ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 1996. Том 3, № 2, 62–79

УДК 519.6

АСИМПТОТИЧЕСКИ МИНИМАЛЬНЫЕ САМОКОРРЕКТИРУЮЩИЕСЯ СХЕМЫ ДЛЯ ОДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ*)

Н. П. Редькин

Рассматриваются схемы из надежных и ненадежных функциональных элементов. Схема называется k-самокорректирующейся, если при переходе в неисправное состояние не более чем k произвольных ненадежных элементов она реализует ту же самую функцию, что и при правильной работе всех ее элементов. Каждый надежный элемент имеет вес $p(p > 0)$ и всегда реализует одну и ту же приписанную ему функцию из базиса. Каждый ненадежный элемент имеет вес 1 и в исправном состоянии реализует некоторую приписанную ему функцию из базиса, а в неисправном состоянии — булеву константу δ. Пусть $L_k(f)$ — наименьшая из сложностей k-самокорректирующихся схем, реализующих булеву функцию f; под сложностью схемы понимается сумма весов всех элементов этой схемы. Для монотонных симметрических булевых функций $f_2^n(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j$ в базисе $\{\&,\vee,^-\}$ при $p \geqslant k+1$ и $\delta \in \{0,1\}$ установлена асимптотика $L_k(f_2^n) \sim (k+2)n$, а в базисе $\{\&,\vee\}$ при $p>0$ и $\delta = 0$ — асимптотика $L_k(f_2^n) \sim n\min(2p, k+2)$.

Введение

Будем рассматривать схемы из функциональных элементов в базисе B [1], построенные из надежных и ненадежных элементов. Каждый надежный элемент имеет вес $p\,(p > 0)$ и реализует некоторую приписанную ему функцию из B. Каждый ненадежный элемент в исправном состоянии реализует некоторую приписанную ему функцию из B, а в неисправ-

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-01527) и Грантового центра по исследованиям в области математики при Новосибирском государственном университете (проект «Математические вопросы синтеза надежных и легкотестируемых схем»).

ном состоянии — булеву константу $\delta(\delta \in \{0,1\})$. Вес каждого ненадежного элемента равен 1. Каждая функция из B может быть реализована как надежным, так и ненадежным элементами (под функцией, реализуемой ненадежным элементом, здесь подразумевается функция из B, которую данный элемент реализует в исправном состоянии).

Схема в базисе B называется k-самокорректирующейся относительно неисправностей типа δ, если при переходе в неисправное состояние не более чем k произвольных ненадежных элементов она реализует ту же функцию, что и при исправном состоянии всех ее элементов (все неисправные элементы в схеме реализуют константу δ) [2]. Сложностью схемы называется сумма весов всех элементов схемы, а сложностью реализации булевой функции — наименьшая из сложностей схем (в заданном базисе и в заданном классе схем), реализующих эту функцию при исправном состоянии ненадежных элементов. Сложность схемы S обозначим через $L(S)$, а сложность реализации функции f схемами в базисе B, k-самокорректирующимися относительно неисправностей типа δ, — через $L^B_{k,\delta}(f)$. Если сложность k-самокорректирующейся относительно неисправностей типа δ схемы в базисе B, реализующей функцию f, равна $L^B_{k,\delta}(f)$, то такая схема называется *минимальной.*

Ниже рассматривается реализация монотонных симметрических булевых функций $f_2^n(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$ (т. е. пороговых симметрических функций с порогом 2) k-самокорректирующимися схемами в двух конкретных базисах.

§ 1. Асимптотически минимальные k-самокорректирующиеся схемы в базисе $B_0 = \{\&, \vee, {}^-\}$

Основной целью настоящего параграфа является установление следующего факта.

Теорема 1. *При любом фиксированном k и $p \geqslant k+1$*

$$L^{B_0}_{k,0}(f_2^n) \sim (k+2)n.$$

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, опишем одну модификацию конструкции Гринчука из [3] и установим два вспомогательных факта (леммы 1 и 2), которые используются при установлении верхней оценки для теоремы 1, а затем докажем лемму 3, из которой просто получается нижняя оценка для этой теоремы.

При заданном k зафиксируем минимальное натуральное n_0 такое, что для каждого $n \geqslant n_0$ имеется $k+2$ простых числа $p_1(n),\ldots,p_{k+2}(n)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\sqrt{n} < p_i(n) < n^{3/4}, \quad i = 1,\ldots,k+2. \tag{1}$$

Существование таких чисел следует из закона распределения простых чисел, согласно которому число простых чисел, не превосходящих n, по порядку равно $n/\log n$ (см., например, [4]). Далее считаем $n \geqslant n_0$, и этому n отвечают простые числа $p_1, \ldots, p_{k+2}$.

Введем $k+2$ матрицы $M_1, \ldots, M_{k+2}$, заполненные переменными $x_1, \ldots, x_n$. Матрица $M_i, 1 \leqslant i \leqslant k+2$, имеет p_i строк и $\lceil n/p_i \rceil$ столбцов. В матрице M_i первый столбец заполняется сверху вниз переменными $x_1, \ldots, x_{p_i}$, второй столбец — переменными $x_{p_i+1}, \ldots, x_{2p_i}$ и т. д. вплоть до последнего столбца, который заполняется (возможно, не полностью) последними $n - (\lceil n/p_i \rceil - 1)p_i$ переменными. Таким образом, в клетке матрицы M_i, находящийся в j-й строке и m-м столбце, расположена переменная $x_{(m-1)p_i+j}$ (если $(m-1)p_i + j > n$, то соответствующая клетка матрицы остается пустой; $1 \leqslant m \leqslant \lceil n/p_i \rceil$; $1 \leqslant j \leqslant p_i$). Переменные x_a и x_b будем называть *соседними* в матрице M_i, если они находятся в одной строке этой матрицы.

Лемма 1. *Никакие две переменные x_a и x_b не могут быть соседними одновременно в двух матрицах.*

Доказательство. Допустим, что переменные x_a и x_b находятся в одной строке матрицы M_i и в одной строке матрицы M_h, где $b > a$; $i, h \in \{1, \ldots, k+2\}$. Пусть x_a и x_b в матрице M_i находятся в m_1-м и m_2-м столбцах, а в матрице M_h — в m_1'-м и m_2'-м столбцах. Из способа заполнения матриц переменными следует, что $b - a = (m_2 - m_1)p_i$ и $b - a = (m_2' - m_1')p_h$, т. е. $(m_2 - m_1)p_i = (m_2' - m_1')p_h$. Но последнее равенство невозможно, поскольку в соответствии с условием (1) $p_i > \sqrt{n}$ и $p_h > \sqrt{n}$, а $m_2 - m_1 < \sqrt{n}$ и $m_2' - m_1' < \sqrt{n}$ (при этом нарушается единственность разложения числа $b - a$ на простые сомножители). Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Каждой матрице $M_i, 1 \leqslant i \leqslant k+2$, поставим в соответствие p_i новых переменных $y_{i,1}, \ldots, y_{i,p_i}$, полагая $y_{i,j} = \vee x_a$, где дизъюнкция берется по всем переменным из j-й строки матрицы $M_i, 1 \leqslant j \leqslant p_i$.

