

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ, ПОВЫШАЮЩИХ НАДЕЖНОСТЬ ИХ ЧАСТЕЙ*)

В. Н. Носков

Предлагается метод преобразования любой части произвольной схемы из функциональных элементов в подсхему, в которой при появлении неисправностей из заданного класса возможно восстановление ее правильной работы с помощью фиксирования подходящих значений на некоторых входных полюсах. Эти значения определяются по результатам тестирования схемы. Строится тестовое множество. Приводятся оценки сложности преобразованной схемы и длины теста. Класс допустимых неисправностей весьма широк. Полный элементный базис произвольный.

§ 1. Формулировка основного результата

В [1] мы предложили метод преобразования любой части произвольной схемы из функциональных элементов в подсхему, для которой возможен тестовый контроль с хорошей локализацией возникающих в подсхеме неисправностей. В настоящей работе предлагается модификация этого метода для восстановления правильного функционирования неисправной схемы. Описано преобразование произвольной схемы S из функциональных элементов в схему S' . При этом преобразовании произвольно заданная часть B схемы превращается в схему C , а оставшаяся часть схемы S не изменяется. В схеме C выделяется некоторая часть, которая называется *граничной областью*. Схема S' имеет больше входов, чем схема S , и один дополнительный выход. Описывается класс допустимых неисправностей в S' . Задается подмножество \mathcal{T} множества входных наборов для схемы S' (это подмножество называется тестом \mathcal{T}). Схема S' обладает следующими свойствами.

Если S' исправна и зафиксированы нулевые значения на ее дополнительных входах, то на основных выходах схемы реализуются те же значения, что и на выходах исправной исходной схемы.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01634).

Множество неисправностей схемы может быть разбито на два класса так, что

— если на входы схемы подать наборы из \mathcal{T} , то по появляющимся значениям на выходах схемы S' можно выяснить, к какому из двух классов относятся возникшие в схеме S' неисправности;

— если в S' возникли неисправности первого класса, то, подавая наборы из \mathcal{T} на входы S' и наблюдая появляющиеся при этом значения на ее выходах, можно определить значения дополнительных переменных, фиксирование которых на дополнительных входах схемы S' приводит к тому, что подсхема C становится функционально эквивалентной исправной схеме B , несмотря на наличие в C неисправных элементов;

— если в S' возникли неисправности второго класса, то среди неисправных элементов в S' есть элементы из граничной области.

Из приведенного описания свойств схемы S' можно видеть, что восстановление правильной работы подсхемы C путем фиксирования подходящих значений на дополнительных входах не гарантируется лишь в случаях, когда в S' неисправны элементы граничной области. В то же время с помощью тестового контроля обеспечена возможность проверки исправности элементов граничной области. Эффективность предложенного метода существенно зависит от размеров граничной области, которые будут указаны при точной формулировке результатов. Если число внешних полюсов в подсхеме B составляет малую долю от числа ее элементов, то число элементов, принадлежащих граничной области, также мало по сравнению с числом элементов в B .

Предлагаемое преобразование схемы можно рассматривать как прием, позволяющий увеличить общее время правильной работы выделенной части схемы за счет поиска и активизации исправных элементов в избыточной схеме.

Основной результат этой работы сформулирован в виде теоремы (см. формулировку ниже в этом параграфе). В ней, в частности, указаны оценки сложности преобразованной схемы, длины теста и числа элементов граничной области.

Перейдем к описанию класса допустимых неисправностей схемы. Пусть схема S из функциональных элементов над произвольным конечным полным базисом $\mathcal{B} = \{\varphi_i\}$, $i = 1, \dots, s$, реализует систему q произвольных булевых функций от переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Обозначим через a_1, \dots, a_q выходы схемы S . Выделим в S произвольную совокупность функциональных элементов и обозначим ее через B . Множество остальных элементов из S обозначим через A . Обозначив схему S через $S(A, B, \tilde{x}_n)$, представим ее в виде соединения частей A и B так, как изображено на рис. 1 (здесь и ниже полагаем $\tilde{x}_t = (x_1, \dots, x_t)$).

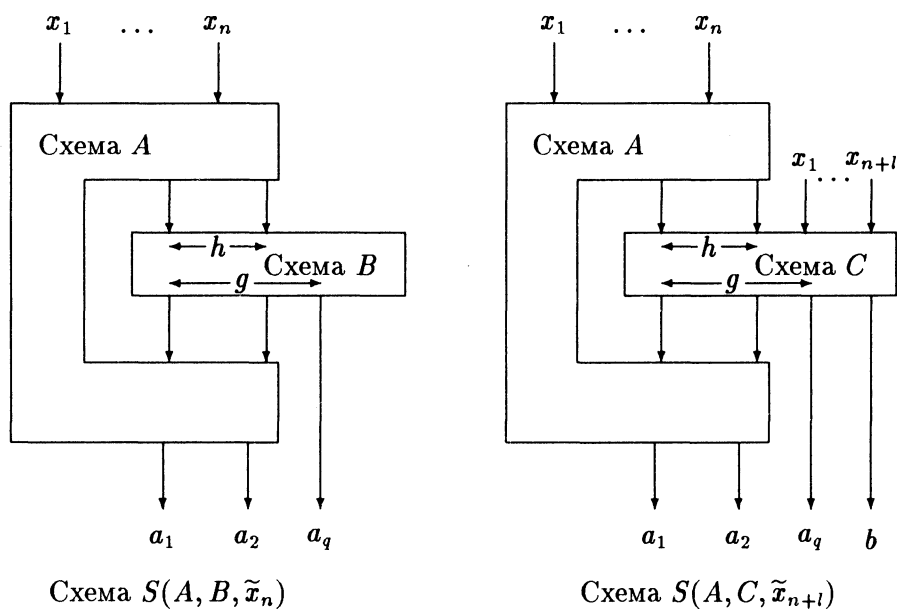


Рис. 1

Пусть схема B имеет h входов, g выходов, а C — некоторая схема из функциональных элементов с $h + n + l$ входами и $g + 1$ выходами. Заменяя в схеме $S(A, B, \tilde{x}_n)$ подсхему B на схему C так, как показано на рис. 1, получим новую схему $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$.

Обозначим через $S_a(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ и $S_a(A, B, \tilde{x}_n)$ вектор-функции, реализуемые на выходах a_1, \dots, a_q схем $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ и $S(A, B, \tilde{x}_n)$ соответственно. Обозначим через $S_b(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ функцию, реализуемую на выходе b схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$.

Определим допустимые неисправности в схеме $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$. Пусть β — произвольный элемент схемы C с t входами и одним выходом, а v_1, \dots, v_t — входные полюсы элемента β , на которые могут поступать сигналы 0 и 1. Считаем v_1, \dots, v_t булевыми переменными. В схеме C на выходе элемента β реализуется булева функция $\beta(v_1, \dots, v_t)$, а при появлении в C допустимых неисправностей элемент β может превратиться в элемент β^* , реализующий произвольную булеву функцию $\beta^*(v_1, \dots, v_t)$ от переменных v_1, \dots, v_t . Предполагаем, что в C одновременно могут быть неисправными не более m элементов.

Полагаем, что в подсхеме A схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ могут появляться произвольные неисправности, при которых схема A превращается в схему A^* , которая имеет те же входные и выходные полюсы, что и схема A , и при этом вся схема остается схемой из функциональных элементов.

Описанные неисправности схем A и C будем называть *допустимыми*.

Введем следующие обозначения:

A^* и C^* — схемы, в которые превращаются схемы A и C при появлении в них допустимых неисправностей;

$S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ — схема, в которую переходит схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$, когда ее подсхемы A и C превращаются в схемы A^* и C^* ;

$\mu(B) = \max \mu(\beta)$, где $\mu(\beta)$ — число элементов схемы B , у которых хотя бы один вход соединен с выходом элемента β из B , а максимум берется по всем элементам β из B ;

h — число входов в подсхеме B ;

g — число выходов в подсхеме B ;

если D — произвольная схема, то $L(D)$ — ее сложность, т. е. число элементов в D ;

$r = \max r(i)$, где $r(i)$ — число входов базисного элемента φ_i , а максимум берется по всем элементам базиса;

\log — логарифм по основанию 2.

Теорема. Пусть $S(A, B, \tilde{x}_n)$ — схема из функциональных элементов в конечном базисе, реализующая систему булевых функций от переменных x_1, \dots, x_n ; k — некоторое число, зависящее от базиса; m, r, l — параметры такие, что $2m+1 < n$, $r < n$, $l = \lceil 4 \log m + \log \mu(B) + \log \log L(B) + k \rceil$. Тогда существуют множество \mathcal{T} , $\mathcal{T} \subseteq \{0, 1\}^{n+l}$, мощности, не превосходящей $km^3 \mu(B) \log L(B) + 2^{2m+1}$, и такая схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ с выделенной в C граничной областью \mathcal{M} , что справедливы следующие утверждения:

(a) $L(C) < k\mu(B)m^4 L(B)$, $L(\mathcal{M}) < km(h+g)$.

(b) $S_a(A, B, \tilde{x}_n) \equiv S_a(A, C, \tilde{x}_n, \underbrace{0, \dots, 0}_l)$.

(c) Если $S_b(A^*, C^*, \tilde{\alpha}_{n+l}) = S_b(A, C, \tilde{\alpha}_{n+l})$ при фиксированных схемах A^* , C^* и каждом $\tilde{\alpha}_{n+l} \in \mathcal{T}$, то $S_a(A', B, \tilde{x}_n) \equiv S_a(A', C^*, \tilde{x}_n, \underbrace{0, \dots, 0}_l)$.

Здесь и ниже (см. (d.2)) A' — произвольная схема, в которую может превратиться схема A при появлении в ней допустимых неисправностей.

