d, выполняется на некотором оборудовании, возможности которого позволяют выполнять подобные операции в любом количестве одновременно. Относительно операций, выполняемых на первом и втором станках, принимаются стандартные допущения, т. е. предполагается, что на станке одновременно может выполняться не более одной операции.

Таким образом, формальная постановка задачи сводится к следующему. Пусть перестановки π_1 и π_2 определены на множестве $\{1, \ldots, n\}$ номеров деталей, подлежащих изготовлению, и задают порядок обработки деталей на первом и втором станках соответственно. Точнее, $\pi_1(r)$ (соответственно $\pi_2(r)$) означает порядковый номер r-й детали в последовательности обработки на первом (соответственно втором) станке. Тогда время (общая длительность) изготовления всех деталей равняется длине критического пути (т. е. самого длинного пути из входного полюса в выходной) в сети $G(\pi_1, \pi_2)$, построенной следующим образом:

— входные полюсы A_r^0 и B_s^0 сетевых графиков, соответствующих деталям $r = \pi_1^{-1}(1)$ и $s = \pi_2^{-1}(1)$, отождествляются и становятся входом сети;

— выходные полюсы A_r^1 и B_s^1 сетевых графиков, соответствующих деталям $r = \pi_1^{-1}(n)$ и $s = \pi_2^{-1}(n)$, отождествляются и становятся выходом сети;

— отождествляются полюсы A_r^1 и A_s^0, где $r = \pi_1^{-1}(k)$, $s = \pi_1^{-1}(k+1)$, $k = 1, \ldots, n-1$;

— отождествляются полюсы B_r^1 и B_s^0, где $r = \pi_2^{-1}(k)$, $s = \pi_2^{-1}(k+1)$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Длина критического пути в построенной сети (а следовательно, и время изготовления всех деталей при выбранном порядке их обработки на станках) равна

$$\hat{F}(\pi_1, \pi_2) = \max\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_i'),\ \sum_{i=1}^{n}(b_i + b_i'),\ F(\pi_1, \pi_2)\right\},$$

где

$$F(\pi_1, \pi_2) = \max_{1 \leqslant s \leqslant n} f(\pi_1, \pi_2, s),$$

$$f(\pi_1, \pi_2, s) = \sum\{a_r + a_r' \mid \pi_1(r) < \pi_1(s)\} + a_s + d_s \\ + b_s + \sum\{b_r + b_r' \mid \pi_2(r) > \pi_2(s)\},$$

a_i, a_i', b_i, b_i' и d_i — длительности операций i-й детали, $1 \leqslant i \leqslant n$.

В результате получаем задачу

$$\min_{\pi_1, \pi_2} \hat{F}(\pi_1, \pi_2). \tag{1}$$

Вместо нее нам будет удобнее рассматривать другую задачу:

$$\min_{\pi_1, \pi_2} F(\pi_1, \pi_2), \tag{2}$$

к которой тривиальным образом сводится исходная. Поскольку любое оптимальное решение второй задачи является также оптимальным решением первой, не исключается логическая возможность того, что первая задача в вычислительном плане существенно проще второй. Из доказываемой нами ниже теоремы 1 будет следовать, что обе эти задачи в общем случае NP-трудны и, следовательно, по сложности они не могут существенным образом различаться.

Замечание 1. Общим случаем задач (1), (2) мы считаем тот, когда параметры a, a', b и b' могут принимать любые неотрицательные целочисленные значения, а параметр d — любые целочисленные значения. Вводить ограничение на знак параметра d представляется нецелесообразным, поскольку изменение параметра d на одну и ту же величину у всех деталей приводит к аналогичному изменению значения целевой функции $F(\pi_1, \pi_2)$ задачи (2) независимо от π_1 и π_2, что, по существу, не меняет задачу. С другой стороны, сохраняя бо́льшую свободу для выбора значений параметра d, мы получаем дополнительные возможности по сведению к задаче (2) некоторых других задач.

Замечание 2. Обычная двухстаночная задача Джонсона получается при $a' = b' = d = 0$. (Здесь и в дальнейшем, говоря о том или ином частном случае задачи, мы дополнительно полагаем, что некоторое условие вида $P(a, a', b, b', d)$ выполняется для всех деталей.)