Лемма 2. *Функция $f_2^n(\widetilde{x})$, где $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, представима в виде*

$$f_2^n(\widetilde{x}) = f_2^{p_1}(y_{1,1}, \ldots, y_{1,p_1}) \vee \cdots \vee f_2^{p_{k+2}}(y_{k+2}, \ldots, y_{k+2,p_{k+2}}). \qquad (2)$$

При этом на любом наборе значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, содержащем не более одной единицы, все $k+2$ функции из правой части (2) обращаются в нуль, а на любом наборе, содержащем не менее двух единиц, все $k+2$ функции, кроме, быть может, одной, обращаются в единицу.

Доказательство. Действительно, пусть $\widetilde{\sigma}$ — произвольный набор значений переменных $x_1, \ldots, x_n$. Если $|\widetilde{\sigma}| = \sum_{a=1}^{n} \sigma_a = 0$, то во всех матрицах окажутся одни нули, значения всех новых переменных будут равны нулю и правая часть из (2) окажется равной нулю. Если $|\widetilde{\sigma}| = 1$, то в каждой матрице M_i окажется одна единица, значения всех новых переменных $y_{i,1}, \ldots, y_{i,p_i}$ матрицы M_i, $1 \leqslant i \leqslant k+2$, кроме одной, будут равны нулю и правая часть из (2) снова будет равна нулю.

Пусть $|\widetilde{\sigma}| \geqslant 2$, т. е. по крайней мере какие-нибудь две переменные x_a и x_b принимают единичные значения. Тогда согласно лемме 1 в каждой матрице M_i, $1 \leqslant i \leqslant k+2$, кроме, быть может, одной, найдутся хотя бы две строки, содержащие единицы. Отвечающие этим строкам новые переменные окажутся равными единице, и все функции $f_2^{p_1}, \ldots, f_2^{p_{k+2}}$ из правой части (2), кроме, быть может, одной, на рассматриваемом наборе $\widetilde{\sigma}$ обратятся в единицу. Лемма 2 доказана.

Нижние оценки будем доказывать в предположении, что на входы схемы наряду с переменными подаются константы 0 и 1. Ясно, что получаемые оценки справедливы и для случая, когда на входы схем разрешается подавать только переменные (а именно этот случай имеется в виду в формулировке теоремы). При этом предположении любая k-самокорректирующаяся схема в рассматриваемом базисе обладает следующими легко проверяемыми свойствами.

Свойство 1. Если в k-самокорректирующейся схеме S на входы некоторых исправных элементов подаются константы, то эти элементы можно удалить, получив k-самокорректирующуюся схему, которая реализует ту же функцию.

Для схем из надежных элементов это свойство почти очевидно и уже неоднократно использовалось при получении нижних оценок сложности схем. Для k-самокорректирующейся схемы S можно предположить, что элементы $E_1, \ldots, E_i$, на входы которых подаются константы, остаются исправными (даже будучи ненадежными элементами), а неисправными могут быть любые другие ненадежные элементы. При этом реализуемая схемой S функция не изменится. Следовательно, после удаления элементов $E_1, \ldots, E_i$ и надлежащего изменения соединений оставшихся элементов (как указано, например, в [5]), полученная схема останется k-самокорректирующейся относительно неисправностей ненадежных элементов.

Свойство 2. Если в k-самокорректирующейся схеме S на выходах некоторых исправных элементов реализуются константы, то эти элементы можно удалить, получив k-самокорректирующуюся схему, которая реализует ту же функцию.

Свойство 3. Если в k-самокорректирующейся схеме выход какого-либо элемента E не является выходом схемы и не соединен с входами других элементов, то E можно удалить и реализуемая схемой функция не изменится, а сама схема останется k-самокорректирующейся.

Лемма 3. *При $n \geqslant 3$, $\delta \in \{0,1\}$, $p \geqslant k+1$ и любом натуральном k справедливо неравенство*

$$L^{B_0}_{k,\delta}(f^n_2) \geqslant L^{B_0}_{k,\delta}(f^{n-1}_2) + k + 2.$$

Доказательство. Пусть S — произвольная минимальная k-самокорректирующаяся схема, реализующая $f^n_2(\widetilde{x})$, $n \geqslant 3$. Покажем, что из S можно удалить некоторые элементы с общим весом не менее чем $k+2$ и получить k-самокорректирующуюся схему для f^{n-1}_2. В зависимости от вида S будем различать два случая.

1. По крайней мере одна переменная, скажем x_1, подается на вход некоторого элемента E_1, реализующего отрицание или конъюнкцию. Поскольку функция $f^n_2(\widetilde{x})$ отлична от $\overline{x}_1$ и не представима в виде $x_1 f^n_2(1, x_2, \ldots, x_n)$, то выход элемента E_1 не может быть выходом всей схемы. Пусть $E_2, \ldots, E_m$ — все элементы схемы S такие, что по крайней мере один вход элемента E_i, $2 \leqslant i \leqslant m$, соединен либо с выходом элемента E_1, либо с входом схемы, отвечающим переменной x_1.

Убедимся, что общий вес элементов $E_2, \ldots, E_m$ не меньше $k+1$. Действительно, если среди $E_2, \ldots, E_m$ есть хотя бы один надежный элемент, то утверждение очевидно. Если же все элементы $E_2, \ldots, E_m$ — ненадежные, то $m-1 \geqslant k+1$, поскольку при неправильной работе этих элементов реализуемая схемой функция не будет зависеть от x_1 (так как с входом x_1 и с выходом элемента E_1 соединены только входы элементов $E_2, \ldots, E_m$), тогда как схема S является k-самокорректирующейся.

При $x_1 \equiv 0$, т. е. при подаче константы 0 вместо переменной x_1 и исправных элементах E_1, $E_2, \ldots, E_m$, на входы этих элементов будут подаваться константы, на выходе схемы S будет реализована функция $f^{n-1}_2(x_2, \ldots, x_n)$ и схема будет k-самокорректирующейся относительно неисправностей элементов, отличных от $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Согласно свойству 1 элементы $E_1, E_2, \ldots, E_m$ можно удалить, тем самым уменьшить сложность схемы не менее чем на $k+2$ и получить k-самокорректирующуюся схему для f^{n-1}_2.

2. В схеме S нет ни одного конъюнктора или инвертора, вход которого соединен с входом схемы. В этом случае в схеме найдется элемент E_1, на входы которого подаются различные переменные, скажем x_1 и x_2 (поскольку схема S минимальна, то на оба входа одного элемента не может подаваться одна и та же переменная). Пусть $E_2, \ldots, E_m$ — все элементы схемы S такие, что хотя бы один вход элемента E_i, $2 \leqslant i \leqslant m$, соединен либо с выходом элемента E_1, либо с входом схемы, отвечающим переменной x_1.

