ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 1996. Том 3, № 2, 3–14

УДК 517.5+519.7

ОБ ε-ЭНТРОПИИ И ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГАХ КЛАССОВ ЦЕЛЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Г. Г. Аманжаев

Доказывается, что все порядки роста ε-энтропии от $\log(1/\varepsilon)$ до $\log^2(1/\varepsilon)$ реализуются на некотором компакте целых периодических функций.

Введение

Известно, что ε-энтропия является важной характеристикой массивности компактов в функциональных пространствах. В работах [1–3] были установлены порядки или асимптотики ε-энтропии для классов функций различной гладкости, в том числе было показано, что

— ε-энтропия класса функций конечной гладкости r, $r > 0$, по порядку равна $(1/\varepsilon)^{1/r}$ (см. [2] для целых r, [3] в общем случае);

— ε-энтропия класса функций, аналитических в некоторой области, по порядку равна $\log^2(1/\varepsilon)$ (см. [2] для односвязных и [1] для двусвязных областей);

— ε-энтропия класса целых периодических функций порядка p, $p > 1$, по порядку равна $\log^{2-1/p}(1/\varepsilon)$ (см. [2]);

— ε-энтропия класса многочленов фиксированной степени по порядку равна $\log(1/\varepsilon)$ (очевидно).

Естественно ожидать, что шкала ε-энтропии является непрерывной, т. е. для любой функции $H(\varepsilon)$, имеющей при $\varepsilon \to 0$ порядок роста от $\log(1/\varepsilon)$ до $(1/\varepsilon)^{\mathrm{const}}$ и растущей «достаточно регулярно», найдется функциональный компакт с таким порядком роста ε-энтропии. В [3] эта задача исследована для классов функций конечной гладкости (задаваемых ограничением модуля непрерывности некоторой производной), для которых $\log H_\varepsilon \asymp \log(1/\varepsilon)$.

В настоящей работе исследуется другой отрезок шкалы ε-энтропии, для которого установлено следующее утверждение.

Пусть функция $\tau\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна и выпукла вниз, $\tau(x)/x$ возрастает и $\tau(0) = 0$. Тогда ε-энтропия компакта целых периодических функций $f(z)$ таких, что

$$|f(z)| \leqslant e^{\tau(|\operatorname{Im} z|)}, \tag{1}$$

имеет порядок

$$\frac{\log^2(1/\varepsilon)}{\tau^{-1}(\log(1/\varepsilon))},$$

где τ^{-1} — обратная функция к τ.

Поскольку функция τ может иметь любой порядок роста, от линейного и до сколь угодно большого, то реализуются все порядки роста ε-энтропии между $\log(1/\varepsilon)$ и $\log^2(1/\varepsilon)$.

Этот результат в определенном смысле обобщает приведенные в работе [2] асимптотические оценки ε-энтропии классов целых аналитических функций конечного порядка и типа.

Второй рассматриваемой в работе задачей является построение дискретных аналогов классов аналитических функций и исследование величины Approx, которая характеризует массивность этих классов.

Для классов $\Sigma_{1,\tau}$ (определение классов см. ниже) определяются (через конечные разности) их дискретные аналоги $\Sigma^N_{1,\tau}$. Показано, что при $x \log x \preceq \tau(x)$ (и ограничениях на гладкость τ) имеет место соотношение

$$\log \operatorname{Approx}\Sigma_{1,\tau} \asymp \frac{\log^2 N}{\tau^{-1}(\log N)}.$$

Поэтому величина log Approx может иметь все порядки от $\log N \log\log N$ до $\log^2 N$, т. е. почти от многочленов ($\log \operatorname{Approx} \asymp \log N$) до аналитических в ограниченной области функций ($\log \operatorname{Approx} \asymp \log^2 N$).

Автор выражает искреннюю благодарность своему учителю О. Б. Лупанову за постановки задач и постоянное внимание к работе.

§ 1. Классы целых аналитических функций и их ε-энтропия

Пусть $\tau\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\tau(0) = 0$;

2) τ — непрерывная функция;

3) $\tau(x)/x$ — возрастающая к бесконечности функция;

4) τ — выпуклая вниз функция.

Обозначим через $\Sigma_{1,\tau}$ класс целых 1-периодических функций (т. е. функций с периодом, равным 1), для которых выполняется условие (1).