Замечание 3. Задача нахождения $\min_\pi F(\pi, \pi)$, как уже отмечалось выше, является полиномиально разрешимой. Оптимальная перестановка в этом случае может быть построена по следующему правилу [9]: детали из множества $\{r \mid a_r + a'_r \leqslant b_r + b'_r\}$ располагаются в порядке неубывания величин $a_r - b'_r + d_r$, а за ними следуют остальные детали в порядке невозрастания величин $b_r - a'_r + d_r$.

2. В формулируемой и доказываемой ниже теореме 1 предполагается, что $d = 0$, а $g(x, y, z)$ является полиномиально вычислимой функцией, определенной в области неотрицательных целочисленных значений аргументов и удовлетворяющей при некотором целом положительном q условию $g(x, x, x + q) = x$ для всех x.

Теорема 1. *Задача о выполнимости неравенства*

$$\min_{\pi_1, \pi_2} F(\pi_1, \pi_2) \leqslant g\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + a'_i),\ \sum_{i=1}^{n}(b_i + b'_i),\ \min_\pi F(\pi, \pi)\right) \tag{3}$$

является NP*-полной.*

Доказательство. Поскольку функция $F(\pi_1, \pi_2)$ и все три аргумента функции g в правой части неравенства (3), а следовательно, и правая часть этого неравенства вычисляются по заданным длительностям операций с полиномиальной сложностью, принадлежность рассматриваемой задачи классу NP сомнений не вызывает. Остается лишь убедиться, что к ней полиномиально сводится некоторая NP-полная задача. В качестве таковой возьмем задачу *РАЗБИЕНИЕ*, которая заключается в следующем: для заданных целых положительных чисел $c_1, \ldots, c_t$, $t \geqslant 2$, требуется выяснить существование подмножества S множества $T = \{1, \ldots, t\}$ такого, что $\sum\{c_i \mid i \in S\} = \sum\{c_i \mid i \in T \setminus S\}$. Очевидно, можно считать, что $\sum\limits_{i=1}^{t} c_i = 2c$, c — целое. Более того, нетрудно видеть, что эта задача с указанными входными данными эквивалентна по сложности задаче с модифицированными данными: $t' = t + 2$; $c'_i = (2q + 1)c_i$, $i = 1, \ldots, t$; $c'_{t+1} = c'_{t+2} = q$. Поэтому далее будем предполагать, что $\min_i c_i = q$, и для определенности будем считать $c_1 = q$.

По входным данным задачи *РАЗБИЕНИЕ* определим входные данные задачи (3):

$n = t + 2$;

$a_i = c_i$, $b_i = (D + 2)c_i$, $a'_i = b'_i = 0$, $\quad i = 1, \ldots t$;

$a_{n-1} = a_n = b_{n-1} = b_n = 1;$
$a'_{n-1} = a'_n = (D+2)c+1;\ b'_{n-1} = b'_n = c+1.$

Здесь $D = \sum_{i=1}^{t} c_i = 2c$. Положим $Y = (D+3)D+4$ и отметим также, что $\sum_{i=1}^{n}(a_i + a'_i) = \sum_{i=1}^{n}(b_i + b'_i) = Y$.

Минимум функции $F(\pi,\pi)$ достигается на перестановке $\hat{\pi}$, в соответствии с которой в начале располагаются детали из множества T в порядке неубывания величин $a_i - b'_i$, а после них — детали $n-1$ и n в порядке невозрастания величин $b_i - a'_i$. В частности, в нашем случае это означает существование оптимальной перестановки $\hat{\pi}$, для которой $\hat{\pi}(1) = 1$, $\hat{\pi}(n-1) = n-1$ и $\hat{\pi}(n) = n$. Нетрудно, однако, убедиться, что для любой перестановки $\hat{\pi}$ с указанным свойством $F(\hat{\pi},\hat{\pi}) = Y + q$. В самом деле,

$$\begin{aligned} f(\hat{\pi},\hat{\pi},n) &= \sum\{a_r + a'_r \mid \hat{\pi}(r) < n\} + a_n + b_n \\ &= D + 1 + (D+2)c + 1 + 1 + 1 < Y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\hat{\pi},\hat{\pi},n-1) &= \sum\{a_r + a'_r \mid \hat{\pi}(r) < n-1\} + a_{n-1} + b_{n-1} + b_n + b'_n \\ &= D + 1 + 1 + 1 + c + 1 < Y. \end{aligned}$$

Далее, при $s \in T \setminus \{1\}$ имеем

$$\begin{aligned} f(\hat{\pi},\hat{\pi},s) &\leqslant \sum\{a_r + a'_r \mid r \in T\} + \sum\{b_r + b'_r \mid \hat{\pi}(r) > 1\} \\ &= D + (D+2)(D-q) + 2(c+2) \leqslant (D+3)D + 2 < Y \end{aligned}$$

и

$$f(\hat{\pi},\hat{\pi},1) = a_1 + b_1 + \sum\{b_r + b'_r \mid \hat{\pi}(r) > 1\} = q + Y.$$

Таким образом, $\min_\pi F(\pi,\pi) = Y + q$ и в силу сделанных ранее допущений, касающихся функции g, правая часть неравенства (3) равняется Y.