Убедимся, что общий вес элементов $E_2, \ldots, E_m$ не может быть меньше $k+1$. В самом деле, при наличии надежного элемента среди E_2,

$\ldots, E_m$ это очевидно. Если же все элементы $E_2, \ldots, E_m$ — ненадежные, то должно выполняться неравенство $m - 1 \geqslant k + 1$. В противном случае при $x_2 \equiv 1$ и неправильной работе этих элементов реализуемая схемой функция не будет зависеть от x_1, тогда как на выходе схемы должна быть реализована дизъюнкция $x_1 \vee x_3 \vee \cdots \vee x_n$.

Следовательно, при $x_1 \equiv 0$ можно удалить элементы $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с общим весом не менее $k+2$ и получить k-самокорректирующуюся схему для f_2^{n-1}. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1. *Верхняя оценка.* Построим схему S, моделирующую (2). Возьмем $k + 2$ подсхем S_i, каждая из которых, в свою очередь, разбивается на две подсхемы $S_{i,1}$ и $S_{i,2}$, $1 \leqslant i \leqslant k + 2$. Подсхема $S_{i,1}$ имеет n входов, на которые подаются $x_1, \ldots, x_n$, и p_i выходов, на которых реализуются новые переменные $y_{i,1}, \ldots, y_{i,p_i}$; строится $S_{i,1}$ из ненадежных дизъюнкторов. Поскольку для «вычисления» новых переменных $y_{i,1}, \ldots, y_{i,p_i}$ можно использовать не более $n - 1$ дизъюнкторов, то сложность $S_{i,1}$ не превосходит $n - 1$.

Подсхема $S_{i,2}$ имеет p_i входов, соединенных с выходами подсхемы $S_{i,1}$, и один выход, на котором реализуется функция $f_2^{p_i}(y_{i,1}, \ldots, y_{i,p_i})$. Эта схема строится из ненадежных конъюнкторов и дизъюнкторов. Поскольку известный способ реализации пороговой функции $f_2^n(x_1, \ldots, x_n)$, основанный на представлении $f_2^n(x_1, \ldots, x_n) = x_n(x_1 \vee \cdots \vee x_{n-1}) \vee f_2^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$, требует менее $3n$ элементов, то сложность $S_{i,2}$ не превосходит $3p_i$.

Таким образом, сложность всех подсхем $S_1, \ldots, S_{k+2}$ не превосходит $(k + 2)n + 3(p_1 + \cdots + p_{k+2})$.

Последняя подсхема S' строится из $k + 1$ надежных дизъюнкторов. Она имеет $k + 2$ входов, на которые в соответствии с представлением (2) подаются $f_2^{p_1}, \ldots, f_2^{p_{k+2}}$, и один выход, на котором реализуется функция $f_2^n(\widetilde{x})$.

Схема S построена только из дизъюнкторов и конъюнкторов (т. е. в монотонном базисе). С учетом этого обстоятельства, а также характера возможных неисправностей ненадежных элементов и леммы 2 легко заметить, что на любом нулевом наборе $\widetilde{\sigma}$ (т. е. таком, что $f(\widetilde{\sigma}) = 0$) схема S выдает нуль как в исправном состоянии, так и при неправильной работе любых ненадежных элементов. На единичном же наборе $\widetilde{\sigma}$ (на котором $f(\widetilde{\sigma}) = 1$) согласно лемме 2 не менее $k+1$ исправных подсхем среди $S_1, \ldots, S_{k+2}$ будут выдавать единицу. При неправильной работе не более k ненадежных элементов (а значит, не более k подсхем) хотя бы одна из этих подсхем, выдающих в исправном состоянии единицу на наборе $\widetilde{\sigma}$, останется исправной и будет выдавать единицу. Поскольку подсхема S' построена из надежных дизъюнкторов, в этом случае единица будет и на выходе схемы S.

Таким образом, построенная схема S является k-самокорректирующейся, а ее сложность не превосходит $(k+2)n+3(p_1+\dots+p_{k+2})+(k+1)p$. Последняя же сумма с учетом (1) асимптотически не превосходит $(k+2)n$. Отсюда получаем верхнюю оценку для $L^{B_0}_{k,0}(f_2^n)$.

Далее из леммы 3 и очевидного неравенства $L^{B_0}_{k,\delta}(f_2^2) \geqslant k+1$ (выходной элемент самокорректирующейся схемы должен быть надежным) индукцией по n легко устанавливается нижняя оценка для $L^{B_0}_{k,\delta}(f_2^n)$. Теорема 1 доказана.

Эта теорема остается в силе, когда каждый ненадежный элемент в неисправном состоянии выдает тождественную единицу (т. е. $\delta = 1$). Доказательство нижней оценки для $L^{B_0}_{k,1}(f_2^n)$ в этом случае снова получается с использованием леммы 3, которая справедлива при любом фиксированном $\delta \in \{0,1\}$), а для получения верхней оценки можно воспользоваться следующим утверждением.

Лемма 4. *Функция $f_2^n(\widetilde{x})$ представима в виде*

$$f_2^n(\widetilde{x}) = \bigvee_{i=1}^{k+2} f_2^{p_1}(\widetilde{y}_1)\dots f_2^{p_{i-1}}(\widetilde{y}_{i-1}) f_2^{p_{i+1}}(\widetilde{y}_{i+1})\dots f_2^{p_{k+2}}(\widetilde{y}_{k+2}), \qquad (3)$$

где $\widetilde{x} = (x_1,\dots,x_n)$, $\widetilde{y}_j = (y_{j,1},\dots,y_{j,p_j})$ $(j = 1,\dots,k+2)$. При этом на наборах значений переменных $x_1,\dots,x_n$, содержащих не более чем одну единицу, все $k+2$ слагаемых из правой части (3) и все сомножители в каждом слагаемом обращаются в нуль, а на наборах, содержащих не менее чем две единицы, хотя бы одно слагаемое из правой части (3) обращается в единицу.

Справедливость этой леммы фактически следует из леммы 2. В соответствии с представлением (3) строится k-самокорректирующаяся схема для f_2^n при $\delta = 1$. Функции $f_2^{p_1},\dots,f_2^{p_{k+2}}$ из правой части представления (3) реализуются по-прежнему раздельно с использованием уже указанных ранее подсхем $S_1,\dots,S_{k+2}$ из ненадежных элементов. Перемножение функций $f_2^{p_1},\dots,f_2^{p_{i-1}}, f_2^{p_{i+1}},\dots,f_2^{p_{k+2}}$ внутри одного слагаемого из правой части (3) осуществляется с использованием k надежных конъюнкторов, а сложение — с использованием $k+1$ надежных дизъюнкторов. Таким образом, к схемам $S_1,\dots,S_{k+2}$ добавляется подсхема S'' из $k(k+1)+k+1$ надежных элементов. Из леммы 4 следует, что в итоге будет получена k-самокорректирующаяся схема, реализующая f_2^n; сложность этой схемы асимптотически не превосходит $(k+2)n$, т. е. верхняя оценка теоремы 1 остается в силе.