Пусть $\mathscr{H}_\varepsilon(\Sigma_{1,\tau})$ — ε-энтропия класса $\Sigma_{1,\tau}$.

Теорема 1. *Для класса $\Sigma_{1,\tau}$ справедливо соотношение*

$$\mathscr{H}_\varepsilon(\Sigma_{1,\tau}) \asymp \frac{\ln^2(1/\varepsilon)}{\tau^{-1}(\ln(1/\varepsilon))},$$

где τ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям 1–4, τ^{-1} — функция, обратная к τ.

Доказательство. Верхняя оценка. Функции из $\Sigma_{1,\tau}$ допускают разложение в ряд Фурье

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2\pi ikz}.$$

Оценим сверху коэффициенты a_k. По определению коэффициентов Фурье имеем

$$a_k = \int_0^1 f(z)e^{-2\pi ik}dz.$$

Поскольку $f(z)e^{-2\pi ik}$ — аналитическая функция,

$$\int_0^1 f(z)e^{-2\pi ik}dz = \int_A^B f(z)e^{-2\pi ik}dz + \int_B^C f(z)e^{-2\pi ik}dz + \int_C^D f(z)e^{-2\pi ik}dz,$$

где $ABCD$ — прямоугольный контур с вершинами $A(0)$, $B(iR)$, $C(1+iR)$, $D(1)$, R — действительное число. Так как $f(z)e^{-2\pi ik}$ — 1-периодическая функция, то

$$\int_A^B f(z)e^{-2\pi ik}dz + \int_C^D f(z)e^{-2\pi ik}dz = 0.$$

Поэтому

$$\int_0^1 f(z)e^{-2\pi ik}dz = \int_B^C f(z)e^{-2\pi ik}dz.$$

Следовательно,

$$|a_k| = \left|\int_B^C f(z)e^{-2\pi ik}dz\right| \leqslant \int_0^1 |f(t+iR)|\cdot|e^{-2\pi ik(t+iR)}|\,dt \leqslant e^{2\pi kR}e^{\tau(|R|)}.$$

Таким образом,

$$|a_k| \leqslant \inf_{R\in\mathbb{R}} e^{2\pi kR+\tau(|R|)} = \inf_{R>0} e^{\tau(R)-2\pi R|k|}. \qquad (2)$$

Построим ε-покрытие для класса $\Sigma_{1,\tau}$. В качестве центров шаров ε-покрытия выберем функции вида

$$f(z) = \sum_{-k_0<k<k_0} a_k e^{2\pi i k z},$$

где коэффициенты a_k удовлетворяют неравенству (2) и таковы, что их действительная и мнимая части кратны δ. Число таких шаров не превосходит

$$\prod_{-k_0<k<k_0} \left(1 + (2/\delta) \inf_{R>0} e^{\tau(R)-2\pi R|k|}\right)^2. \tag{3}$$

Чтобы это множество шаров образовало ε-покрытие, достаточно потребовать выполнения следующих двух условий:

1) $\delta = \varepsilon/(4k_0)$ (при этом общая погрешность коэффициентов a_k при $-k_0 < k < k_0$ не превосходит $1/(2\varepsilon)$);

2) $\sum\limits_{-k_0 \leqslant k \leqslant k_0} |a_k| < \varepsilon/2$ (при этом погрешность от замены бесконечного ряда Фурье конечной суммой меньше $1/(2\varepsilon)$).

Положим

$$k_0 = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\tau^{-1}(\ln(1/\varepsilon))}.$$

Тогда

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \inf_{R>0} e^{\tau(R)-2\pi Rk} \leqslant \inf_{R>0} \sum_{k=k_0}^{\infty} e^{\tau(R)-2\pi Rk}$$
$$= \inf_{R>0} \frac{e^{\tau(R)-2\pi Rk_0}}{1-e^{-2\pi R}} \leqslant 2 \inf_{R\geqslant 1} e^{\tau(R)-2\pi Rk_0}.$$

Взяв $R = \tau^{-1}(\ln(1/\varepsilon))$, получаем

$$2 \inf_{R\geqslant 1} e^{\tau(R)-2\pi Rk_0} \leqslant 2e^{\ln(1/\varepsilon)-2\pi \ln(1/\varepsilon)} = 2\varepsilon^{2\pi-1} < \varepsilon/2,$$