(d) Множество неисправностей схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ можно разбить на два класса так, что

(d.1) если при некотором $\tilde{\alpha}_{n+l} \in \mathcal{T}$ справедливо $S_b(A^*, C^*, \tilde{\alpha}_{n+l}) \neq S_b(A, C, \tilde{\alpha}_{n+l})$, то в C^* есть неисправные элементы, причем если на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ последовательно подать наборы из \mathcal{T} , то по значениям, появившимся на выходах этой схемы, можно выяснить, к какому из двух классов принадлежат появившиеся в схеме неисправности;

(d.2) если в схеме $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+1})$ возникли неисправности первого класса, то, последовательно подав наборы из \mathcal{T} на входы этой схемы, по появившимся значениям на выходах схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+1})$ можно указать набор e_1, \dots, e_l из нулей и единиц такой, что $S_a(A', C^*, \tilde{x}_n, e_1, \dots, e_l) \equiv S_a(A', B, \tilde{x}_n)$;

(d.3) если в $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+1})$ возникли неисправности второго класса, то в C^* есть неисправные элементы из граничной области \mathcal{M} .

Доказательство теоремы конструктивно. Во-первых, указывается последовательность преобразований, которые превращают схему $S(A, B, \tilde{x}_n)$ в схему $S(A, C, \tilde{x}_{n+1})$, обладающую свойствами, указанными в формулировке теоремы. Во-вторых, приводится алгоритм для выяснения того, к какому из двух классов принадлежат возникшие в $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+1})$ неисправности.

Преобразования начинаются с дублирования некоторых элементов в подсхеме B : один элемент заменяется несколькими его копиями. Одновременно к схеме добавляются дополнительные входы и несколько экземпляров специальной подсхемы-коммутатора Ω . Управляя работой коммутаторов с дополнительных входов, из нескольких копий элемента можно выбрать исправную и «включить» ее в активную работу схемы, «отключив» при этом другие копии элемента. После указанных преобразований схема B обозначается через B' . Далее, на линиях между внутренними полюсами в схеме B' добавляется по два экземпляра специальной подсхемы K , также играющей роль коммутатора, работающего в двух режимах. При работе в первом режиме коммутаторы проводят без изменения сигналы от некоторых своих входов к выходам. Этот режим работы коммутаторов используется при функционировании схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+1})$, когда на ее основных выходах реализуется система функций, которую должна реализовать схема $S(A, B, \tilde{x}_n)$. Работая во втором режиме, коммутаторы позволяют передать значения с входных полюсов схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+1})$ на входы некоторых ее элементов. Этот режим работы коммутаторов используется при диагностике неисправностей схемы. Он позволяет добиться на выходах элементов схемы слабой зависимости значений друг от друга, что обеспечивает должный уровень локализации неисправностей в контролируемой схеме.

Переключение режимов работы коммутаторов осуществляется подачей подходящих значений с дополнительных входов схемы на входы коммутаторов.

После введения в схему B коммутаторов полученная схема обозначается через B_2 и подвергается следующему преобразованию. К B_2 добавляется подсхема B_3 , которая вместе с B_2 образует схему C . Схема B_3 при тестовых испытаниях перерабатывает информацию, поступающую

на ее входы с некоторых внутренних полюсов схемы B_2 , в список номеров тех элементов схемы, в «окрестностях» которых есть неисправные элементы.

Условимся, что через c_1, c_2, \dots будут обозначаться константы, зависящие только от базиса.

§ 2. m -преобразование схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$

При m -преобразовании схема $S(A, B, \tilde{x}_n)$ превращается в схему $S(A, B', \tilde{x}_{n+p})$, т. е. подсхема A не изменяется, а подсхема B преобразуется в подсхему B' . Последняя состоит из базисных функциональных элементов и схем Ω .

СХЕМА Ω . Эта схема имеет $m + p + 1$ входов и один выход. Положим $p = \lceil \log(m+1) \rceil$, $\mu(\sigma_1, \dots, \sigma_p) = 1 + \sum_{i=1}^p \sigma_i 2^{p-i}$. Пусть на входы с номерами $1, \dots, m+1$ схемы Ω подаются значения переменных z_1, \dots, z_{m+1} , а на входы с номерами $m+2, \dots, m+p+1$ — значения y_1, \dots, y_{p+1} . Тогда на выходе схемы Ω реализуется функция

$$\Omega(z_1, \dots, z_{m+1}, y_1, \dots, y_p) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_p)} z_{\mu(\sigma_1, \dots, \sigma_p)} y_1^{\sigma_1} \cdots y_p^{\sigma_p}, \quad (1)$$

где дизъюнкция берется по всем наборам $(\sigma_1 \dots \sigma_p)$ таким, что $\mu(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \{1, \dots, m+1\}$, а

$$y^\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } y = \sigma; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, если $(\sigma_1 \dots \sigma_p)$ есть двоичное представление числа $t-1$, то $\Omega(z_1, \dots, z_{m+1}, \sigma_1, \dots, \sigma_p) = z_t$.

Функцию, определенную равенством (1), можно реализовать в базисе $\{\wedge, \vee, -\}$ схемой сложности не более $c_1 m$. Действительно, согласно [2] систему всех конъюнкций $y_1^{\sigma_1} \cdots y_p^{\sigma_p}$ можно реализовать схемой (многополюсником) сложности $2^p + p - 4$. Взяв этот многополюсник, $m+1$ элементов \wedge и m элементов \vee , согласно (1) получаем схему Ω , реализующую функцию $\Omega(z_1, \dots, z_{m+1}, y_1, \dots, y_p)$ такую, что $L(\Omega) \leq c_2 m$. Отсюда следует, что в произвольном базисе можно построить такую схему Ω , что

$$L(\Omega) \leq c_3 m. \quad (2)$$

Пусть β — элемент схемы Ω и $\mu_\Omega(\beta)$ — число элементов α из Ω таких, что хотя бы один вход элемента α соединен с выходом элемента β . Положим $\mu(\Omega) = \max \mu_\Omega(\beta)$, где максимум берется по всем элементам β из Ω . Потребуем, чтобы для схемы Ω выполнялось неравенство

$$\mu(\Omega) \leq 2. \quad (3)$$

Если для схемы Ω выполнено (2), но не выполнено (3), то схему Ω преобразуем следующим образом.

Расширим базис, добавив к элементам базиса элемент E .

ЭЛЕМЕНТ E . Этот элемент имеет один вход и один выход. Если на вход элемента E подается произвольное значение z , $z \in \{0, 1\}$, то на выходе элемента E реализуется значение z .

Предположим, что к выходу элемента β из Ω присоединены входы k элементов $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, где $k > 2$. Пусть фрагмент 1 на рис. 2 представляет собой подсхему из Ω , составленную из β и присоединенных элементов. Выполним преобразование, превращающее схему, представленную фрагментом 1, в схему, представленную фрагментом 2. Подобные преобразования выполним для всех β в Ω таких, что $\mu_\Omega(\beta) > 2$. Получим схему Ω , построенную из элементов расширенного базиса, для которой выполнено неравенство (3).

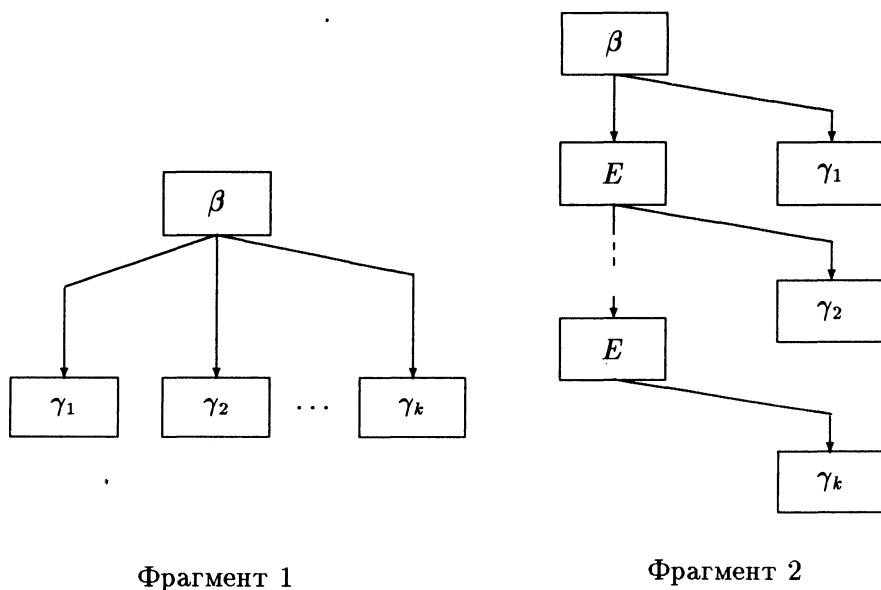


Рис. 2

В схеме Ω до ввода в нее элементов E содержалось не более $c_3 t$ базисных элементов (см. неравенство (2)). Суммарное число входов этих элементов не превосходит $rc_3 t$, где r определено перед теоремой. Из описанного преобразования схемы Ω непосредственно следует, что число элементов E , добавленных к схеме, не превышает суммарного числа входов элементов исходной схемы Ω . Поэтому число элементов E , добавленных к схеме Ω при указанном преобразовании, не превышает $rc_3 t$.

Отсюда и из (2) следует, что для преобразованной схемы Ω выполняется неравенство

$$L(\Omega) \leq c_4 m. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При построении схемы Ω использованы элементы расширенного базиса: к имеющимся в исходном базисе элементам добавлен элемент E . Ниже (в § 3) все схемы Ω будут подвергнуты так называемому второму преобразованию, при котором на линиях между любыми двумя элементами из схемы Ω появятся одновыходовые подсхемы K , выход каждой из которых будет присоединен к входу лишь одного элемента в схеме. После этого преобразования каждый элемент E из схемы Ω следует отождествить с выходным полюсом той схемы K , к выходу которой присоединен вход элемента E . При таком отождествлении величина $\mu(\Omega)$ не меняется. После этого можно будет считать, что преобразованные схемы Ω (ниже они будут названы схемами $\hat{\Omega}$) реализованы не в расширенном, а в исходном базисе, так как в результате всех преобразований получится схема, состоящая только из элементов исходного базиса.