§ 2. Асимптотически минимальные k-самокорректирующиеся схемы в монотонном базисе $B_1 = \{\&, \vee\}$

Теперь будем рассматривать самокорректирующиеся схемы в монотонном базисе, содержащем только конъюнкторы и дизъюнкторы. Будем считать, что $p > 0$; другие ограничения на веса надежных элементов не накладываются. Относительно неисправностей будем предполагать, что ненадежные элементы в неисправном состоянии выдают константу 0, т. е. $\delta = 0$.

Теорема 2.

$$L_{k,0}^{B_1}(f_2^n) \sim n \min(2p, k+2).$$

Доказательство. *Верхняя оценка.* Если $k + 2 \geqslant 2p$, то схему для f_2^n построим только из надежных дизъюнкторов и конъюнкторов, опираясь на представление (2), в правой части которого оставим только два слагаемых (т. е. формально положим $k = 0$). При этом сложность схемы окажется асимптотически не больше $2pn$. При $2p > k + 2$ можно воспользоваться верхней оценкой, полученной при доказательстве теоремы 1; напомним, что эта оценка была получена с использованием k-самокорректирующихся схем, содержащих только дизъюнкторы и конъюнкторы.

Нижняя оценка устанавливается индукцией по n с использованием доказываемой ниже леммы 5. Поскольку при $p \leqslant 1$ нижняя оценка, очевидно, следует из [3] (в этом случае минимальные схемы можно строить только из надежных элементов, а согласно [3] любые схемы, реализующие f_2^n, содержат асимптотически не менее чем $2n$ элементов), то ниже можем полагать $p > 1$.

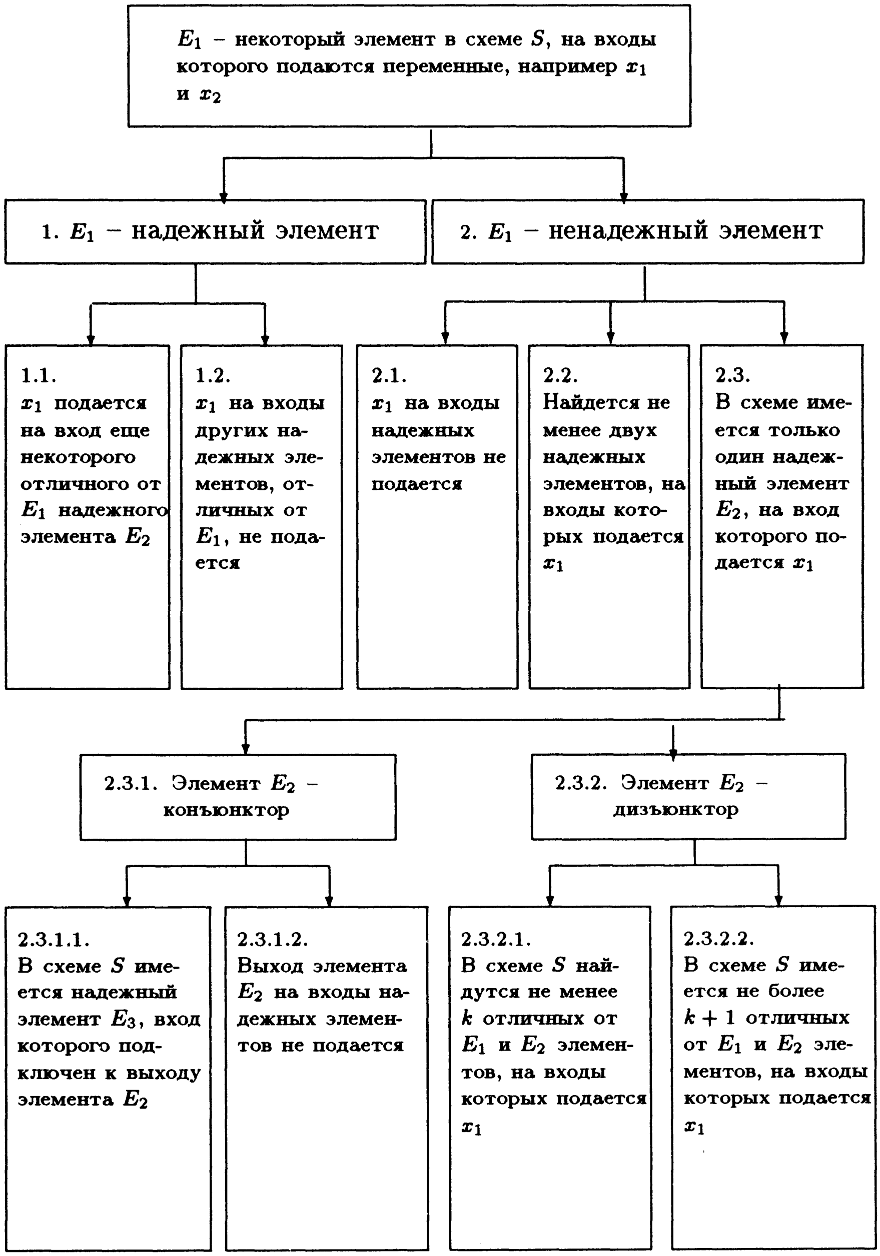
Лемма 5. *При* $n \geqslant 3$

$$L_{k,0}^{B_1}(f_2^n) \geqslant L_{k,0}^{B_1}(f_2^{n-1}) + \min(2p, k+2).$$

Доказательство. Пусть S — произвольная минимальная k-самокорректирующаяся схема в базисе B_1, реализующая $f_2^n(\widetilde{x})$. Покажем, что из S можно удалить некоторые элементы с общим весом не менее чем $k + 2$ и получить k-самокорректирующуюся схему для f_2^{n-1}.

В схеме S выделим элемент E_1, на входы которого подаются переменные, скажем x_1 и x_2 (такой элемент, очевидно, найдется). Далее в зависимости от возможного вида схемы S рассмотрим всевозможные случаи, представленные в таблице.

Случай 1.1. При $x_1 \equiv 0$ на входы элементов E_1 и E_2 с общим весом $2p$ подается константа. Согласно свойству 1 эти элементы (а также, возможно, некоторые другие элементы, на входы которых в исходной



схеме подается x_1) можно удалить и получить k-самокорректирующуюся схему, реализующую f_2^{n-1}.