т. е. условие 2 выполняется. С учетом выбранных значений δ и k_0 из (3) следует, что

$$H_\varepsilon(\Sigma_{1,\tau}) \preceq \ln n \leqslant 4 \sum_{k=0}^{k_0-1} \ln\left(1 + (1/\delta)(2 \inf_{R>0} e^{\tau(R)-2\pi Rk})\right).$$

Пусть $\lambda = \lambda(k)$ — корень уравнения $k = \lambda/\tau^{-1}(\lambda)$ (он существует в силу условия 3 на функцию τ, причем $\lambda(k) \to \infty$ при $k \to \infty$). Тогда

$$\inf_{R>0} (\tau(R) - 2\pi Rk) = \inf_{R>0} \left(\tau(R) - \frac{2\pi R\lambda}{\tau^{-1}(\lambda)}\right)$$
$$= \inf_{s>0} \left(r - 2\pi\lambda \frac{\tau^{-1}(s)}{\tau^{-1}(\lambda)}\right) = \lambda \inf_{s>0} \left(\frac{s}{\lambda} - 2\pi \frac{\tau^{-1}(s)}{\tau^{-1}(\lambda)}\right).$$

Полагая $s = \lambda$, имеем $\inf\limits_{R>0} \tau(R) - 2\pi Rk \leqslant \lambda(1-2\pi) < \lambda$. Следовательно,

$$H_\varepsilon(\Sigma_{1,\tau}) \preceq \sum_{k=0}^{k_0-1} \ln(1+2e^{\lambda(k)}/\delta) = \sum_{k=0}^{k_0-1} \ln(1+8k_0e^{\lambda(k)}/\varepsilon)$$
$$\leqslant k_0 \ln(1+8k_0e^{\lambda(k_0)}/\varepsilon) = k_0\ln(1/\varepsilon) + k_0\ln(\varepsilon + 8k_0e^{\lambda(k_0)}).$$

При $\varepsilon \to 0$ имеем $k_0 \to \infty$ и $\lambda(k_0) \to \infty$. Поэтому $\mathscr{H}_\varepsilon(\Sigma_{1,\tau}) \preceq k_0\ln(1/\varepsilon) + k_0\ln k_0 + k_0\lambda(k_0)$.

Так как $k_0 = \ln(1/\varepsilon)/(\tau^{-1}(\ln(1/\varepsilon)))$ и λ определено соотношением $k_0 = \lambda(k_0)/(\tau^{-1}(\lambda(k_0)))$, то $\lambda(k_0) = \ln(1/\varepsilon)$ и $\mathscr{H}_\varepsilon(\Sigma_{1,\tau}) \preceq \ln^2(1/\varepsilon)/(\tau^{-1}(\ln(1/\varepsilon)))$. Верхняя оценка доказана.

Нижняя оценка. В классе $\Sigma_{1,\tau}$ построим ε-различимое подмножество A, мощность которого по порядку не меньше $\ln^2(1/\varepsilon)/(\tau^{-1}(\ln(1/\varepsilon)))$. Пусть A состоит из всевозможных функций вида

$$f(z) = \sum_{|k|<k_0} a_k e^{2\pi ikz},$$

где $a_k \in \mathbb{R}$, $|a_k| < \delta$, a_k кратны ε. Заметим, что последнее условие обеспечивает ε-различимость множества A.

Обозначим $N = \ln(1/\varepsilon)$, $M = \ln(1/\delta)$. Тогда $\log|A| \succeq k_0(N-M)$. Условие

$$A \subset \Sigma_{1,\tau} \tag{4}$$

выполняется, если при любом действительном R имеет место неравенство

$$\delta \sum_{|k|<k_0} e^{2\pi kR} \leqslant e^{\tau(|R|)},$$

т. е.

$$\frac{1}{\delta} \geqslant \sup_{R>0} e^{-\tau(|R|)} \sum_{|k|<k_0} e^{2\pi kR}.$$

Выберем $k_0 = N/(2\pi\tau^{-1}(N))$. При $R \geqslant 1$ имеем

$$\frac{\sum_{|k|<k_0} e^{2\pi kR}}{e^{\tau(R)}} \leqslant \frac{2e^{2\pi k_0R}}{\tau(R)} = 2e^{\frac{NR}{\tau^{-1}(R)}-\tau(R)}.$$