Пусть схема $S(A, B, \tilde{x}_n)$ состоит из N элементов. Занумеруем их числами $1, \dots, N$ в произвольном порядке.

КРАЙНИЕ И ВНУТРЕННИЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ПОДСХЕМЕ B . Элемент β подсхемы B называется *крайним в B* , если к его выходу присоединен либо вход какого-либо элемента подсхемы A , либо выходной полюс схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$. Остальные элементы из B называются *внутренними в B* .

ЯРУСЫ В $S(A, B, \tilde{x}_n)$. Это понятие определим индуктивно. К первому ярусу отнесем все элементы схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$, входы которых присоединены только к входным полюсам.

Пусть в $S(A, B, \tilde{x}_n)$ определены i первых ярусов. Каждый элемент схемы, который не попал ни в один из i первых ярусов, а все его входы присоединены к выходам элементов из ярусов с номерами $1, \dots, i$ или к входным полюсам, относится к $(i + 1)$ -му ярусу. Процесс образования ярусов продолжается до включения каждого элемента из A в соответствующий ярус.

Схема $S(A, B', \tilde{x}_{n+p})$ строится последовательно по шагам. Она имеет $n + p$ входных полюсов x_1, \dots, x_{n+p} (полюсы обозначаются так же, как и переменные, значения которых подаются на эти полюсы). На очередном шаге к части схемы, построенной на предыдущих шагах, присоединяются некоторые базисные элементы и схемы Ω так, как описано ниже.

Каждый шаг состоит в том, что, выбрав элемент β в B , из базисных элементов и схем Ω мы образуем некоторый фрагмент схемы и присоединяем его к ранее построенной части схемы. Состав добавляемого к схеме

фрагмента и способ его присоединения к ранее построенной части определяются тем, какую функцию реализует β , и тем, как этот элемент присоединен к элементам в $S(A, B, \tilde{x}_n)$. Шаг построения фрагмента схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$, начинающийся выбором элемента β , называется β -шагом.

В схеме $S(A, B', \tilde{x}_{n+p})$ всем элементам приписаны метки, являющиеся одно-, двух- или трехразрядными векторами.

Опишем β -шаги. Пусть β — элемент первого яруса в $S(A, B, \tilde{x}_n)$ и j — номер этого элемента. Рассмотрим два варианта.

(а.1) β либо принадлежит подсхеме A , либо является крайним элементом в B . Возьмем копию элемента β . Выбранной копии присвоим метку $(j.*)$. Если i -й вход элемента β в $S(A, B, \tilde{x}_n)$ присоединен к полюсу x_s , то i -й вход копии присоединяется к полюсу x_s .

(а.2) β является внутренним элементом в B . Возьмем $m + 1$ копий элемента β . Присвоим им метки $(j.1), (j.2), \dots, (j.(m + 1))$. Входы каждой копии присоединим к входным полюсам так же, как присоединены в $S(A, B, \tilde{x}_n)$ соответствующие входы элемента β .

Сделав соответствующие β -шаги для всех элементов первого яруса, получим часть схемы $S(A, B', \tilde{x}_{n+p})$. Далее делаем β -шаги, выбирая β во втором, в третьем ярусах и т. д.

Предположим, что сделаны β -шаги для всех β из i первых ярусов схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$. Пусть β — элемент из $(i + 1)$ -го яруса схемы и j — номер элемента β . Опишем β -шаг для такого β . Будем различать три случая.

(b.1) β находится в подсхеме A . Возьмем копию элемента β , присвоим ей метку $(j.*)$ и входы этой копии присоединим к уже построенной части схемы следующим образом:

— если вход с номером l элемента β присоединен к полюсу x_s , то l -й вход элемента с меткой $(j.*)$ присоединяется к полюсу x_s ;

— если l -й вход элемента β присоединен к выходу элемента γ с номером k , а γ является либо крайним в B , либо принадлежит A , то в строящейся схеме l -й вход элемента с меткой $(j.*)$ присоединяется к выходу элемента с меткой $(k.*)$.

Описанную процедуру повторим для каждого входа рассматриваемой копии элемента β .

Приведем пример преобразования, соответствующего β -шагу для рассмотренного случая (рис. 3).

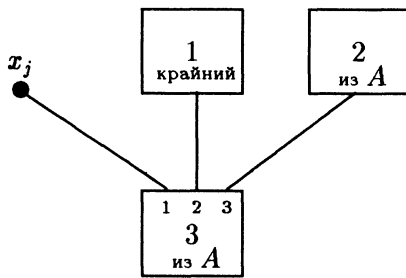
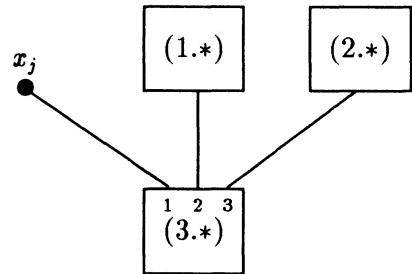
Фрагмент схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$ Фрагмент схемы $S(A, B', \tilde{x}_{n+p})$

Рис. 3

На фрагменте схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$ трехходовый элемент β имеет номер 3, его входы присоединены к крайнему в B элементу с номером 1, к полюсу x_j и к выходу элемента из A с номером 2. На фрагменте схемы $S(A, B', \tilde{x}_{n+p})$ элемент с меткой $(3.*)$ является копией элемента с номером 3.

(b.2) β является внутренним элементом в B . Возьмем $m + 1$ копий элемента β , присвоим им метки $(j.1), (j.2), \dots, (j.(m + 1))$. Входы копий присоединим к элементам схемы следующим образом:

- если l -й вход элемента β присоединен в $S(A, B, \tilde{x}_n)$ к полюсу x_s , то l -й вход каждой копии присоединяется в $S(A, B', \tilde{x}_{n+p})$ к полюсу x_s ;
- если l -й вход элемента β присоединен в $S(A, B, \tilde{x}_n)$ к элементу из A с номером k или к крайнему в B , то l -й вход каждой копии присоединяется к выходу элемента с меткой $(k.*)$;
- если l -й вход элемента β присоединен к выходу внутреннего элемента в B с номером k , то l -й вход копии элемента β с меткой $(j.t)$ ($t = 1, \dots, m + 1$) присоединяется к выходу элемента с меткой $(k.t)$.

Описанные процедуры повторяются для всех входов каждой копии элемента β .

Приведем пример преобразования, соответствующего β -шагу для случая, когда β — внутренний элемент в B (рис. 4). Здесь β — элемент с номером 4.

(b.3) β является крайним элементом в B . Возьмем копию элемента β и присвоим ей метку $(j.*)$. Пусть входы с номерами l_1, l_2, \dots, l_s элемента β присоединены к выходам внутренних элементов в B с номерами k_1, k_2, \dots, k_s , а остальные входы элемента β присоединены не к внутренним элементам в B . Возьмем s копий схемы Ω и присвоим им метки $(j.*.l_1)$,

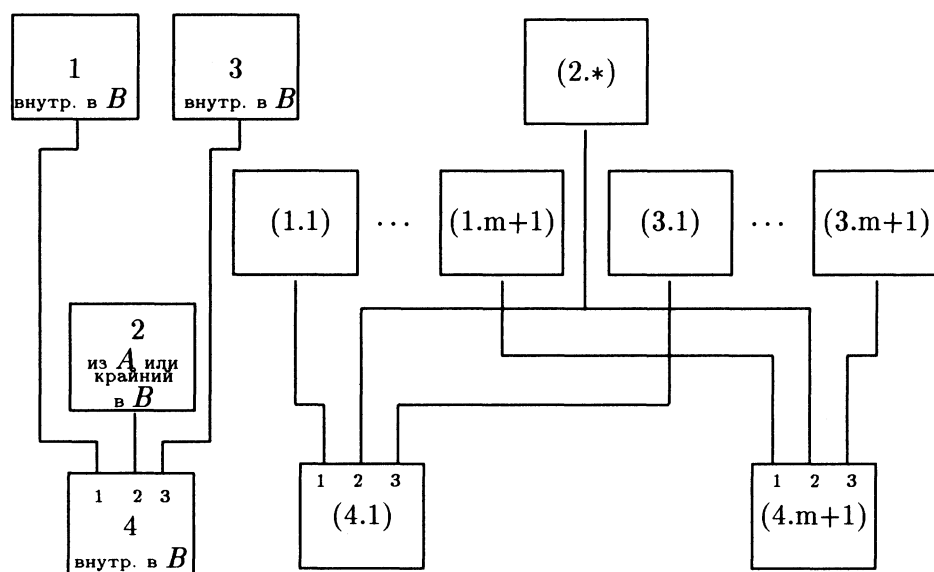
Фрагмент схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$ Фрагмент схемы $S(A, B', \tilde{x}_{n+p})$

Рис. 4

$(j.*l_2), \dots, (j.*l_s)$. Входы с номерами l_1, l_2, \dots, l_s элемента с меткой $(j.*)$ присоединим соответственно к выходам элементов с метками $(j.*l_1), (j.*l_2), \dots, (j.*l_s)$.

Входы схем Ω с метками $(j.*l_1), (j.*l_2), \dots, (j.*l_s)$ подключим следующим образом. Пусть k — номер элемента, к которому присоединен l_i -й вход элемента β . Тогда $1, 2, \dots, (m+1)$ -й входы схемы Ω с меткой $(j.*l_i)$ присоединим соответственно к выходам элементов с метками $(k.1), \dots, (k.(m+1))$.