Случай 1.2. Пусть $E_2, \ldots, E_m$ — все отличные от E_1 элементы схемы S, на входы которых подается x_1. Поскольку $E_2, \ldots, E_m$ — ненадежные элементы, то должно выполняться неравенство $m \geqslant k+2$. Действительно, пусть

$$\chi(E) = \begin{cases} 1, & \text{если } E \text{ — дизъюнктор,} \\ 0, & \text{если } E \text{ — конъюнктор.} \end{cases}$$

Если $m < k+2$, то при $x_2 = \chi(E_1)$ и переходе элементов $E_2, \ldots, E_m$ в неисправное состояние на выходах элементов $E_1, E_2, \ldots, E_m$ будут константы, а функция, реализуемая на выходе схемы S, не будет зависеть от x_1. В то же время

$$f_2^n(x_1, \chi(E), x_3, \ldots, x_n),$$

очевидно, существенно зависит от x_1. Поскольку исходная схема S является k-самокорректирующейся, то получается противоречие. Если же $m \geqslant k+2$, то согласно свойству 1 при $x_1 \equiv 0$ можно удалить элементы $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с общим весом не менее $k+2$.

Случай 2.1 рассматривается аналогично случаю 1.2.

Случай 2.2 рассматривается аналогично случаю 1.1.

Случай 2.3.1.1. При $x_1 \equiv 0$ на выходе E_2 реализуется тождественный нуль, на входы элементов E_1, E_2, E_3 подается тождественный нуль и согласно свойству 1 по крайней мере элементы E_1, E_2, E_3 общим весом $2p+1$ можно удалить и получить k-самокорректирующуюся схему для f_2^{n-1}.

Случай 2.3.1.2. Пусть $E_3, \ldots, E_m$ — все элементы такие, что хотя бы на один вход элемента E_i, $3 \leqslant i \leqslant m$, подается x_1 или выход элемента E_2. Число таких элементов должно быть не менее $k+1$. Ясно, что выход элемента E_1 не может быть выходом схемы. Не может быть выходом схемы и выход элемента E_2, поскольку при $x_1 \equiv \chi(E_2)$ на выходе E_2 реализуется константа, тогда как функция $f_2^n(\chi(E_2), x_2, \ldots, x_n)$ существенно зависит от переменных $x_2, \ldots, x_n$. Но если $m-2 \leqslant k$, то при неисправном состоянии элементов $E_3, \ldots, E_m$ и $x_2 \equiv \chi(E_1)$ на выходах элементов $E_1, E_3, \ldots, E_m$ реализуются константы. Поскольку x_1 подается только на некоторые входы элементов $E_1, \ldots, E_m$, выход элемента E_2 — только на некоторые входы элементов $E_3, \ldots, E_m$, то на выходе схемы S реализуется функция, не зависящая от x_1, что противоречит исходному предположению о k-самокорректируемости схемы S. Следовательно, $m-1 \geqslant k+1$ и при $x_1 \equiv 0$ на входы элементов $E_1, \ldots, E_m$ подается тождественный нуль (при этом на выходе элемента E_2 также будет тождественный нуль). Согласно свойству 1 элементы $E_1, \ldots, E_m$ можно удалить и получить k-самокорректирующуюся схему для f_2^{n-1}.

Случай 2.3.2.1. При $x_1 \equiv 0$ на входы не менее чем $k+2$ элементов, включая E_1, E_2, будет подаваться тождественный нуль. Согласно свойству 1 эти элементы можно удалить и получить k-самокорректирующуюся схему для f_2^{n-1}.

Случай 2.3.2.2. Воспользуемся некоторыми свойствами и особенностями рассматриваемых самокорректирующихся схем в монотонном базисе. Всякое упорядоченное подмножество элементов $\{E_{m_1}, E_{m_2}, \ldots, E_{m_i}\}$ схемы S будем называть *цепью*, если для любого j, $2 \leqslant j \leqslant i$, хотя бы один вход элемента E_{m_j} соединен с выходом элемента $E_{m_{j-1}}$; элемент E_{m_j} считается j-м (сверху) элементом этой цепи. Первый элемент цепи $\{E_{m_1}, E_{m_2}, \ldots, E_{m_i}\}$ будем называть верхним, последний — нижним, а число i — длиной цепи. Выходом цепи будем считать выход ее нижнего элемента.

Выделим в схеме S непустую цепь $Z = \{E_2, \ldots, E_m\}$ максимальной длины из надежных дизъюнкторов такую, что

а) выход E_i подсоединен к входу лишь одного надежного элемента — E_{i+1}, $2 \leqslant i \leqslant m-1$;

б) имеется не более $k-1$ отличных от E_1 ненадежных элементов таких, что хотя бы на один вход каждого из них подается x_1 или выход одного из элементов $E_2, \ldots, E_{m-1}$.

На входы верхнего в цепи Z элемента E_2 подается x_1 и некоторая функция φ_2. Функции, реализуемые на выходах элементов $E_2, \ldots, E_m$, обозначим соответственно через $\psi_2, \ldots, \psi_m$. Через φ_i обозначим отличную от ψ_{i-1} функцию, подаваемую на вход элемента E_i, $3 \leqslant i \leqslant m$ (в силу минимальности схемы S на оба входа любого элемента схемы одинаковые функции подаваться не могут). Вершины схемы S, в которых реализуются функции $\varphi_2, \ldots, \varphi_m$, обозначим соответственно через $V(\varphi_2), \ldots, V(\varphi_m)$. Все отличные от $E_1, E_2, \ldots, E_m$ ненадежные элементы такие, что хотя бы на один вход каждого из них подается x_1 или выход одного из элементов $E_2, \ldots, E_m$, обозначим через $E'_1, \ldots, E'_r$.

Если на вход верхнего элемента цепи, состоящей из одних дизъюнкторов, подается x_1, то при $x_1 = 1$ на выходе этой цепи будет единица (независимо от значений остальных переменных). Следовательно, выход такой цепи не может быть выходом схемы S, реализующей f_2^n. С учетом этого факта, а также минимальности схемы S, свойства 3 и определения цепи Z получаем, что в условиях случая 2.3.2.2 достаточно рассмотреть следующие четыре варианта.

Случай 2.3.2.2.1. Выход элемента E_m не подается на входы надежных элементов и не является выходом схемы S.

Случай 2.3.2.2.2. Выход элемента E_m подается на входы двух или более надежных элементов.

Случай 2.3.2.2.3. Выход элемента E_m подается на вход одного надежного элемента E_{m+1}, являющегося дизъюнктором. В этом случае из определения цепи Z следует, что $r \geqslant k$.

Случай 2.3.2.2.4. Выход элемента E_m подается на вход одного надежного элемента E_{m+1}, являющегося конъюнктором.