Величина $NR/\tau^{-1}(R) - \tau(R)$ выпукла вверх по R, причем она равна нулю при $R=0$ и $R=N$. Поэтому $NR/\tau^{-1}(R) - \tau(R) < N^2/\tau^{-1}(N)$. Если же $0<R<1$, то

$$\frac{\sum_{|k|<k_0} e^{2\pi kR}}{e^{\tau(R)}} \leqslant 2k_0e^{2\pi} = \mathrm{const}\,\frac{N}{\tau^{-1}(N)}.$$

Поэтому (4) выполнено при $1/\delta \geqslant N^2/\tau^{-1}(N)$ и тем более при $1/\delta \geqslant N^2$ (или $M \geqslant 2\ln N$). Это искомое достаточное условие для $A \subset \Sigma_{1,\tau}$. Из неравенства $\log|A| \succeq k_0(N-M)$ следует, что

$$\mathscr{H}_\varepsilon(\Sigma_{1,\tau}) \succeq \log|A| \succeq \frac{N^2}{\tau^{-1}(N)} = \frac{\ln^2(1/\varepsilon))}{\tau^{-1}(\ln(1/\varepsilon))}.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Условие 3 в определении функции τ можно ослабить до условия

3′) $\tau(x)/x$ — возрастающая функция.

При этом добавятся, в частности, функции $\tau(x)$ вида $x\varphi(x)$, где $\varphi \to \alpha = \mathrm{const}$. Порождаемые такими функциями классы $K(\tau)$ состоят из тригонометрических многочленов и имеют ε-энтропию порядка $\ln(1/\varepsilon) \asymp \ln^2(1/\varepsilon))/(\tau^{-1}(\ln(1/\varepsilon)))$, т. е. теорема верна и в этом случае.

Замечание 2. Теорема верна и в другом предельном случае, когда τ^{-1} ограничена, а $\tau(x)$ — функция $[0,\alpha) \to \mathbb{R}_+$, которую можно считать равной $+\infty$ при $x \geqslant \alpha$. Этот случай соответствует функциям, аналитическим в полосе $|\operatorname{Im} z| < \alpha$; ε-энтропия класса таких функций по порядку равна $\ln^2(1/\varepsilon) \asymp \ln^2(1/\varepsilon)/(\tau^{-1}(\ln(1/\varepsilon)))$.

§ 2. Дискретные аналоги классов целых аналитических функций

Напомним предлагаемую нами общую конструкцию определения дискретных аналогов классов непрерывных функций (см. [4–7]). Пусть K — некоторый класс функций $f\colon[0,1) \to [0,1)$, при определении которого использовались ограничения на значения производных (например, $|f^n| < c$). *Внешним дискретным аналогом* класса K назовем множество

$$\widehat{K}^N = \{g\colon \{0,1,\dots,N-1\} \to \{0,1,\dots,N-1\} \mid g(t) = \lfloor Nf(t/N + 1/(2N))\rfloor,\ f \in K\};$$

это множество «максимально точно» воспроизводит класс K при квантовании области определения и множества значений на N уровней.

Условие $|f^n| < c$ для функций из K приводит к тому, что для дискретных функций $g \in \widehat{K}^N$ выполнено следующее ограничение конечных разностей:

$$|\Delta_n(g;x_0,\dots,x_n)| < cN^{1-n}/n! + \varphi(x_0,\dots,x_n), \tag{5}$$

где $\Delta_n(g;x_0,\dots,x_n)$ — разделенная n-я разность функции g (по определению $\Delta_0(g;x_0) = g(x_0)$ и

$$\Delta_{n+1}(g;x_0,\dots,x_{n+1}) = \frac{\Delta_n(g;x_1,\dots,x_{n+1}) - \Delta_n(g;x_0,\dots,x_n)}{x_{n+1}-x_0});$$

величина $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ равна $\sup_h \Delta(h; x_0, \ldots, x_n)$, где sup берется по всем таким функциям h, что $|h| < 1/2$.

Внутренний дискретный аналог K^N класса K определяется как множество функций $g\colon \{0, 1, \ldots, N-1\} \to \{0, 1, \ldots, N-1\}$, удовлетворяющих соответствующим условиям вида (5). При этом всегда по построению $\widehat{K}^N \subset K^N$.