Остальные входы рассматриваемой копии элемента β подключим следующим образом:

- если вход с номером l элемента β присоединен к полюсу x_s , то l -й вход элемента с меткой $(j.*)$ присоединяется к полюсу x_s ;
- если l -й вход элемента β присоединен к выходу элемента γ с номером k , а γ либо является крайним в B , либо принадлежит A , то

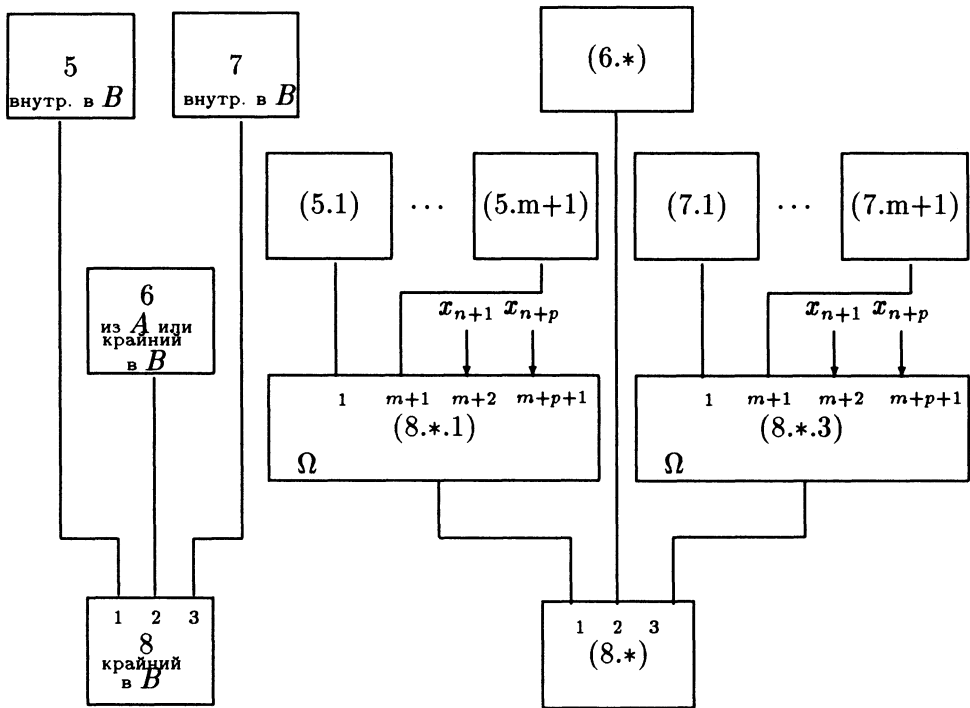
Фрагмент схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$ Фрагмент схемы $S(A, B', \tilde{x}_{n+p})$

Рис. 5

в строящейся схеме l -й вход элемента с меткой $(j.*)$ присоединяется к выходу элемента с меткой $(k.*)$.

Всем базисным элементам, находящимся в схемах Ω , присваиваются одноразрядные метки (ω) .

Приведем пример преобразования, соответствующего β -шагу в случае, когда β — крайний элемент в B с номером 8 (рис. 5).

На каждом β -шаге с элементом β сопоставляется либо одна, либо $m+1$ копий элемента β , которые присоединяются к строящейся схеме. Будем говорить, что элемент γ из $S(A, B', \tilde{x}_{n+p})$ является копией элемента β из $S(A, B, \tilde{x}_n)$, если γ — элемент, который подключается при построении схемы $S(A, B', \tilde{x}_{n+p})$ на β -шаге.

Схема $S(A, B', \tilde{x}_{n+p})$ изображена на рис. 6.

Сложность схемы B' . Пусть $L(B)$ — сложность схемы B . Схема B' состоит из одной копии каждого крайнего элемента из B , $m+1$ копий

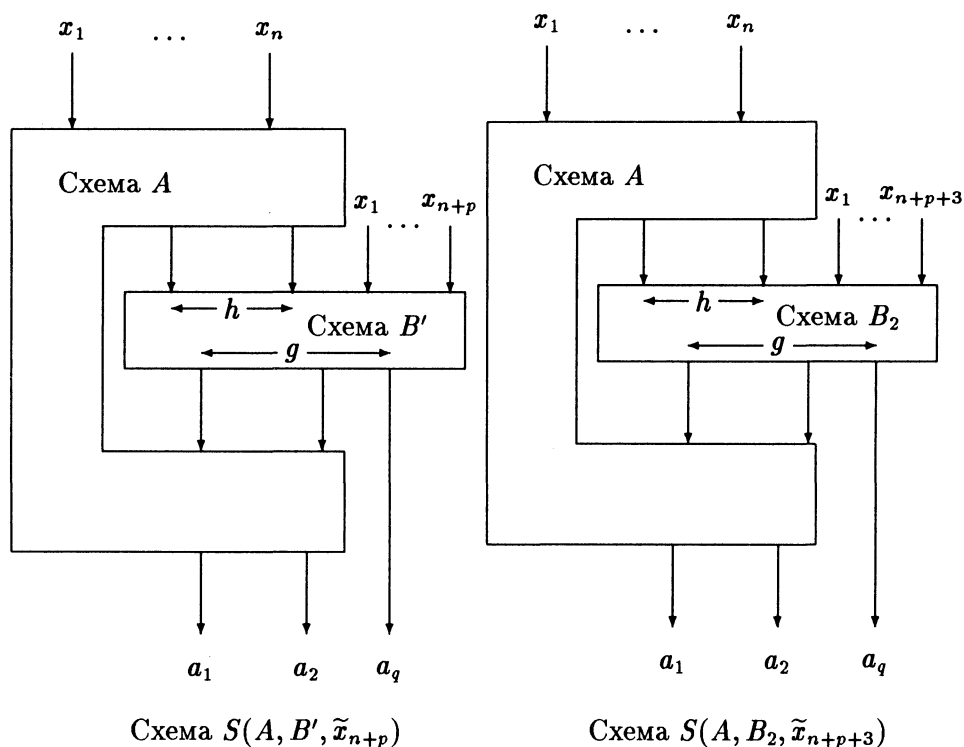


Рис. 6

каждого внутреннего элемента из B и из схем Ω . Пусть z — число схем Ω , входящих в B' . Из построения схемы B' следует неравенство $z \leq \sum_i r(i)$ (здесь $r(i)$ — число входов крайнего элемента в B с номером i , а суммирование ведется по всем номерам крайних элементов в B). Ясно, что $z \leq rL(B)$. Отсюда и из (4) следует, что

$$L(B') \leq c_5 m L(B). \quad (5)$$

§ 3. Схема $S(A, B_2, \tilde{x}_{n+p+3})$

Эта схема получается двумя последовательными преобразованиями схемы $S(A, B', \tilde{x}_{n+p})$. Входы и выходы схемы B' принадлежат множествам входов и выходов схемы B_2 .

ПЕРВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ. Опишем подсхемы Q и D схемы R (рис. 7).

СХЕМА Q . Если на первый, второй и третий входы схемы Q подаются значения k, v и w , то на ее выходе реализуется функция $\bar{k}v \vee kw$.

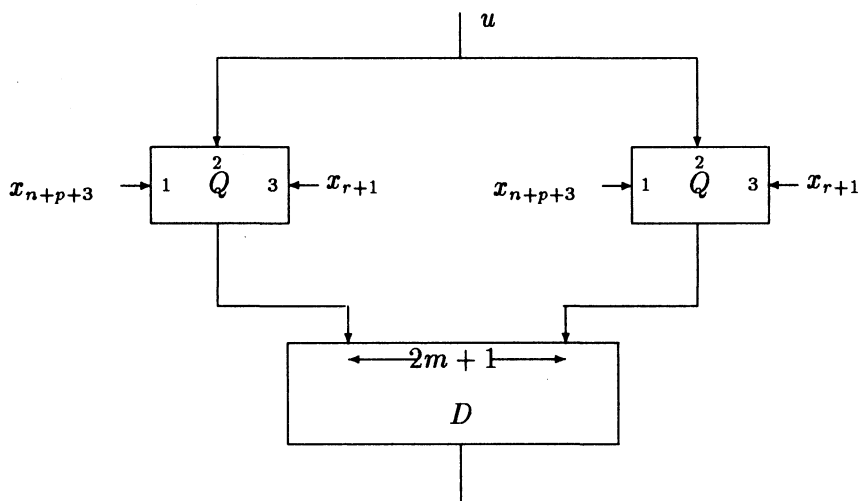
Схема R

Рис. 7

СХЕМА D осуществляет отображение $(a_1, \dots, a_{2m+1}) \rightarrow b(a_1, \dots, a_{2m+1})$, где

$$b(a_1, \dots, a_{2m+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^{2m+1} a_i > m; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6)$$

Ясно, что если схема D исправна, а в R содержится не более m неисправных схем Q , то R — самокорректирующаяся схема.

Функция, заданная соотношением (6), является симметрической булевой функцией от $2m+1$ переменных. Известно ([2], с. 369), что ее можно реализовать в базисе $\{\wedge, \vee, \neg\}$ схемой сложности не более $c_6 m$.

Пусть β — элемент схемы D и $\mu_D(\beta)$ — число элементов α в схеме D таких, что хотя бы один вход элемента α соединен с выходом элемента β . Положим $\mu(D) = \max \mu_D(\beta)$, где максимум берется по всем β из D . Потребуем, чтобы для схемы D было выполнено неравенство

$$\mu(D) \leq 2. \quad (7)$$

С помощью приема, примененного при описании схемы Ω , легко убедиться, что в произвольном базисе с добавленным элементом E можно построить схему D сложности $L(D)$, для которой справедливы неравенство (7) и неравенство

$$L(D) \leq c_7 m. \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ниже будет описано так называемое второе преобразование схемы, в котором на линиях между элементами схемы D будут

добавлены подсхемы K . После этого преобразования каждый элемент E из схемы D следует отождествить с выходным полюсом той схемы K , к выходу которой присоединен вход элемента E . При таком отождествлении величина $\mu(D)$ не меняется. После этого получится, что преобразованные схемы D реализованы не в расширенном, а в исходном базисе.