Введем вспомогательную операцию усиления схемы в некоторой вершине. Пусть V — вершина схемы S, в которой реализуется функция $\varphi(\widetilde{x})$ при правильной работе всех ненадежных элементов схемы S; под вершиной V подразумевается либо некоторый вход схемы S, либо выход какого-нибудь элемента этой схемы. Через $S(V)$ обозначим минимальную по числу элементов подсхему в S с выходом в вершине V, реализующую $\varphi(\widetilde{x})$. Подсхему, получающуюся из $S(V)$ заменой каждого ненадежного элемента точно таким же, но надежным элементом, обозначим через $S^*(V)$. Добавим к схеме S подсхему $S^*(V)$; все входы элементов схемы S, которые соединены в ней с вершиной V, отсоединим от V и соединим с выходом подсхемы $S^*(V)$. Полученную в результате схему (с тем же выходом, что и в S) обозначим через S^*; переход от S к S^* мы называем усилением схемы S в вершине V (если V — вход схемы S, то S^* совпадает с S).

Лемма 6. *После усиления k-самокорректирующейся схемы S в произвольной вершине V получается k-самокорректирующаяся схема S^*, реализующая ту же функцию, что и S.*

Доказательство. То, что на выходах исправных схем S и S^* реализуется одна и та же функция f, следует из определения операции усиления схемы в вершине. Предположим, что не более k ненадежных элементов $E_{t_1}, \ldots, E_{t_i}$, $i \leqslant k$, в схеме S и соответствующие им ненадежные элементы в схеме S^* работают неправильно. Пусть $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — произвольный набор значений переменных $x_1, \ldots, x_n$. Если $f(\widetilde{\sigma}) = 0$, то на выходе схемы S^* будет 0, поскольку при неправильной работе элементов $E_{t_1}, \ldots, E_{t_i}$ в схеме S и соответствующих ненадежных элементов в схеме S^* значения на выходах схем S, S^* могут только уменьшиться в силу монотонности рассматриваемого базиса.

Допустим, что $f(\widetilde{\sigma}) = 1$. Тогда в силу самокорректируемости схемы S на ее выходе будет единица. Значения на выходах подсхемы $S(V)$ схемы S и подсхемы $S^*(V)$ в схеме S^* обозначим соответственно через $\varphi_V(\widetilde{\sigma})$ и $\varphi^*_V(\widetilde{\sigma})$. Заметим, что при правильной работе подсхемы $S(V)$ значения на выходах соответствующих элементов $S(V)$ и $S^*(V)$ совпадают; при переходе каких-то элементов подсхемы $S(V)$ в неисправное состояние значения на выходах этих элементов, а в силу монотонности базиса и на выходе подсхемы $S(V)$ могут только уменьшиться. Поэтому $\varphi^*_V(\widetilde{\sigma}) \geqslant \varphi_V(\widetilde{\sigma})$. Вычисление же значений на выходах схем S и S^* на входном наборе $\widetilde{\sigma}$ формально можно представить так.

В схемах добавляется по одному дополнительному входу. В схеме S соединенные с вершиной V входы других элементов отсоединяются от вершины V и присоединяются к дополнительному входу W. Аналогично в схеме S^* все входы элементов, соединенные с выходом подсхемы $S^*(V)$, отсоединяются от выхода подсхемы $S^*(V)$ и присоединяются к дополнительному входу W^*. В схеме S на дополнительный вход W подается $\varphi_V(\widetilde{\sigma})$, а в схеме S^* на дополнительный вход W^* подается $\varphi^*_V(\widetilde{\sigma})$ (при этом подсхему S^* можно удалить). Получается, что в двух одинаковых схемах (первая — схема S, а вторая — схема S^* без подсхемы $S^*(V)$) на входы, отвечающие переменным $x_1, \ldots, x_n$, подаются одинаковые значения $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, на вход W первой схемы подается $\varphi_V(\widetilde{\sigma})$, а на соответствующий вход W^* второй схемы подается $\varphi^*_V(\widetilde{\sigma})$. В этом случае из неравенства $\varphi^*_V(\widetilde{\sigma}) \geqslant \varphi_V(\widetilde{\sigma})$ и монотонности базиса следует, что значение на выходе второй схемы не меньше значения на выходе первой схемы, т. е. на выходе схемы S^* будет 1. Лемма 6 доказана.

Пусть V, W — некоторые вершины схемы R, а Z — цепь от V до W в R, т. е. цепь, в которой хотя бы один вход верхнего элемента соединен с V, а выход нижнего элемента совпадает с W. Будем говорить, что цепь Z *функционирует* на входных наборах $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\sigma}'$ схемы R, если при переходе от $\widetilde{\sigma}$ к $\widetilde{\sigma}'$ изменяются значения на входе V и на выходах всех элементов цепи Z.

Лемма 7. *Пусть R — произвольная схема, возможно, с неисправными элементами, реализующая на выходе W некоторую функцию f, а $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\sigma}'$ — входные наборы такие, что $f(\widetilde{\sigma}) \neq f(\widetilde{\sigma}')$. Тогда в R имеется некоторый вход V и некоторая цепь от V до W, которая функционирует на наборах $\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}'$.*

Доказательство нетрудно провести индукцией по числу элементов в схеме [6].

Число единиц в булевом наборе $\widetilde{\sigma}$ будем называть *весом* набора $\widetilde{\sigma}$ и обозначать через $|\widetilde{\sigma}|$. Порогом монотонной булевой функции f называется число $P(f) = \min |\widetilde{\sigma}|$, где минимум берется по всем тем наборам $\widetilde{\sigma}$ таким, что $f(\widetilde{\sigma}) = 1$ (ясно, что $P(f^n_2) = 2$).

Убедимся, что при всех i, $2 \leqslant i \leqslant n$, выполняется неравенство

$$P(\varphi_i(0, x_2, \ldots, x_n)) \geqslant 2, \tag{4}$$

где $\varphi_i(0, x_2, \ldots, x_n)$ — функция, реализуемая в вершине $V(\varphi_i)$ при $x_i \equiv 0$. Предположим противное, т. е. $P(\varphi_i(0, x_2, \ldots, x_n)) < 2$. Тогда найдется набор $(\sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ такой, что $|(\sigma_2, \ldots, \sigma_n)| = 1$ и $\varphi_i(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$.

Пусть S^* — схема, получающаяся из k-самокорректирующейся схемы S ее усилением в вершине $V(\varphi_i)$. Согласно лемме 6 схема S^* является

k-самокорректирующейся. Обозначим через M множество всех тех ненадежных элементов схемы S^*, что хотя бы один вход каждого такого элемента подключен к x_1 или к выходу одного из элементов $E_2, \ldots, E_{m-1}$. Из условия б) определения цепи $Z = \{E_2, \ldots, E_m\}$ в схеме S следует, что M состоит не более чем из k элементов. Предположим, что в схеме S^* неисправны все элементы из M. Поскольку на выходе схемы S^* должна быть реализована функция $f_2^n(\widetilde{x})$, а $f_2^n(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$ и $f_2^n(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$, то если на входы схемы S^* подается набор $(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, то на выходе этой схемы должен быть нуль, а если на входы схемы S^* подается набор $(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, то на ее выходе должна быть единица. Так как при переходе от набора $(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ к набору $(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ только на первом входе схемы S^* изменяется значение, отвечающее переменной x_1, то в соответствии с леммой 7 в S^* должна быть некоторая цепь Z^* от этого входа до выхода схемы S^*, которая функционирует на наборах $(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Но любая цепь от первого входа до выхода схемы S^* проходит хотя бы через один элемент из множества M или через элемент E_m. Поскольку элементы из M неисправны и значения на выходах этих элементов не изменяются при переходе от $(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ к $(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, то ни через один из этих элементов цепь Z^* проходить не может. Остается предположить, что Z^* проходит через E_m.