Для характеризации дискретных классов применяется величина Approx, которая представляет собой минимальную мощность 1-покрытия рассматриваемых дискретных классов шарами радиуса 1 (в некоторой метрике пространства функций $g\colon \{0, 1, \ldots, N-1\} \to \{0, 1, \ldots, N-1\}$, обычно в равномерной).

Ранее автором было установлено (см. [4–7]), что для многих классов дискретных функций логарифм величины Approx ведет себя практически так же, как ε-энтропия в непрерывном случае. Ниже подобный результат устанавливается для классов целых аналитических функций.

Оценим $|f^n(x)|$ при $x \in \mathbb{R}$, $f \in \Sigma_{1,\tau}$. Из формулы

$$f^n(x) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{|z|=R} f(x+z) z^{-n} |dz|$$

следует, что

$$|f^n(x)| \leqslant \frac{n!}{2\pi R} R^{-n} \int\limits_{|z|=R} |f(x+z)| \cdot |dz| \leqslant \frac{n!}{R^n} \max_{|z| \leqslant R} |f(x+z)| \leqslant \frac{e^{\tau(R)} n!}{R^n},$$

т. е.

$$|f^n(x)| \leqslant n! \inf_{R>0} e^{\tau(R)}/R^n = n! d_\tau(n),$$

где $d_\tau(n) = \inf\limits_{R>0} e^{\tau(R)}/R^n$. Поэтому внешний дискретный аналог класса $\Sigma_{1,\tau}$ можно задать так:

$$\Sigma_{1,\tau}^N = \{f\colon I_N \to I_N \mid (\forall n \in \mathbb{N})(\forall x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}, x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$$
$$|\Delta_n(\mathring{f}; x_0, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant N^{1-n} d_\tau(n) + \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)\},$$

где $\mathring{f}$ — N-периодическое доопределение f на множестве всех целых чисел $\mathbb{Z}$.

Лемма 1. *Пусть значения многочлена $p(x)$ степени $2n-1$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_{-1}, x_{-2}, \ldots, x_{-n}$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, $x_i = a + (2i-1)b$, $x_{-i} = a - (2i-1)b$, $b > 0$, известны с погрешностью не более ε. Тогда при $x_{-1} \leqslant x \leqslant x_1$ интерполяционный многочлен Лагранжа $\widehat{p}(x)$, построенный по этим неточным значениям, приближает $p(x)$ с погрешностью не более $\varepsilon \ln n$.*

Доказательство. Пусть известны величины $\widetilde{p}(x_i) = p(x_i) + h(x_i)$, где $|h(x_i)| \leqslant \varepsilon$. Интерполяционный многочлен имеет вид

$$\widehat{p}(x) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}(x_i) \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_{-j}}{x_{-i} - x_{-j}} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}(x_{-i}) \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_{-j}}{x_{-i} - x_{-j}}.$$

Поскольку $p(x)$ и $\widehat{p}(x)$ — многочлены степени $2n - 1$, справедливо неравенство

$$|p(x) - \widehat{p}(x)| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} h(x_i) \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_{-j}}{x_{-i} - x_{-j}} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} + \sum_{i=1}^{n} h(x_{-i}) \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_{-j}}{x_{-i} - x_{-j}} \right|.$$

Пусть $y_i = 2i - 1$, $y_{-i} = -y_i = 1 - 2i$. Тогда $x_i = a + by_i$. Пусть также $x = a + by$, где $-1 \leqslant y_{-1} \leqslant y \leqslant y_1$. Тогда

$$\begin{aligned}
&|p(x) - \widehat{p}(x)| \\
&\leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} h(x_i) \prod_{j=1}^{n} \frac{y + y_j}{y_i + y_j} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{y - y_j}{y_i - y_j} + \sum_{i=1}^{n} h(x_{-i}) \prod_{j=1}^{n} \frac{y - y_j}{-y_i - y_j} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{y + y_j}{-y_i + y_j} \right| \\
&\leqslant \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \frac{y + y_j}{y_i + y_j} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{y_j - y}{|y_j - y_i|} + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \frac{y_j - y}{y_i + y_j} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{y + y_j}{|y_i - y_j|} \right) \\
&= \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i + y}{2y_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{y_j^2 - y^2}{|y_j^2 - y_i^2|} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - y}{2y_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{y_j^2 - y^2}{|y_j^2 - y_i^2|} \right) \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{y_j^2 - y^2}{|y_j^2 - y_i^2|} \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{y_j^2}{|y_j^2 - y_i^2|} \\
&= \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{2j - 1}{|(2j - 1)^2 - (2i - 1)^2|}
\end{aligned}$$