Пусть w_{i_1}, \dots, w_{i_s} — полюсы схемы A , не являющиеся входными полюсами схемы $S(A, B', \tilde{x}_{n+p})$, и пусть к полюсам w_{i_1}, \dots, w_{i_s} схемы $S(A, B', \tilde{x}_{n+p})$ подключены входные полюсы схемы B' . Выполним следующие преобразования. Вход схемы B' , подключенный к полюсу w_{i_1} , переключим на выход схемы R , а к полюсу w_{i_1} подключим вход схемы R . Аналогичные переключения выполним для полюсов w_{i_2}, \dots, w_{i_s} , используя каждый раз новый экземпляр схемы R . В результате между полюсами w_{i_1}, \dots, w_{i_s} и входными полюсами схемы B' появятся s одинаковых схем R .

Метки в D . Всем базисным элементам из D присвоим одноразрядные метки (ψ).

На этом первое преобразование схемы $S(A, B', \tilde{x}_{n+p})$ заканчивается. Схему, в которую превратилась схема B' после первого преобразования, обозначим через B_1 . Таким образом, B_1 есть соединение схемы B' и s схем R .

ВТОРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ связано с добавлением схем K на линии, соединяющие некоторые пары элементов в схеме B_1 . Схема K имеет три входа и один выход. Если на первый, второй и третий входы схемы K подаются значения k, v и w , то на выходе схемы K реализуется функция $\bar{k}v \vee kw$. Опишем операции, соответствующие второму преобразованию (рис. 8).

Рассмотрим фрагмент 1 на рис. 8. Пусть элемент T является базисным элементом в схеме B_1 , находящимся вне схем Q . Предположим, что его j -й вход присоединен либо к выходу элемента H , являющегося элементом схемы B_1 , либо к входному полюсу.

Пусть H — либо базисный элемент, находящийся вне схем Q , либо входной полюс x_i , $i \neq r+1$, $i \in \{1, \dots, n+p\}$. Тогда на линию между H и T подключаются два элемента K . Входы этих элементов присоединяются к элементам схемы и входным полюсам так, как показано на фрагменте 2.

Пусть H является либо схемой Q , либо входным полюсом x_{r+1} . Тогда на линии между H и T подключается один элемент K . Его входы присоединяются к элементам схемы и входным полюсам так, как показано на фрагменте 3.

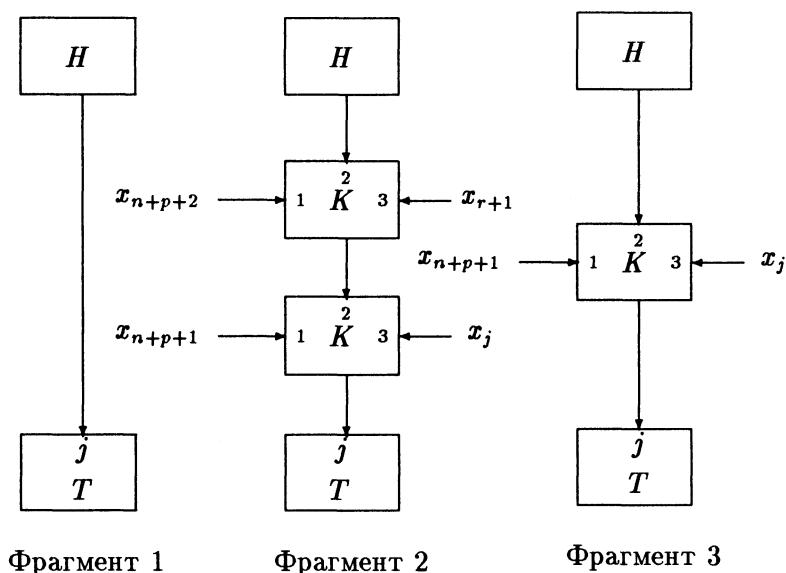


Рис. 8

Присоединение схем K проводится для всех пар элементов H , T и всех входов элементов T .

Гирлянды в B_2 . Пусть к j -му входу элемента β в подсхеме B_2 присоединен выход схемы K , а к входу последней присоединен выход еще одной схемы K . Такие схемы K образуют гирлянду, подвешенную к j -му входу элемента β . Если к j -му входу элемента β присоединен выход схемы K , а к входу последней присоединен элемент, не являющийся схемой K , то упомянутая схема K тоже называется *гирляндой*, подвешенной к j -му входу элемента β .

На рис. 8 изображены гирлянды из одной и двух схем K . Вход с номером 2 верхней схемы K , изображенной на фрагменте 2, называется *входом гирлянды*. Для гирлянды, состоящей из одной схемы K , *входом* называется второй вход этой схемы K .

Метки в B_2 . Будем считать, что все элементы схемы B_2 , находящиеся вне схем Q и K , получают те же метки, которыми были помечены соответствующие элементы в схеме B' .

Схемы \hat{R} . Пусть R' — одна из схем R в B' . Обозначим через \hat{R}' подсхему в B_2 , состоящую из элементов схемы R' , помеченных метками (ψ) , и из схем K , входящих в гирлянды, подвешенные к входам элементов из R' с метками (ψ) .

Пусть u — выходной полюс схемы A , к которому присоединены входы подсхем Q из \hat{R} . Тогда полюс u называется *входом* схемы \hat{R} .

Схемы $\hat{\Omega}$. Пусть Ω' — одна из схем Ω в B' . Обозначим через $\hat{\Omega}'$ подсхему в B_2 , состоящую из базисных элементов в Ω' с метками (ω) и из схем K , входящих в гирлянды, подвешенные к входам элементов из Ω' с метками (ω) . В схеме $\hat{\Omega}'$ содержится $m + p + 1$ гирлянд, входы которых присоединены к элементам с двухразрядными метками или к полюсам x_{n+1}, \dots, x_{n+p} . Входы таких гирлянд будем считать входами рассматриваемой схемы $\hat{\Omega}'$. Таким образом, схема $\hat{\Omega}'$ имеет $m + p + 1$ входов.

Некоторым схемам K присвоим метки. Если некоторая гирлянда подвешена к входу элемента с двухразрядной меткой, второй разряд которой равен j (j — любое число из $\{1, \dots, m + 1\}$), то схемы K этой гирлянды получают одноразрядные метки (j) . Не получают меток схемы K , входящие в гирлянды, которые подвешены к входам элементов с метками (ω) , (ψ) или к входам крайних элементов в B_2 .

Обозначим через $S(A, B_2, \tilde{x}_{n+p+3})$ схему, в которую превращается $S(A, B, \tilde{x}_{n+p})$ в результате описанных преобразований. Соединение подсхем A и B_2 в схеме $S(A, B_2, \tilde{x}_{n+p+3})$ изображено на рис. 6.

Крайние элементы в B_2 . Элемент β подсхемы B_2 схемы $S(A, B_2, \tilde{x}_{n+p})$ называется *крайним* в B_2 , если его выход присоединен либо к входу элемента из A , либо к выходному полюсу схемы $S(A, B_2, \tilde{x}_{n+p+3})$.

Граничные элементы в B_2 . Элемент β схемы B_2 называется *граничным* в B_2 , если выполнено одно из следующих условий:

- β является крайним элементом в B_2 ;
- β имеет метку (ω) или (ψ) ;
- β является схемой K без метки.

Оценим число граничных элементов. Во-первых, число крайних элементов равно g , т. е. числу выходных полюсов схемы B . Во-вторых, поскольку число схем Ω не превышает gr , а сложность каждой из них не больше $c_4 m$ (см. (4)), то число элементов с меткой (ω) не превышает $c_4 grm$. В-третьих, число элементов с меткой (ψ) не больше сложности схемы D , умноженной на h (здесь h — число входных полюсов в схеме B). Элементы с метками (ψ) — это элементы, из которых состоят подсхемы D . Отсюда и из (8) получаем, что число элементов с меткой (ψ) не больше $c_7 hm$. В-четвертых, число схем K без меток не превосходит $r(c_4 rmg + c_7 hm + g)$, так как это схемы, которые входят в гирлянды, подвешенные к входам либо крайних элементов в B_2 , либо к входам элементов с метками (ω) или (ψ) . Отсюда следует

$$\Gamma \leq c_8 m(g + h), \quad (9)$$

где Γ — число граничных элементов в B_2 .

Сложность схемы B_2 . Число неограниченных элементов в B_2 , очевидно, не превышает $c_9 m L(B)$. Отсюда и из (9) следует, что

$$L(B_2) \leq c_{10} m L(B). \quad (10)$$

§ 4. Свойства схемы $S(A, B_2, \tilde{x}_{n+p+3})$

Будем считать, что классы допустимых неисправностей для схем $S(A, B_2, \tilde{x}_{n+p+3})$ и $S(A, C, \tilde{x}_{n+1})$ совпадают, т. е. в B_2 могут возникать неисправности не более чем в m элементах одновременно, а в A допустимы неисправности, не выводящие неисправную схему $S(A, B_2, \tilde{x}_{n+p+3})$ из класса комбинационных схем. В схемах сохраняются входные и выходные полюсы. Обозначим через A^* и B_2^* произвольные схемы, в которые могут превратиться схемы A и B_2 при появлении в них допустимых неисправностей. Пусть $S(A^*, B_2^*, \tilde{x}_{n+p+3})$ — схема с подсхемами A^* и B_2^* .

Обозначим через \mathcal{M}_j , $j \in \{1, \dots, m+1\}$, множество элементов из $S(A^*, B_2^*, \tilde{x}_{n+p+3})$ с двухразрядными метками, у которых второй разряд равен j . Пусть \mathcal{M}'_j , $1 \leq j \leq m+1$, — множество элементов из $S(A^*, B_2^*, \tilde{x}_{n+p+3})$ с метками (j) . Положим $\mathcal{M}(j) = \mathcal{M}_j \cup \mathcal{M}'_j$.