Покажем теперь, что в задаче *РАЗБИЕНИЕ* существует множество S с требуемым свойством в том и только в том случае, когда в построенной задаче (3) существуют перестановки π_1 и π_2, удовлетворяющие неравенству $F(\pi_1,\pi_2) \leqslant Y$ (или $f(\pi_1,\pi_2,s) \leqslant Y$ при $s = 1,\dots,n$).

(1) Пусть $S \subset T$ и $\sum\{c_i \mid i \in S\} = \sum\{c_i \mid i \in T \setminus S\} = c$. Рассмотрим перестановки π_1 и π_2 такие, что

$\pi_1(n-1) = |S|+1$, $\pi_1(n) = n$, $\{r \mid \pi_1(r) \leqslant |S|\} = S$,
$\pi_2(n-1) = 1$, $\pi_2(n) = |S|+2$, $\{r \mid 1 < \pi_2(r) < |S|+2\} = S$.

Тогда

$$f(\pi_1, \pi_2, n-1) = \sum\{a_r + a'_r \mid r \in S\} + a_{n-1} + b_{n-1}$$

$$+ \sum\{b_r + b'_r \mid r \in T\} + b_n + b'_n = c + 1 + 1 + (D+2)D + 1 + c + 1 = Y,$$

$$f(\pi_1, \pi_2, n) = \sum\{a_r + a'_r \mid \pi_1(r) < \pi_1(n)\} + a_n + b_n$$

$$+ \sum\{b_r + b'_r \mid \pi_2(r) > \pi_2(n)\} = D+1+(D+2)c+1+1+1+(D+2)c = Y.$$

Далее, при $s \in S$

$$f(\pi_1, \pi_2, s) \leqslant \sum\{a_r \mid \pi_1(r) \leqslant |S|\} + \sum\{b_r + b'_r \mid \pi_2(r) > 1\}$$
$$= c + (D+2)D + 1 + c + 1 = Y - 2,$$

а при $s \in T \setminus S$

$$f(\pi_1, \pi_2, s) \leqslant \sum\{a_r + a'_r \mid \pi_1(r) < n\} + \sum\{b_r \mid \pi_2(r) > |S| + 2\}$$
$$= D + 1 + (D+2)c + 1 + (D+2)c = Y - 2.$$

(2) Пусть $\sum\{c_i \mid i \in S\} = c + \Delta$ и $\Delta \neq 0$ для любого подмножества S.

Для произвольных перестановок π_1 и π_2 определим множества $S = \{r \mid \pi_1(r) < \pi_1(n-1)\}$ и $S' = \{r \mid \pi_2(r) < \min(\pi_2(n-1), \pi_2(n))\}$. При этом далее предполагаем, что $\pi_1(n-1) < \pi_1(n)$, т. е. $n \notin S$. Это не уменьшает общности наших рассмотрений ввиду идентичности деталей $n-1$ и n. Нашей целью является доказательство существования такого номера s, что справедливо неравенство $f(\pi_1, \pi_2, s) > Y$.

Если $S' \neq \varnothing$, то для $s = \pi_2^{-1}(1) \in S'$ имеем

$$f(\pi_1, \pi_2, s) \geqslant a_s + b_s + \sum\{b_r + b'_r \mid \pi_2(r) > 1\}$$
$$\geqslant 1 + (D+2)D + 2(c+2) = Y + 1.$$

Поэтому далее будем считать множество S' пустым, что эквивалентно равенству $\min(\pi_2(n-1), \pi_2(n)) = 1$.