Вершина $V(\varphi_i)$ в схеме S^* является выходом подсхемы $S^*(V(\varphi_i))$, составленной из надежных элементов. Поэтому если на входы схемы S^* подать набор $(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, то независимо от состояний ненадежных элементов в S^* на выходе подсхемы $S^*(V(\varphi_i))$, а значит, и на входе элемента E_i цепи Z будет единица. В силу монотонности базиса эта единица сохранится и при подаче входного набора $(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Следовательно, если на входы схемы S^* подается набор $(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ или набор $(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, то на вход дизъюнктора E_i цепи Z подается единица. Поскольку цепь Z состоит только из надежных дизъюнкторов, то на выходе этой цепи будет единица, т. е. при переходе от набора $(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ к набору $(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ значение на выходе элемента E_m не изменяется. Это означает, что цепь Z^* не может проходить через элемент E_m.

Полученное противоречие исключает исходное предположение о том, что для исправной схемы S неравенство (4) не выполняется. Таким образом, если на входы исправной схемы S подается набор $(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ такой, что $|(\sigma_2, \ldots, \sigma_n)| < 2$, то в вершине $V(\varphi_i)$ получается нуль, который сохраняется и при переходе каких-то элементов схемы S в неисправное состояние (если элемент схемы переходит в неисправное состояние, то значение на выходе этого элемента, а в силу монотонности базиса и на выходах других элементов схемы, может только уменьшиться).

Значит, при наличии в S не более k неисправных элементов для функции, реализуемой в вершине $V(\varphi_i)$, неравенство (4) выполняется.

Пусть Q — произвольная k-самокорректирующаяся схема в базисе B_1, реализующая $f_2^m(\widetilde{x})$, а E — произвольный надежный дизъюнктор в этой схеме и вход этого дизъюнктора соединен в Q с вершиной V, в которой реализуется монотонная функция $\varphi_V(\widetilde{x})$ с порогом, не меньшим двух. Если дизъюнктор E не является выходным элементом в схеме Q, то рассмотрим следующую вспомогательную операцию дублирования дизъюнктора E другим надежным дизъюнктором на выходе схемы Q. Вход V' дизъюнктора E отсоединим от вершины V и на этот вход подадим тождественный нуль. К схеме Q добавим надежный дизъюнктор E^*, один вход которого соединим с выходом схемы Q, а другой вход — с вершиной V. В результате получим схему Q', в которой на вход элемента E подается тождественный нуль. Докажем, что Q' является k-самокорректирующейся схемой, реализующей функцию $f_2^m(\widetilde{x})$.

Предположим, что вход V' дизъюнктора E является еще одним дополнительным входом схемы, на который подается переменная v. В силу монотонности базиса реализуемую схемой функцию можно представить в виде

$$f(v, x_1, \ldots, x_n) = vf'(\widetilde{x}) \vee f''(\widetilde{x}), \tag{5}$$

где f', f'' — некоторые монотонные функции (такое представление возможно не только для исправной схемы Q, но и при наличии в ней неисправных элементов, поскольку в последнем случае вместо схемы в монотонном базисе B_1 получается некоторая схема в монотонном базисе $\{\&, \vee, 0\}$). При подстановке в представление (5) $\varphi_V(\widetilde{x})$ вместо v получим функцию, реализуемую на выходе схемы Q:

$$f_2^m(\widetilde{x}) = f(\varphi_V, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_V f'(\widetilde{x}) \vee f''(\widetilde{x}). \tag{6}$$

С учетом способа преобразования схемы Q для функции, реализуемой на выходе схемы Q', аналогичным образом получаем представление

$$f_1(\widetilde{x}) = f(0, x_1, \ldots, x_n) \vee \varphi_V = 0 \cdot f'(\widetilde{x}) \vee f''(\widetilde{x}) \vee \varphi_V. \tag{7}$$

Из сравнения (6) и (7) следует, что

$$f_1(\widetilde{x}) \geqslant f_2^m(\widetilde{x}), \tag{8}$$

причем неравенство (8) справедливо (с учетом самокорректируемости схемы Q, т. е. справедливости соотношения (6)) не только для исправной схемы Q', но и при наличии в Q' не более k неисправных элементов.

Из условия $P(\varphi_V(\widetilde{x})) \geqslant 2$ и определения функции $f_2^m(\widetilde{x})$ следует неравенство $\varphi_V(\widetilde{x}) \leqslant f_2^m(\widetilde{x})$. Отсюда и из соотношений (6), (7) следует, что

$$f_1(\widetilde{x}) \leqslant f_2^m(\widetilde{x}). \tag{9}$$

Используя (8) и (9), получаем $f_1(\widetilde{x}) = f_2^m(\widetilde{x})$, т. е. Q' — k-самокорректирующаяся схема, реализующая $f_2^m(\widetilde{x})$.

Вернемся к доказательству леммы 5 в случае 2.3.2.2. Положим $x_1 \equiv 0$. Учитывая (4), продублируем верхний дизъюнктор E_2 цепи Z надежным дизъюнктором E_2^* на выходе схемы. Полученную схему обозначим через S_1. Схема S_1, как и исходная схема S, является k-самокорректирующейся и реализует $f_2^{n-1}(x_2, \ldots, x_n)$.

В схеме S до дублирования на вход элемента E_2 подается $\varphi_2(0, x_2, \ldots, x_n)$, а после дублирования — тождественный нуль. Поскольку $\varphi_2(0, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$, а базис в любом случае является монотонным, то после замены функции $\varphi_2(0, x_2, \ldots, x_n)$, подаваемой на вход элемента E_2 схемы S, на тождественный нуль получаем, что значения функций, реализуемых в других вершинах схемы S, после дублирования могут только уменьшиться. Но если $\varphi(\widetilde{x}) \geqslant \varphi'(\widetilde{x})$, то, очевидно, $P(\varphi(\widetilde{x})) \leqslant P(\varphi'(\widetilde{x}))$. Отсюда следует, что после дублирования элемента E_2 сохраняются неравенства (4) для функций $\varphi_3(0, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(0, x_2, \ldots, x_n)$, подаваемых на входы элементов $E_3, \ldots, E_m$ в схеме S_1. Поэтому вслед за элементом E_2 аналогичным образом можно продублировать элемент E_3, затем элемент E_4 и т. д. вплоть до элемента E_m.