Пусть u — узел схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$, к которой присоединен вход какого-либо элемента из B , причем u является либо входным полюсом в $S(A, B, \tilde{x}_n)$, либо выходом некоторого элемента подсхемы A . Тогда u есть *входной полюс подсхемы B* .

Пусть v к выходу некоторого элемента β из подсхемы B присоединен либо выходной полюс схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$, либо вход какого-либо элемента из A . Тогда v есть *выходной полюс подсхемы B* .

Обозначим через u_1, \dots, u_h и v_1, \dots, v_g входные и выходные полюсы подсхемы B схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$. Пусть u_1^*, \dots, u_h^* и v_1^*, \dots, v_g^* — соответствующие полюсы в $S(A^*, B_2^*, \tilde{x}_{n+p+3})$. Кроме входных полюсов u_1, \dots, u_h в схеме B_2 есть еще $p+3$ входных полюсов $x_{n+1}, \dots, x_{n+p+3}$.

Предположим, что при некотором $k^* \in \{1, \dots, m+1\}$ все элементы в $\mathcal{M}(k^*)$ исправны.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что при любой совокупности допустимых неисправностей в схеме $S(A^*, B_2^*, \tilde{x}_{n+p})$ найдется число k^* такое, что все элементы в $\mathcal{M}(k^*)$ исправны. Это следует из того, что множества $\mathcal{M}(k)$, $1 \leq k \leq m+1$, не пересекаются, а число неисправных элементов в B_2 не превышает m .

Пусть $(k_{n+1}^*, \dots, k_{n+p}^*)$ — набор из нулей и единиц такой, что

$$k^* = 1 + \sum_{i=n+1}^{n+p} k_i^* 2^{n+p-i}. \quad (11)$$

Введем набор $\tilde{e}_{p+3} = (e_{n+1}, \dots, e_{n+p+3})$, в котором

$$e_i = \begin{cases} k_i^*, & \text{если } n+1 \leq i \leq n+p; \\ 0, & \text{если } n+p+1 \leq i \leq n+p+3. \end{cases} \quad (12)$$

Пусть \mathcal{M}_0 — множество крайних элементов в B_2^* . Все элементы из $\mathcal{M}_{k^*} \cup \mathcal{M}_0$ разобьем на ярусы.

Ярусы в B_2^* . Предположим, что входы всех гирлянд, подвешенных к входам произвольного элемента β из $\mathcal{M}_{k^*} \cup \mathcal{M}_0$, присоединены к выходам схем \hat{R}' или к входным полюсам x_1, \dots, x_{n+p} . Тогда β принадлежит первому ярусу.

Пусть в B_2^* определены i первых ярусов. Каждый элемент β из $\mathcal{M}_{k^*} \cup \mathcal{M}_0$, не попавший в i первых ярусов, отнесем к $(i+1)$ -му ярусу, если вход гирлянды, подвешенной к любому входу элемента β , присоединен к одному из следующих элементов схемы:

- к выходу схемы \hat{R} или входному полюсу;
- к выходу элемента из j -го яруса, $j \leq i$;
- к выходу схемы $\hat{\Omega}$, все входы которой присоединены к выходам элементов, находящихся на предшествующих ярусах.

Подсхемы B и B_2^* схем $S(A^*, B, \tilde{x}_n)$ и $S(A^*, B_2^*, \tilde{x}_{n+p+3})$ будем рассматривать как самостоятельные схемы.

Лемма 1. Пусть

- (а) в B_2^* исправны все граничные элементы;
- (б) на полюсы u_1, \dots, u_h и u_1^*, \dots, u_h^* схем B и B_2^* подается произвольный набор (d_1, \dots, d_h) из нулей и единиц, а на полюсы $x_{n+1}, \dots, x_{n+p+3}$ — набор $(e_{n+1}, \dots, e_{n+p+3})$, заданный соотношениями (11), (12);
- (с) δ^* — произвольный элемент из $\mathcal{M}_{k^*} \cup \mathcal{M}_0$, являющийся копией элемента δ из B .

Тогда на выходах элементов δ^* и δ реализуются одинаковые значения.

Прежде чем перейти к доказательству леммы, сформулируем три вспомогательных утверждения.

Утверждение 1. Пусть \hat{R} — подсхема в B_2^* . Тогда в условиях леммы 1 значения на входе и выходе подсхемы \hat{R} совпадают.

В самом деле, в \hat{R} исправны все элементы с метками (ψ) и все схемы K из гирлянд, подвешенных к входам элементов с метками (ψ) , так как эти элементы и схемы являются граничными, а по условию леммы такие элементы исправны. Поскольку в условиях леммы $x_{n+p+1} = x_{n+p+2} = 0$, значения второго входа и выхода любой исправной схемы K одинаковы. В этих условиях схема \hat{R} является самокорректирующейся. Отсюда следует утверждение 1.

Утверждение 2. В условиях леммы 1 значения на входе и выходе гирлянды, подвешенной к любому входу произвольного элемента δ^* из $\mathcal{M}_{k^*} \cup \mathcal{M}_0$, одинаковы.

Для гирлянды, состоящей из исправных схем K , справедливость утверждения 2 очевидна. Если гирлянда подвешена к входу элемента δ^* из \mathcal{M}_{k^*} , то она состоит из исправных схем K (это следует из определения числа k^*). Если гирлянда подвешена к входу элемента δ^* из \mathcal{M}_0 , то она состоит из исправных схем K , поскольку в таких гирляндах все схемы K являются граничными элементами. По условию леммы 1 граничные элементы исправны.

Утверждение 3. Если выполнены условия леммы 1, то значения на k^* -м входе и выходе любой схемы $\hat{\Omega}$ одинаковы.

Утверждение следует из определения схемы $\hat{\Omega}$ и из того, что все элементы схемы $\hat{\Omega}$ являются граничными и, следовательно, исправными по условию леммы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 1 проведем индукцией по номерам ярусов. В условиях леммы любой элемент δ^* из $\mathcal{M}_{k^*} \cup \mathcal{M}_0$ исправен.

Пусть δ^* находится в первом ярусе схемы B_2^* . Тогда входы всех гирлянд, подвешенных к входам элемента δ^* , присоединены к выходам схем \hat{R} или входным полюсам x_1, \dots, x_{n+p} . Из утверждений 1 и 2 следует, что на первые входы элементов δ^* и δ подаются одинаковые значения, одинаковые значения подаются на вторые входы этих элементов и так далее. Элемент δ^* исправен, он функционально эквивалентен элементу δ . Отсюда следует справедливость утверждения леммы 1 для выбранной пары элементов δ^*, δ .

Пусть δ^* находится в $(i+1)$ -м ярусе схемы B_2^* и для всех элементов из $\mathcal{M}_{k^*} \cup \mathcal{M}_0$, находящихся на предыдущих ярусах, утверждение леммы 1 выполнено. Рассмотрим варианты (а) и (б).

(а) Предположим, что $\delta^* \in \mathcal{M}_0$. Рассмотрим три случая.

(а.1) Пусть вход гирлянды, подвешенной к j -му входу элемента δ^* , присоединен к выходу схемы $\hat{\Omega}$. Рассмотрим также гирлянду, которая подвешена к k^* -му входу этой схемы $\hat{\Omega}$. Пусть вход этой гирлянды присоединен к выходу элемента β^* из \mathcal{M}_{k^*} . Элемент β^* находится в v -м ярусе, $v \leq i$. По предположению индукции на выходах элементов β^* и β реализуются равные значения (β — элемент, копией которого является элемент β^*). Отсюда и из утверждений 2 и 3 следует, что на j -х входах элементов δ^* и δ реализуются одинаковые значения.

(а.2) Пусть вход гирлянды, подвешенной к j -му входу элемента δ^* , присоединен к выходу элемента β^* из \mathcal{M}_0 . Так как элемент β^* нахо-

дится на ярусе v , $v \leq i$, то по предположению индукции на выходах элементов β^* из B_2^* и β из B реализуются одинаковые значения. Отсюда и из утверждения 2 следует, что на j -х входах элементов δ^* и δ реализуются одинаковые значения.

(а.3) Пусть вход гирлянды, подвешенной к j -му входу элемента δ^* , присоединен к выходу подсхемы \hat{H} или входному полюсу из x_1, \dots, x_n . Тогда, пользуясь утверждениями 1 и 2, получаем, что на j -х входах элементов δ^* и δ реализуются одинаковые значения.

Случаи (а.1)–(а.3) исчерпывают все способы присоединения входа гирлянды, подвешенной к j -му входу элемента δ^* из \mathcal{M}_0 . Во всех случаях на j -е входы элементов δ^* и δ подаются одинаковые значения. В силу произвольности числа j (номера входа) то же можно сказать и об остальных входах элементов δ^* и δ . Отсюда и из того, что δ^* — исправный элемент, эквивалентный элементу δ , приходим к заключению, что утверждение леммы 1 справедливо для δ^* из \mathcal{M}_0 .

(b) Пусть $\delta^* \in \mathcal{M}_{k^*}$. Повторяя рассуждение, предложенное для случая (а), убеждаемся в справедливости утверждения леммы 1 и в случае (b).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть в $S(A^*, B_2^*, \tilde{x}_{n+p+3})$ исправны все граничные элементы схемы B_2^* и все элементы схемы $\mathcal{M}(k^*)$, а \tilde{e}_{p+3} определяется соотношениями (11), (12). Тогда

$$S_a(A', B_2^*, \tilde{x}_n, \tilde{e}_{p+3}) \equiv S_a(A', B, \tilde{x}_n),$$

где A' — произвольная схема, в которую может превратиться схема A при появлении в ней допустимых неисправностей.