Если $\Delta > 0$, то пусть $s \in \{n-1, n\}$ и $\pi_2(s) = 1$. Тогда

$$f(\pi_1, \pi_2, s) \geqslant \sum\{a_r \mid r \in S\} + a_s + b_s + \sum\{b_r + b'_r \mid \pi_2(r) > 1\}$$
$$= c + \Delta + 1 + 1 + (c+2) + (D+2)D = Y + \Delta > Y.$$

Если $\Delta < 0$, то положим $s = \arg\min\{\pi_2(r) \mid r \in T \setminus S\}$ (т. е. $s \in T \setminus S$ и $\pi_2(s) \leqslant \pi_2(r)$ при любом $r \in T \setminus S$). Тогда

$$\begin{aligned} f(\pi_1, \pi_2, s) &\geqslant a_{n-1} + a'_{n-1} + a_s + \sum\{b_r \mid r \in T \setminus S\} \\ &\geqslant 1 + (D+2)c + 1 + 1 + (D+2)(c - \Delta) \\ &= (D+2)D + 3 + (D+2)(-\Delta) \\ &\geqslant (D+2)D + 3 + (D+2) = Y + 1. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим некоторые следствия теоремы 1.

Следствие 1. *Задача о выполнимости неравенства*

$$\min_{\pi_1,\pi_2} F(\pi_1,\pi_2) \leqslant \max\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i + a'_i), \sum_{i=1}^{n}(b_i + b'_i)\right\} \tag{4}$$

является NP*-полной.*

Из данного утверждения следует, что задачи (1) и (2) являются NP-трудными даже в случае $d = 0$. Более того, они оказываются NP-трудными также и в случае $a' = b' = 0$, поскольку преобразованием

$$(a, a', b, b', d) \to (a + a', 0, b + b', 0, d - a' - b') \tag{5}$$

общий случай сводится к указанному частному случаю.

Следствие 2. *Задача о выполнимости неравенства*

$$\min_{\pi_1,\pi_2} F(\pi_1,\pi_2) < \min_{\pi} F(\pi,\pi) \tag{6}$$

является NP*-полной.*

Это утверждение получается из теоремы 1 при $g(x, y, z) = z - 1$. Оно, в частности, позволяет рассматривать известный полиномиальный (как и любой другой) алгоритм нахождения $\min_\pi F(\pi,\pi)$ как алгоритм для получения достаточно «хорошего» приближенного решения задачи (2) в том смысле, что в случае справедливости гипотезы $P \neq \text{NP}$ не существует алгоритма полиномиальной сложности, который позволял бы получать приближенное решение этой задачи, имеющее меньшее отклонение от оптимального, если (и только если) такое решение существует.

3. Рассмотрим теперь некоторое достаточное условие, при выполнении которого имеет место равенство

$$\min_{\pi_1,\pi_2} F(\pi_1,\pi_2) = \min_{\pi} F(\pi,\pi), \tag{7}$$

влекущее полиномиальную сводимость задачи (2) к обычной двухстаночной задаче Джонсона.

Из сказанного выше следует, что, не уменьшая общности, можно провести наш анализ для случая $a' = b' = 0$.

Теорема 2. *Равенство* (7) *справедливо, если*

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} d_k \leqslant \min_{1 \leqslant s \leqslant n}(d_s + \max\{a_s, b_s\}). \tag{8}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы не выполняется, т. е. $\pi_1 \neq \pi_2$ для любой пары перестановок (π_1, π_2), являющейся решением задачи (2).

Для произвольных перестановок π_1 и π_2, $\pi_1 \neq \pi_2$, определим две характеристики:

$p = \min\{i \mid \pi_1^{-1}(i) \neq \pi_2^{-1}(i)\}$,

$l = \pi_1(\pi_2^{-1}(p))$.

Затем среди пар перестановок, являющихся решениями задачи (2) и имеющих максимальное значение первой характеристики, выберем пару (π_1, π_2) с минимальным значением l.

Введем также обозначения:

$$s' = \pi_1^{-1}(p), \quad s'' = \pi_2^{-1}(p), \quad k = \pi_2(s').$$

Очевидно, что $\pi_1(s') < \pi_1(s'')$ и $\pi_2(s') > \pi_2(s'')$. В соответствии с условиями теоремы возможны два случая:

(a) $d_{s'} \leqslant d_{s''} + a_{s''}$;

(b) $d_{s'} \leqslant d_{s''} + b_{s''}$.