$$= \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{(2n)!}{n!2^n(2i-1)!} \right)^2 \frac{1}{4^{n-1}} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{|j-i|(i+j-1)} \right)$$

$$= \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{(2n)!}{2^n n!(2i-1)} \right)^2 \frac{1}{4^{n-1}} \frac{1}{(i-1)!(n-i)!} \frac{(i-1)!(2i-1)}{(n+i-1)!} \right)$$

$$= 4\varepsilon \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n+i}{2i-1} \frac{\binom{2n}{n+i}}{4^n} \right) < 4\varepsilon \left(\binom{2n}{n} 4^n \right)^2 \sum \frac{n+i}{2i-1}$$

$$< \frac{4\varepsilon}{\pi n} \sum \frac{n+i}{2i-1} < \varepsilon \ln n.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть A — ограниченное подмножество действительной оси, $n \in \mathscr{Z}_+$. Пусть на A определена функция f такая, что для любых различных точек $x_0, \ldots, x_n \in A$ выполнено неравенство $|\Delta_n(f; x_0, \ldots, x_n)| \leqslant c_1 + c_2\varphi_n(x_0, \ldots, x_n)$, где c_1 и c_2 — положительные константы. Тогда f можно приблизить на A многочленом степени $n-1$ с погрешностью не более $c_2/2 + (2c_1(\sup A - \inf A)^n)/4^n$.*

Доказательство см. в [6].

Теорема 2. *Если $\tau(x) \succeq x \log x$, то*

$$\log \mathrm{Approx}\Sigma_{1,\tau}^N \asymp \frac{\log^2 N}{\tau^{-1}(\log N)}.$$

Доказательство. Нижняя оценка следует из того, что ε-различимые функции в классе $\Sigma_{1,\tau}$ при некотором выборе $\varepsilon \asymp 1/N$ дают 3-различимые дискретные аналоги в $\Sigma_{1,\tau}^N$ (см. доказательство теоремы 1).

Верхняя оценка. На множестве $\{0, 1, \ldots, kN\}$ рассмотрим функцию $\mathring{f}$. В силу леммы 2 ее можно приблизить многочленом p степени n с погрешностью не более

$$\delta_1 = 1/2 + N^{1-n} d_\tau(n)(kN/4)^n 2 = 1/2 + 2N(k/4)^n d_\tau(n).$$

Оценим $d_\tau(n) = \inf\limits_{R>0} e^{\tau(R)}/R^n \leqslant e^{\tau(k)}/k^n$. Тогда $\delta_1 = 1/2 + 2/4^n N e^{\tau(k)}$. Выберем $n = \lceil 1/2 \log(4Ne^{\tau(k)}) \rceil$; при этом $\delta_1 \leqslant 1$. Затем на $[0, kN]$ выберем систему точек $J = \{0, t, 2t, \ldots, rN\}$, где $t = N/r$.

Из неравенства $\delta \leqslant 1$ следует, что $|p(x) - p(x + lN)| \leqslant 2$, если x и $x + lN$ принадлежат J (здесь l — целое).

В силу леммы 1 для произвольных $x, x + lN \in [N, (k-1)N]$ справедлива оценка $|p(x) - p(x + lN)| \leqslant 16n^2$.

Пусть $\varphi_j = (1/m)\lfloor mp(N + jN/r) \rfloor$ (m — еще один параметр, $m \in \mathbb{N}$), где $j \in \{0, 1, \ldots, r(k-2)\}$.

По определению, φ_j приближает $p(N + jN/r)$ с погрешностью менее $1/m$. Снова по лемме 1 можно утверждать, что по значениям φ_j значения $p(x)$ при $N + 2n/rN \leqslant x \leqslant (k-1)N - 2n/rN$ восстанавливаются с погрешностью менее $8n^2/m$. Тем самым по значениям φ_j можно приближенно определить $\widehat{f}$ с общей погрешностью не более $1 + 8n^2/m$. Выберем $m = 17n^2$. Тогда эта погрешность не превосходит $3/2$.