Доказательство. Входные полюсы подсхемы A' в схеме $S(A', B_2^*, \tilde{x}_{n+p+3})$ присоединены только к внешним полюсам и к выходам крайних элементов схемы B_2^* , т. е. элементов из \mathcal{M}_0 . Отсюда и из леммы 1 следует, что в условиях леммы 2 на выходных полюсах подсхемы A' из $S(A', B_2^*, \tilde{x}_{n+p+3})$ и на соответствующих полюсах схемы A' из $S(A', B, \tilde{x}_n)$ реализуются одинаковые значения. Если β^* — элемент в B_2^* , выход которого является выходным полюсом схемы $S(A', B_2^*, \tilde{x}_{n+p+3})$, то β^* содержится в \mathcal{M}_0 . Из леммы 1 следует, что на этом полюсе и на соответствующем полюсе в $S(A', B, \tilde{x}_n)$ реализуются одинаковые значения. Отсюда следует справедливость утверждения леммы 2.

Лемма 3. Если схема $S(A, B_2, \tilde{x}_{n+p+3})$ исправна, то

$$S_a(A, B_2, \tilde{x}_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{p+3}) \equiv S_a(A, B, \tilde{x}_n).$$

Эта лемма является очевидным следствием леммы 2.

§ 5. Схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$

Эта схема изображена на рис. 9. Ее подсхема C состоит из схем B_2 и B_3 .

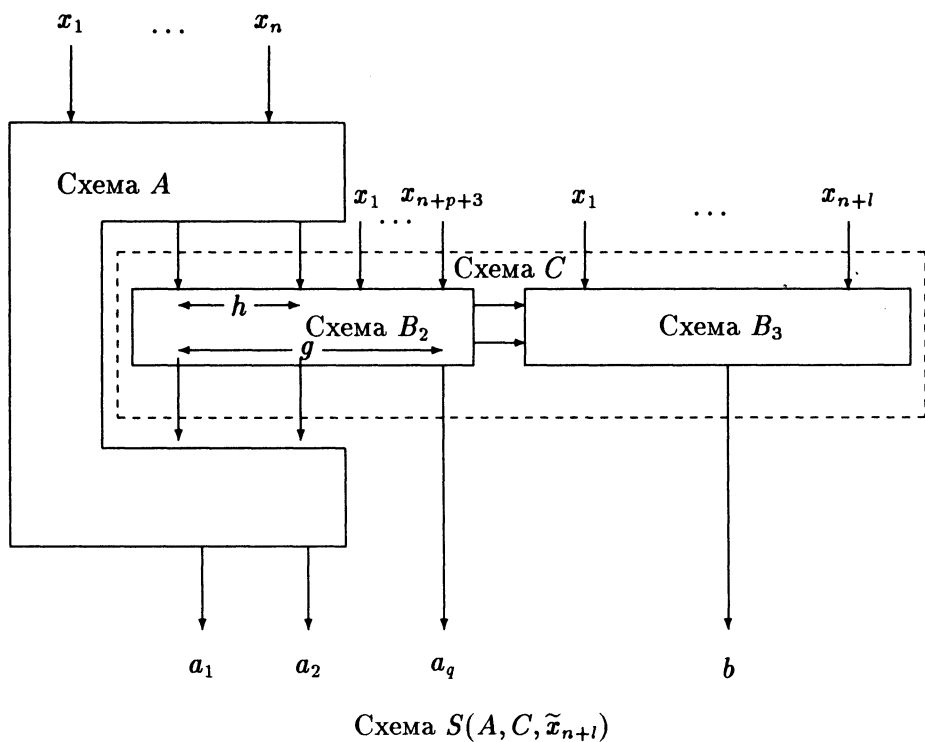


Рис. 9

Блоками схемы B_2 называются все ее подсхемы Q, K , а также все базисные элементы схемы B_2 , находящиеся вне схем Q и K . Входы схемы B_3 присоединены к выходам всех блоков схемы B_2 . Кроме того, входами схемы B_3 служат входные полюсы x_1, \dots, x_{n+l} . Схема B_3 имеет единственный выход b , который является и одним из выходов схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$.

ОКРЕСТНОСТЬ БЛОКА. Для каждого блока β из B_2 укажем совокупность блоков, составляющих окрестность блока β , обозначаемую через $O(\beta)$:

- Если β является блоком K , вход которого присоединен к выходу блока Q , то $O(\beta)$ состоит из этих двух блоков K и Q .
- Если β является базисным элементом, то $O(\beta)$ состоит из блока β и всех блоков K , выходы которых присоединены к входам блока β .

- Если β является блоком K , вход которого присоединен к выходу блока, являющегося базисным элементом φ , то $O(\beta)$ состоит из блоков β , φ и блоков K , выходы которых присоединены к входам блока φ .
- Если β является блоком K , вход которого присоединен к выходу другого блока K , то $O(\beta)$ состоит из этих двух блоков K .
- Если β является блоком K , второй вход которого присоединен к полюсу x_i , $i \in \{1, \dots, n + p\}$, то $O(\beta)$ состоит только из блока β .
- Если β является блоком Q , то $O(\beta)$ состоит только из блока β .

При тестовых проверках схема B_3 перерабатывает информацию, поступающую с внутренних полюсов схемы B_2 , в список номеров блоков схемы B_2 , в окрестностях которых есть неисправные элементы.

Схема B_3 подробно описана в [1]. Это описание довольно громоздко. В настоящей статье мы не вносим изменений в конструкцию схемы B_3 и поэтому не приводим подробного описания этой схемы. Будем использовать доказанные в [1] утверждения о свойствах этой схемы.

Пусть $\mu(B') = \max \mu(\beta)$, где $\mu(\beta)$ — число элементов схемы B' , у которых хотя бы один вход соединен с выходом элемента β из B' , а максимум берется по всем элементам β из B' .

Схема B_3 имеет $t + n + p + l^*$ входов, где t — число блоков в B_2 , $l^* = \lceil \log t(\mu(B') + 2)(\lceil \log t \rceil + 1) \rceil + 3$ (см. [1], с. 71). Учитывая неравенства (3), (7) и структуру схемы B' , имеем $\mu(B') \leq (m + 1)(\mu(B) + 1)$. Из (10) получаем $t \leq c_{10}mL(B)$. Из этих соотношений следует $l^* \leq 3 \log m + \log \mu(B) + \log \log L(B) + c_{11}$. Поэтому число входных полюсов схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$, равное $n + l$, можно выбрать так:

$$n + l = n + \lceil 4 \log m + \log \mu(B) + \log \log L(B) + c_{11} \rceil. \quad (13)$$

В [1] при описании схемы B_3 в ней выделена подсхема \mathcal{D} , которая названа *особой частью*. Обозначив через Δ число элементов в \mathcal{D} , приведенную в [1] оценку можно записать так:

$$\Delta \leq c_{12}m. \quad (14)$$

Сложность схемы C . В работе ([1, формула (2.28)]) дана оценка сложности схемы, полученной первым и вторым преобразованиями: $L(C) \leq c\mu(B)t^3L(B)$. Учитывая, что в рассматриваемом случае в качестве исходной схемы, над которой проводятся первое и второе преобразования, выбрана не схема B , а схема B' , перепишем приведенную формулу так: $L(C) \leq c\mu(B)t^3L(B')$. Отсюда и из неравенства (5) получаем

$$L(C) \leq c_{13}\mu(B)t^4L(B). \quad (15)$$

Граничная область в C . Элемент β в C принадлежит *граничной области* \mathcal{M} в C , если выполнено по крайней мере одно из условий:

- β является граничным элементом в B_2 ;
- β входит в окрестность блока, являющегося граничным элементом в B_2 ;
- β входит в \mathcal{D} , т. е. в особую часть схемы B_3 .

Оценим сверху $L(\mathcal{M})$ — число элементов из граничной области \mathcal{M} . Из определения окрестности блока следует, что число блоков в произвольной окрестности не превышает $r + 2$. Отсюда и из неравенств (4), (8), (14) следует, что

$$L(\mathcal{M}) \leq c_{14}m(g + h). \quad (16)$$

Множества \mathcal{T}_1 и \mathcal{T}_2 . Положим $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$, где \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 , \mathcal{P}_3 — множества, описанные в таблице.

	\mathcal{P}_1	\mathcal{P}_2	\mathcal{P}_3
x_1	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$
x_2	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	x_1
\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	x_1
x_{r+1}	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$
x_{r+2}	x_1	x_1	x_1
\dots	\dots	\dots	\dots
x_{n+p}	x_1	x_1	x_1
x_{n+p+1}	1	0	1
x_{n+p+2}	0	1	1
x_{n+p+3}	1	1	1
x_{n+p+4}	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$
\dots	\dots	\dots	\dots
x_{n+l}	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$

Ее первый столбец задает множество \mathcal{P}_1 векторов $\tilde{x}_{n+l} = (x_1, \dots, x_{n+l})$ таких, что

- x_{r+2}, \dots, x_{n+p} равны значению x_1 ;
- x_{n+p+1} и x_{n+p+3} равны единице;
- x_{n+p+2} равен нулю;
- остальные компоненты вектора \tilde{x}_{n+l} принимают произвольные значения.

Аналогично находятся множества \mathcal{P}_2 и \mathcal{P}_3 . В таблице определено множество \mathcal{T}_1 , состоящее из $2^{l-p-3}(4 + 2^{r+2})$ векторов.

Обозначим через \mathcal{T}_2 множество векторов \tilde{z}_{n+l} из $\{0, 1\}^{n+l}$, в которых $z_{2m+2} = z_{2m+3} = \dots = z_{n+l} = 0$. Множество \mathcal{T}_2 состоит из 2^{2m+1} векторов.

Пусть \hat{B}_2 множество блоков в B_2 , не являющихся блоками Q .

Схема $S(A^*, B_2^*, \tilde{x}_{n+l})$ называется \mathcal{T}_2 -нормальной, если $S_b(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l}) = S_b(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ при любых $\tilde{x}_{n+l} \in \mathcal{T}_2$.

Лемма 4. Если схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ не является \mathcal{T}_2 -нормальной, то в особой части \mathcal{D} схемы C^* есть неисправные элементы.