В случае (a) рассмотрим перестановку π_2':

$$\pi_2'(r) = \begin{cases} p, & \text{если } \pi_2(r) = k \text{ (т. е. } r = s'), \\ \pi_2(r) + 1, & \text{если } p \leqslant \pi_2(r) < k, \\ \pi_2(r) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\{r \mid \pi_2'(r) \geqslant \pi_2'(s)\} \subset \{r \mid \pi_2(r) \geqslant \pi_2(s)\}$ при $s \neq s'$ и $\{r \mid \pi_2'(r) \geqslant \pi_2'(s')\} = \{r \mid \pi_2(r) \geqslant \pi_2(s'')\}$. Отсюда далее следуют неравенства

$$\begin{aligned} f(\pi_1, \pi_2', s') &= \sum\{a_r \mid \pi_1(r) \leqslant \pi_1(s')\} + d_{s'} + \sum\{b_r \mid \pi_2'(r) \geqslant \pi_2'(s')\} \\ &= \sum\{a_r \mid \pi_1(r) \leqslant \pi_1(s'')\} + d_{s'} + \sum\{b_r \mid \pi_2(r) \geqslant \pi_2(s'')\} \\ &- \sum\{a_r \mid \pi_1(s') < \pi_1(r) \leqslant \pi_1(s'')\} \\ &\leqslant f(\pi_1, \pi_2, s'') - d_{s''} - a_{s''} + d_{s'} \leqslant f(\pi_1, \pi_2, s'') \end{aligned}$$

и при $s \neq s'$

$$f(\pi_1, \pi_2', s) \leqslant f(\pi_1, \pi_2, s).$$

Из полученных неравенств вытекает $F(\pi_1, \pi_2') \leqslant F(\pi_1, \pi_2)$, что означает оптимальность пары (π_1, π_2'). Однако это противоречит выбору (π_1, π_2) (либо сделанному выше допущению), так как у (π_1, π_2') значение первой характеристики больше, чем у (π_1, π_2) (либо $\pi_1 = \pi_2'$).

В случае (b) определим перестановку π_1':

$$\pi_1'(r) = \begin{cases} l, & \text{если } \pi_1(r) = p \text{ (т. е. } r = s'), \\ \pi_1(r) - 1, & \text{если } p < \pi_2(r) \leqslant l, \\ \pi_1(r) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда, как легко видеть, справедливо равенство $\{r \mid \pi_1'(r) \leqslant \pi_1'(s')\} = \{r \mid \pi_1(r) \leqslant \pi_1(s'')\}$, а при $s \neq s'$ имеем $\{r \mid \pi_1'(r) \leqslant \pi_1'(s)\} \subset \{r \mid \pi_1(r) \leqslant \pi_1(s)\}$. Используя эти соотношения, получаем неравенства

$$\begin{aligned} f(\pi_1', \pi_2, s') &= \sum\{a_r \mid \pi_1'(r) \leqslant \pi_1'(s')\} + d_{s'} + \sum\{b_r \mid \pi_2(r) \geqslant \pi_2(s')\} \\ &= \sum\{a_r \mid \pi_1(r) \leqslant \pi_1(s'')\} + d_{s'} + \sum\{b_r \mid \pi_2(r) \geqslant \pi_2(s'')\} \\ &- \sum\{b_r \mid \pi_2(s') > \pi_2(r) \geqslant \pi_2(s'')\} \\ &\leqslant f(\pi_1, \pi_2, s'') - d_{s''} - b_{s''} + d_{s'} \leqslant f(\pi_1, \pi_2, s'') \end{aligned}$$

и при $s \neq s'$

$$f(\pi_1', \pi_2, s) \leqslant f(\pi_1, \pi_2, s).$$

Как и в предыдущем случае, из полученных выше неравенств следует оптимальность пары (π_1', π_2), что также противоречит либо сделанному нами допущению, либо выбору пары (π_1, π_2), поскольку у (π_1', π_2) либо первая характеристика больше, чем у (π_1, π_2), либо при их равенстве вторая характеристика меньше, чем у (π_1, π_2). Теорема 2 доказана.

Установленное для частного случая достаточное условие (8) полиномиальной разрешимости задачи (2) с использованием преобразования (5) переносится и на общий случай.