Укажем схему задания для каждой f ее 1-приближения:

1) находим многочлен $p(x)$ наилучшего приближения;

2) вычислим набор приближенных дискретных приближений φ_j;

3) интерполяцией по этому набору восстановим некоторую функцию $\widetilde{p}(x)$, отличающуюся от $p(x)$ не более чем на $8n^2/m$;

4) округлим $\widetilde{p}$ до ближайших целых значений $\widehat{p}$.

Тогда

$$|f - \widehat{p}| \leqslant |f - p| + |p - \widetilde{p}| + |\widetilde{p} - \widehat{p}| < 1 + 1/2 + 1/2 = 2.$$

Так как f и $\widehat{p}$ — целочисленные функции, то $\widehat{p}$ — искомое 1-приближение. Для того чтобы $\widehat{p}$ было определено на целом периоде функции f, достаточно иметь $r \geqslant 4n/(k-3)$.

Оценим число возможных значений $\widehat{p}$. Оно не превышает числа наборов значений φ_j, $0 \leqslant j \leqslant r(k-2)$. Легко видеть, что значения φ_j кратны $1/m$ и лежат в $(-N, 2N)$, т. е. для каждого φ_j возможно не более $3mN$ значений. Кроме того, $|\varphi_j - \varphi_{j+r}| \leqslant 17n^2$, т. е., зная φ_j, для φ_{j+r} можно указать не более $35mn^2$ значений. Поэтому число наборов значений $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{r(k-3)}\}$ не превышает величины $(3mN)^r(35mn^2)^{r(k-3)+1}$. Следовательно,

$$\log \mathrm{Approx}\Sigma_{1,\tau}^N \leqslant r \log(3mN) + rk \log(35mn^2).$$

Имея $m = 17n^2$ и $n = \lceil (1/2)\log(4Ne^{\tau(k)}) \rceil$, выберем параметр $r = \lceil 4n/(k-3) \rceil$. Тогда

$$\begin{aligned}\log \mathrm{Approx}\Sigma_{1,\tau}^N &= O(n \log n + (n \log N)/k) \\ &= O(\log(Ne^{\tau(k)}) \log\log(Ne^{\tau(k)}) + (1/k)\log^2 N + (\tau(k)/k)\log N).\end{aligned}$$

Наконец, взяв $k = \lfloor \tau^{-1}(\log N) \rfloor$, получаем

$$\log \mathrm{Approx}\Sigma_{1,\tau}^N = O\left(\log N \log\log N + \frac{\log^2 N}{\tau^{-1}(\log N)}\right).$$

При $\tau^{-1}(\log N) \preceq \log N/\log\log N$ первое слагаемое по порядку не превосходит второго. Следовательно,

$$\log \mathrm{Approx}\Sigma_{1,\tau}^N = O(\log^2 N/\tau^{-1}(\log N)),$$

так как условие $\tau^{-1}(\log N) \preceq \log N/\log\log N$ равносильно $\tau(x) \succeq x \log x$. Теорема 2 доказана.

Замечание. Теорема 2 допускает усиление: вместо ограничения $\tau(x) \succeq x \log x$ можно взять $\tau(x) \succeq x$. Тем самым она включает все варианты от $\tau(x) \succeq x$ (класс тригонометрических функций) до $\tau(x) \asymp x^2$ (класс функций, аналитических в ограниченной области).

При этом доказательство нижней оценки $\log \mathrm{Approx}$ не изменится, а при доказательстве верхней оценки вместо леммы 1 надо использовать следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть значения многочлена $p(x)$ степени $2n-1$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_{-1}, x_{-2}, \ldots, x_{-n}$, где $x_i = a + (2i-1)b$, $x_{-i} = a - (2i-1)b$, известны с погрешностью не более ε_1 при $i < n^\alpha$ и ε_2 при $i \geqslant n^\alpha$, где $\alpha = \mathrm{const}$, $1/2 < \alpha \leqslant 1$. Тогда для любого $c > 0$ при $x_{-1} \leqslant x \leqslant x_1$ интерполяционный многочлен Лагранжа $\widehat{p}$, построенный по этим неточным значениям, приближает p с погрешностью, не превосходящей величины $O(\varepsilon_1 \ln n) + o(\varepsilon_2 n^{-c})$.*