Это утверждение доказано в ([1, лемма 8]).

Лемма 5. Если $S_b(A^*, C^*, \tilde{\alpha}_{n+l}) = S_b(A, C, \tilde{\alpha}_{n+l})$ при фиксированных схемах A^* , C^* и каждом $\tilde{\alpha}_{n+l} \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, то $S_a(A', C^*, \tilde{x}_n, 0, \dots, 0) \equiv S_a(A', B, \tilde{x}_n)$, где A' — схема, в которую может превратиться A при появлении в ней допустимых неисправностей.

Это утверждение доказано в ([1, утв. (v) теоремы 1]).

Обозначим через $\pi(\mathcal{T}_1)$ произвольную последовательность всех векторов из \mathcal{T}_1 . Пусть $\langle S_b(A^*, C^*, \pi(\mathcal{T}_1)) \rangle$ — последовательность значений, принимаемых функцией $S_b(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$, когда ее аргумент \tilde{x}_{n+l} пробегает значения, определяемые последовательностью $\pi(\mathcal{T}_1)$.

В [1] при построении схемы B_3 все блоки схемы B_2 занумерованы числами $1, 2, \dots, t$. Будем считать, что в рассматриваемом случае всем блокам в B_2 присвоены номера. (Следует различать номера и метки. Это разные понятия: номера — это числа, а метки — это векторы; один блок может иметь и номер, и метку.)

Лемма 6. Если схема $S(A^*, B_2^*, \tilde{x}_{n+l})$ является \mathcal{T}_2 -нормальной и

$$S_b(A^*, C^*, \tilde{\delta}_{n+l}) \neq S_b(A, C, \tilde{\delta}_{n+l})$$

при некотором $\tilde{\delta}_{n+l} \in \mathcal{T}_1$, то по последовательности $\langle S_b(A^*, C^*, \pi(\mathcal{T}_1)) \rangle$ можно указать \mathcal{E} — множество номеров блоков в \hat{B}_2 — таких, что

- если $k \notin \mathcal{E}$, то блок β с номером k исправен;
- если $k \in \mathcal{E}$, то в окрестности блока β есть неисправный блок.

Доказательство. В статье [1] определено подмножество векторов \mathcal{P} в $\{0, 1\}^{n+l}$ и приведено понятие \mathcal{P} -совершенной схемы относительно содержащегося в ней блока β . Там же (леммы 3 и 4) доказано:

- Если $\beta \in \hat{B}_2$ и $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ не является \mathcal{P} -совершенной схемой относительно β , то в окрестности β найдется неисправный блок.
- Если $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является \mathcal{P} -совершенной схемой относительно $\beta \in \hat{B}_2$, то блок β исправен.

Из теоремы 3 и лемм 11 и 12 в [1] следует, что если $S_b(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l}) = S_b(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ при любых $\tilde{x}_{n+l} \in \mathcal{T}_2$, то по последовательности $\langle S_b(A^*, C^*, \pi(\mathcal{T}_1)) \rangle$ можно указать множество \mathcal{E} , состоящее из номеров тех блоков в \hat{B}_2 , относительно каждого из которых $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ не является \mathcal{P} -совершенной схемой. Отсюда непосредственно следует утверждение леммы 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Особо отметим, что существование множества \mathcal{E} в [1] доказано конструктивно. Указана такая последовательность $\pi(\mathcal{T}_1)$, что если ее члены в предписанном самой последовательностью порядке подать на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$, то на ее выходе b реализуется слово, разбив которое на слова заданной длины, получим набор слов, являющихся двоичными представлениями всех чисел из \mathcal{E} .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В статье [1] в формулировке леммы 12 опущено условие, чтобы схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ была \mathcal{T}_2 -нормальной, хотя это условие использовано в доказательстве леммы. Эта небрежность автора не повлияла в [1] на доказательство теоремы 4, поскольку в формулировке теоремы 4 предполагается, что $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является \mathcal{T}_2 -нормальной схемой. Теорема 4 — это единственное в [1] утверждение, где использована лемма 12. Отметим, что и в настоящей статье лемма 12 использована корректно: в условиях леммы 6 предполагается, что $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является \mathcal{T}_2 -нормальной схемой.

Условимся, что символ \mathcal{E} будет использоваться только для обозначения множества, обладающего свойствами, указанными в формулировке леммы 6.

Лемма 7. Если $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является \mathcal{T}_2 -нормальной схемой и множество \mathcal{E} не содержит номеров граничных элементов в B_2 , то \mathcal{E} не содержит номеров блоков из множества $\mathcal{M}(k^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\mathcal{M}(k^*)$ состоит только из исправных элементов.

Покажем, что в \mathcal{E} нет номеров элементов с двухразрядными метками, в которых вторые разряды равны k^* .

Окрестность элемента β с двухразрядной меткой кроме самого элемента β содержит и набор блоков K , выходы которых подключены к входам элемента β . Эти схемы K имеют метки (k^*) и, следовательно, исправны. Поэтому окрестности всех элементов с двухразрядными метками, в которых второй разряд равен k^* , не содержат неисправных элементов. Номера таких элементов не могут содержаться в \mathcal{E} , так как \mathcal{E} состоит только из номеров блоков, в окрестностях которых есть неисправные блоки.

Покажем, что в \mathcal{E} нет блоков K с одноразрядными метками (k^*) . Обозначим через K^1 произвольный блок K с меткой (k^*) . Пусть к входу блока K^1 присоединен выход другого блока K , который обозначим через K^2 . Блок K^2 имеет метку (k^*) . (Так как блоки K^1 и K^2 составляют одну гирлянду, они должны иметь одинаковые метки: это следует из правила расстановки меток.) Блоки K^1 и K^2 исправны, потому что исправны все блоки с метками (k^*) . Окрестность блока K^1 состоит из блоков K^1 и K^2 . Отсюда заключаем, что номер блока K^1 не может содержаться в \mathcal{E} .

Пусть вход блока K с меткой (k^*) присоединен к выходу блока β с двухразрядной меткой, в которой второй разряд равен k^* . В этом случае окрестность рассматриваемого блока K состоит из него самого, из упомянутого блока β и из блоков K , выходы которых присоединены к входам блока β .

Таким образом, вся окрестность оказалась составленной только из элементов, принадлежащих множеству $\mathcal{M}(k^*)$, в котором все элементы исправны. Отсюда следует, что номер рассматриваемого блока K не может содержаться в \mathcal{E} .

Пусть вход блока K присоединен к выходу граничного элемента β , являющегося базисным элементом (только к такому граничному элементу может быть присоединен вход блока K с меткой (k^*)). По условию леммы номер элемента β не содержится в \mathcal{E} . К входу элемента β присоединены выходы граничных элементов K . В условиях леммы они исправны. Названные элементы составляют окрестность рассматриваемого блока K . Отсюда получаем, что номер рассматриваемого блока K не содержится в \mathcal{E} .

Рассмотрены все варианты присоединения входа блока K с меткой (k^*) к элементам схемы. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Предположим, что $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является \mathcal{T}_2 -нормальной схемой и \mathcal{E} не содержит номеров граничных элементов в B_2 . Тогда найдется набор (e_1, \dots, e_l) из нулей и единиц такой, что

$$S_a(A', C^*, \tilde{x}_n, e_1, \dots, e_l) \equiv S_a(A', B, \tilde{x}_n),$$

где A' — произвольная схема, в которую может превратиться схема A при появлении в ней допустимых неисправностей.

Справедливость этого утверждения следует из лемм 2 и 7.

КЛАССЫ НЕИСПРАВНОСТЕЙ в $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$. Пусть допустимые неисправности превратили схему $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ в схему $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$. Неисправности схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ принадлежат

— *первому классу*, если схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является \mathcal{T}_2 -нормальной и множество \mathcal{E} не содержит номеров граничных элементов в B_2 ;

— *второму классу*, если выполнено одно из следующих условий:

схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ не является \mathcal{T}_2 -нормальной;

схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ является \mathcal{T}_2 -нормальной, а в \mathcal{E} содержится номер какого-либо граничного элемента в B_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из определения классов неисправностей схемы, понятия \mathcal{T}_2 -нормальной схемы, замечания 4 и леммы 7 следует, что мы имеем алгоритмы для выяснения, к какому классу принадлежат неисправности в $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$, и для отыскания числа k^* такого, что в $\mathcal{M}(k^*)$ все элементы исправны.

§ 6. Заключение

Покажем, что определенная в § 2–5 схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ обладает свойствами, перечисленными в формулировке теоремы.

Пусть выполнены следующие условия:

$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, где \mathcal{T}_1 и \mathcal{T}_2 — множества, определенные в § 5. Отметим, что мощность множества \mathcal{T} не превосходит $c_{15}m^3\mu(B)\log L(B) + 2^{2m+1}$;

$k = \max(c_{11}, c_{13}, c_{14}, c_{15})$, где c_{11}, c_{13}, c_{14} — константы, фигурирующие в соотношениях (13), (15), (16).

Тогда

— утверждение (а) теоремы следует из (15), (16);

— утверждение (b) следует из леммы 3 (заметим, что из структуры схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ следует равенство $S_a(A, C, \tilde{x}_n, \underbrace{0, \dots, 0}_l) \equiv S_a(A, B_2,$

$\tilde{x}_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{p+3})$);

— утверждение (с) следует из леммы 5;

— утверждение (d.1) следует из замечания 6;

— утверждение (d.2) следует из леммы 8 и замечания 6;

— утверждение (d.3) следует из лемм 4 и 6.

Это означает, что множество \mathcal{T} и схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+l})$ обладают всеми перечисленными в формулировке теоремы свойствами. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Носков В. Н. Диагностика частей схем из функциональных элементов // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 3. С. 60–96.
2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

Адрес автора:

Россия,
630090 Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: noskov@math.nsk.su

Статья поступила

29 января 1996 г.