В результате получаем условие

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n}(d_k - a_k' - b_k') \leqslant \min_{1 \leqslant s \leqslant n}(d_s - a_s' - b_s' + \max\{a_s + a_s', b_s + b_s'\}). \qquad (9)$$

Следствие. *Если $a' \cdot b' = d = 0$, то задача (2) полиномиально разрешима.*

В данном случае легко убедиться в том, что условие (9) выполняется, так как $\max_k(-a_k' - b_k') \leqslant 0$ и $\min_s(-a_s' - b_s' + \max\{a_s + a_s', b_s + b_s'\}) \geqslant 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Johnson S. M.** Optimal two- and three-stage production schedules with set-up times included // Naval Res. Log. Quart. 1954. V. 1, N 1. P. 61–68. (Русский перевод: Джонсон С. Оптимальное расписание для двух- и трехступенчатых процессов с учетом времени наладки // Кибернетический сборник. Нов. сер. М.: Мир, 1965. Вып. 1.)
2. **Jackson J. R.** An extension of Johnson's results on job lot scheduling // Naval Res. Log. Quart. 1956. V. 3. P. 201–203.

3. **Johnson S. M.** Discussion: Sequencing n jobs on two machines with arbitrary time lags // Manag. Sci. 1959. V. 5, N 3. P. 299–303.
4. **Mitten L. G. Sequencing n jobs on two machines with** arbitrary time lags // Manag. Sci. 1959. V. 5, N 3. P. 293–298.
5. **Mitten L. G.** A scheduling problems // J. Industr. Eng. 1959. V. 10, N 3. P. 131–135.
6. **Nabeshima I.** Sequencing on two machines with start lag and stop lag // J. Oper. Res. Soc. Japan. 1963. V. 5. P. 97–101.
7. **Szwarc W.** On some sequencing problems // Naval Res. Log. Quart. 1969. V. 15. P. 123–155.
8. **Kurisu T.** Flow shop sequencing problem with time lags // Technol. Reps. Osaka Univ. 1973. N 2. P. 303–314.
9. **Левнер Е. В.** Сетевой подход к задачам теории расписаний // Исследования по дискретной математике. М.: Наука, 1973. С. 135–150.
10. **Yoshida T., Hitomi K.** Optimal two-stage production scheduling with setup times separated // AIIE Trans. 1979. V. 11, N 2. P. 261–263.
11. **Maggu P. L., Das G.** On $2 \times n$ sequencing problem with transportation times of jobs // Pure Appl. Math. Sci. 1980. V. 12, N 1–2. P. 1–6.
12. **Maggu P. L., Das G., Kumar R.** On equivalent-job for job-block in $2 \times n$ sequencing problem with transportation-times // J. Oper. Res. Soc. Japan. 1981. V. 24, N 2. P. 136–146.
13. **Sule D. R.** Sequencing n jobs on two machines with setup processing and removal times separated // Naval Res. Log. Quart. 1982. V. 29, N 3. P. 517–519.
14. **Maggu P. L., Singhal M. L., Mohammad N., Yadav S. K.** On N-job, 2-machine flow-shop scheduling problem with arbitrary time lags and transportation times of jobs // J. Oper. Res. Soc. Japan. 1982. V. 25, N 3. P. 219–227.
15. **Szwarc W.** Flow-shop problems with time lags // Manag. Sci. 1983. V. 29, N 4. P. 477–481.
16. **Sule D. R., Huang K. Y.** Sequencing on two and three machines with setup processing and removal times separated // Intern. J. Prod. Res. 1983. V. 21, N 5. P. 723–732.
17. **Monma C. L., Rinnooy Kan A. H. G.** A concise survey of efficiently solvable special cases of the permutation flow-shop problem // RAIRO Rech. Opér. 1983. V. 17, N 2. P. 105–119.
18. **Khurana K., Bagga P. C.** Minimizing the makespan in a 2-machine flowshop with time lags and setup conditions // Z. Oper. Res. Ser. A. 1984. V. 28, N 2. P. 163–174.

19. **Bagga P. C., Khurana K.** Transportation of job–blocks with separated setup times and removal times // Cahiers Centre Études Rech. Opér. 1984. V. 26, N 3–4. P. 195–200.

20. **Левнер Е. В.** Эффективные графовые алгоритмы для задач теории расписаний джонсоновского типа // Экономико-математическое моделирование и анализ дискретных систем. М.: Изд-во ЦЭМИ АН СССР, 1988. С. 109–125.

Адреса авторов:

А. Г. Щукин
Россия,
630090 Новосибирск,
ул. Пирогова, 2,
Новосибирский
государственный университет

Н. И. Глебов
Россия,
630090 Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: nigleb@math.nsk.su

Статья поступила
5 декабря 1995 г.