В результате будет получена k-самокорректирующаяся схема S_{m-1}, реализующая $f_2^{n-1}(x_2, \ldots, x_n)$ и состоящая из исходной схемы S и подвешенной к выходу этой схемы цепи Z^* из $m-1$ надежных дизъюнкторов $E_2^*, \ldots, E_m^*$, входы которых соединены с вершинами $V(\varphi_2), \ldots, V(\varphi_m)$ схемы S. На все входы цепи Z из S_{m-1} подаются нули. Следовательно, на выходах элементов $E_2, \ldots, E_m$ цепи Z будут реализованы нули. Нули будут также подаваться на входы элементов E_1, $E_1', \ldots, E_r'$. Теперь рассмотрим возможные варианты, которые могут встретиться в случае 2.3.2.2.

Случай 2.3.2.2.1. Предположим, что $r \leqslant k$, элементы $E_1', \ldots, E_r'$ неисправны, а на входы исходной схемы S подаются наборы $\widetilde{\sigma} = (0, \chi(E_1), \overline{\chi}(E_1), 0, \ldots, 0)$ и $\widetilde{\sigma}' = (1, \chi(E_1), \overline{\chi}(E_1), 0, \ldots, 0)$. Поскольку $f_2^n(\widetilde{\sigma}) = 0$, $f_2^n(\widetilde{\sigma}') = 1$, а наборы $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{\sigma}'$ отличаются лишь в первом разряде, то в соответствии с леммой 7 на наборах $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\sigma}'$ в схеме S должна функционировать некоторая цепь от первого входа к выходу. В рассматриваемом случае всякая такая цепь должна проходить через элемент E_1 или хотя бы через один из элементов $E_1', \ldots, E_r'$. Но при указанных предположениях ни один из этих элементов не может входить в функционирующую цепь, поскольку при переходе от $\widetilde{\sigma}$ к $\widetilde{\sigma}'$ значения на выходах элементов E_1, $E_1', \ldots, E_r'$ не изменяются (на вход E_1 вместо x_2 подается $\chi(E_1)$, элементы $E_1', \ldots, E_r'$ неисправны). Получаем противоречие. Значит, в данном случае выполняется неравенство $r \geqslant k+1$.

Согласно свойствам 1 и 2 из схемы S_{m-1} можно удалить элементы $E_2,\ldots,E_m$.(они продублированы ранее добавленными элементами E_2^*, $\ldots,E_m^*$), элементы $E_1,E_1',\ldots,E_r'$ и получить k-самокорректирующуюся схему, которая реализует $f_2^{n-1}(x_2,\ldots,x_n)$ и имеет сложность по крайней мере на $k+2$ меньшую, нежели сложность исходной схемы S.

Случай 2.3.2.2.2. Согласно свойствам 1 и 2 из схемы S_{m-1} можно удалить элементы E_1, $E_2,\ldots,E_m$ и еще не менее двух надежных элементов, на входы которых подается выход элемента E_m. В результате получится k-самокорректирующаяся схема, реализующая $f_2^{n-1}(x_2,\ldots,x_n)$; сложность полученной схемы по крайней мере на $2p+1$ меньше сложности исходной схемы S.

Случай 2.3.2.2.3. Согласно свойствам 1 и 2 из схемы S_{m-1} можно удалить элементы E_1, $E_2,\ldots,E_m$, $E_1',\ldots,E_r'$, E_{m+1} и получить k-самокорректирующуюся схему, реализующую $f_2^{n-1}(x_2,\ldots,x_n)$. Поскольку $r\geqslant k$, а $p\geqslant 1$, сложность полученной схемы по крайней мере на $k+2$ меньше сложности исходной схемы S.

Случай 2.3.2.2.4. На вход конъюнктора E_{m+1} подается нуль, поэтому на выходе этого конъюнктора также будет нуль. Если в схеме S_{m-1} выход конъюнктора E_{m+1} подается на вход хотя бы одного надежного элемента E_{m+2}, то согласно свойствам 1 и 2 из схемы S_{m-1} можно удалить элементы E_1, $E_2,\ldots,E_m$, $E_1',\ldots,E_r'$, E_{m+1}, E_{m+2} и получить k-самокорректирующуюся схему, реализующую $f_2^{n-1}(x_2,\ldots,x_n)$. Сложность такой схемы меньше сложности исходной схемы S по крайней мере на $2p+1$ (за счет удаления элементов E_1, E_{m+1}, E_{m+2}).

Допустим, что на входы надежных элементов в схеме S_{m-1} не подается выход конъюнктора E_{m+1}. Это означает, что в исходной схеме S конъюнктор E_{m+1} не является выходным элементом схемы (иначе в S_{m-1} выход E_{m+1} подавался бы по крайней мере на вход надежного элемента E_2^*) и выход этого конъюнктора в S подается только на входы ненадежных элементов. Пусть $E_1',\ldots,E_r'$, $E_{r+1}',\ldots,E_h'$ $(h>r)$ — все элементы такие, что хотя бы на один вход элемента E_i', $1\leqslant i\leqslant h$, подается x_1 или выход одного из элементов $E_2,\ldots,E_m$, E_{m+1}.

Убедимся, что $h\geqslant k+1$. В самом деле, предположим, что $h\leqslant k$. Тогда при неисправных элементах $E_1',\ldots,E_h'$ на наборах $\widetilde{\sigma}=(0,\chi(E_1),\overline{\chi}(E_1),0,\ldots,0)$ и $\widetilde{\sigma}'=(1,\chi(E_1),\overline{\chi}(E_1),0,\ldots,0)$ в схеме S, с одной стороны, согласно лемме 7 должна функционировать некоторая цепь от первого входа схемы S до ее выхода, а, с другой стороны, среди элементов E_1, $E_1',\ldots,E_n'$ имеется по крайней мере один элемент, который принадлежит этой цепи, а его выход не зависит от входа. Противоречие. Значит, $h\geqslant k+1$. Но в таком случае согласно свойствам 1 и 2 из схемы S_{m-1} можно удалить элементы $E_2,\ldots,E_m$, E_1, $E_1',\ldots,E_h'$ и получить реализующую $f_2^{n-1}(x_2, \ldots, x_n)$ k-самокорректирующуюся схему, сложность которой по крайней мере на $k+2$ меньше сложности исходной схемы S. Лемма 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1984.
2. **Яблонский С. В.** Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1988. Вып. 1. С. 5–25.
3. **Гринчук М. И.** О монотонной сложности пороговых функций // Методы дискретного анализа в теории графов и сложности: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1992. Вып. 52. С. 41–48.
4. **Галочкин А. И., Нестеренко Ю. В., Шидловский А. Б.** Введение в теорию чисел. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1984.
5. **Редькин Н. П.** Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1970. Вып. 23. С. 83–101.
6. **Редькин Н. П.** О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1989. Вып. 2. С. 198–222.

Адрес автора:

Россия,
119899 Москва,
Воробьевы горы,
МГУ, мех.-мат. фак.

Статья поступила
2 апреля 1996 г.