Доказательство. Выкладки, аналогичные приведенным в лемме 1, дают для искомой погрешности верхнюю оценку

$$\varepsilon_1 4^{-2n+1}\binom{2n}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{2i-1}\binom{2n}{n+i} + \varepsilon_2 4^{-2n+1}\binom{2n}{n}\sum_{i\geqslant n^\alpha}\frac{n+i}{2i+1}\binom{2n}{n+i}.$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 4^{-2n+1}\binom{2n}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{2i-1}\binom{2n}{n+i} &< 4\varepsilon_1\left(4^{-n}\binom{2n}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{2i-1}\\ &< \frac{4\varepsilon_1}{\pi n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{2i-1} \leqslant O(\varepsilon_1 \ln n),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 4^{-2n+1}\binom{2n}{n}\sum_{i\geqslant n^\alpha}\frac{n+i}{2i+1}\binom{2n}{n+i} &< \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\pi n}}4^{-n+1}\frac{n+n^\alpha}{2n^\alpha}\sum_{i\geqslant n^\alpha}\binom{2n}{n+i}\\ &< \varepsilon_2 4^{-n+1}\sum_{i\geqslant n^\alpha}\binom{2n}{n+i} = o(\varepsilon_2 n^{-c}),\end{aligned}$$

где c — произвольная положительная константа. Лемма 3 доказана.

Идея доказательства усиленного варианта теоремы 2 при $x \preceq \tau(x) \preceq x \log x$ состоит в следующем. Пусть все параметры выбираются такими же, как и при $\tau(x) \succeq x \log x$. Изменим только схему задания 1-приближения функции f:

1) находим многочлен наилучшего приближения $p(x)$;

2) вычисляем набор приближенных дискретных значений φ_j: первые $3(kr)^\alpha$ — с точностью $1/m$, остальные — с точностью $35n^2$ (их,

собственно, можно и не вычислять, а брать предыдущие, так как $|\varphi_j - \varphi_{j+rp}| \leqslant 17n^2$ при $p \in \mathbb{Z}$);

3) интерполяцией по данному набору восстанавливаем некоторую функцию $\widetilde{p}$. По лемме 3 на отрезке $[x_{-1}, x_1]$ получаем

$$|p - \widetilde{p}| \leqslant O((1/m)\ln n) + o\left(n^{2+c}\right);$$

так как c — произвольное, то погрешность может быть записана как $|p - \widetilde{p}| \leqslant 1/2$;

4) округляем $\widetilde{p}$ до ближайших целых чисел.

При этом в оценке $\log \mathrm{Approx}\Sigma_{1,\tau}^N$ слагаемое $n \log n$ будет уменьшено до $n^\alpha \log n$, где $\alpha = \mathrm{const} < 1$. Следовательно, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \log \mathrm{Approx}\Sigma_{1,\tau}^N \leqslant O(\log^2 N/\tau^{-1}(\log N) + \log^2 N \log\log N) \\ = O(\log^2 N/\tau^{-1}(\log N)), \end{aligned}$$

что доказывает усиленный вариант теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ерохин В. Д.** Об асимптотике ε-энтропии аналитических функций // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 5. С. 949–952.
2. **Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.** ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 2. С. 3–86.
3. **Lorentz G. G.** Approximation of functions. New York; Chicago: Holt, Rinehart and Winston, 1966.
4. **Аманжаев Г. Г.** Дискретный аналог гладких функций // Алгебра, геометрия и дискретная математика в нелинейных задачах. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1991. С. 4–24.
5. **Аманжаев Г. Г.** Дискретные функции с заданным модулем непрерывности // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1992. № 5. С. 86–89.
6. **Аманжаев Г. Г.** О дискретных аналогах непрерывных функций из некоторых классов и сложность их схемной реализации: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1992.
7. **Аманжаев Г. Г.** О дискретных аналогах классов непрерывных функций различной гладкости // Докл. АН СССР. 1995. Т. 342, № 2. С. 154–159.

Адрес автора:

Россия,
119899 Москва,
Воробьевы горы,
МГУ, мех.-мат. факультет

Статья поступила
9 декабря 1995 г.