ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 1996. Том 3, № 2, 80–89

УДК 519.7

О НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ВЕРШИН ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ И ЧАСТИЧНО ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ТОЧЕК ПОЛИЭДРА

А. Ю. Чирков

Пусть Z — множество целых чисел, R — множество вещественных чисел, X^k — декартово произведение k множеств X, $|X|$ — число элементов в множестве X, $P(n,m,\alpha)$ — множество n-мерных полиэдров, заданных системой из m линейных неравенств с целочисленными коэффициентами, по абсолютной величине не превосходящими α, $V(X)$ — множество вершин выпуклой оболочки точек из X. При $k = 1, 2, \ldots, n$ доказывается неравенство

$$\max_{M\in P(n,m,\alpha)} |V(M \cap \{Z^k \times R^{n-k}\})| \geqslant \frac{\binom{m-\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} + \binom{m-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}}{4^{k+2}k^k(k-1)!}\binom{n}{k}\ln^{k-1}\alpha.$$

Введение

Положим $\gamma_k(n,m,\alpha) = \max\limits_{M\in P(n,m,\alpha)} |V(M \cap \{Z^k \times R^{n-k}\})|$. В [1] доказано соотношение $\gamma_2(2,m,\alpha) \asymp m\ln\alpha$. Из [2, 3] при фиксированном n следует $\gamma_n(n,m,\alpha) \asymp \ln^{n-1}\alpha$. Кроме того, при фиксированном n доказаны соотношения $\gamma_k(n,m,\alpha) \precsim \binom{m}{n}\ln^{k-1}\alpha$ [4] и $\gamma_k(n,m,\alpha) \precsim \binom{m}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\ln^{k}\alpha$ [5]. Положим

$$\xi_n(m) = \binom{m-\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} + \binom{m-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}.$$

В настоящей работе при достаточно больших α устанавливается неравенство

$$\gamma_k(n,m,\alpha) \geqslant \frac{\xi_n(m)}{4^{k+2}k^k(k-1)!}\binom{n}{k}\ln^{k-1}\alpha, \tag{1}$$

из которого следует, что при фиксированном k выполняется соотношение

$$\gamma_k(n, m, \alpha) \precsim \xi_n(m) \binom{n}{k} \ln^{k-1} \alpha.$$

Пусть $M = \{x \mid Ax \leqslant b\}$, где $b \in Z^m$, A — матрица размера $m \times n$ с целочисленными элементами. Обозначим через $\alpha(M)$ наибольший по абсолютной величине элемент, находящийся среди элементов матрицы A и вектора b, через $K_{k,\gamma}$ — множество векторов, у которых первые k компонент являются неотрицательными целыми числами, меньшими γ, а последние $n-k$ компонент равны 0, через $M^c_{\tau,\gamma}$ — полиэдр, заданный системой неравенств

$$A \begin{pmatrix} \gamma & -c_2 & -c_3 & \dots & -c_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} x \geqslant \tau b + A \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

через $T^k_{\tau,\gamma}(M)$ — множество полиэдров $\{M^c_{\tau,\gamma} \mid c \in K_{k,\gamma}\}$. Положим

$$\phi^k_{\tau,\gamma}(M) = \gamma^{-k} \sum_{c \in K_{k,\gamma}} |V(M^c_{\tau,\gamma} \cap \{Z^k \times R^{n-k}\})|.$$

Величина $\phi^k_{\tau,\gamma}(M)$ равна среднему числу вершин выпуклой оболочки частично целочисленных точек полиэдров из $T^k_{\tau,\gamma}(M)$, и $\alpha(M^c_{\tau,\gamma}) \leqslant \alpha(M)(\tau + n\gamma)$ для любого c из $K_{k,\gamma}$. Поэтому при $\alpha \geqslant \alpha(M)(\tau + n\gamma)$ выполняется неравенство $\gamma_k(n, m, \alpha) \geqslant \phi^k_{\tau,\gamma}(M)$.

В § 1 доказывается существование полиэдра M и таких констант γ_0 и τ_0, зависящих только от n и M, что для любого простого $\gamma > \gamma_0$ и $\tau = \gamma\tau_0$ выполняется неравенство

$$\phi^n_{\tau,\gamma}(M) \geqslant \frac{\xi_n(m)}{2^{2n+3} n^n (n-1)!} \ln^{n-1} \gamma. \qquad (2)$$

В § 2 этот результат обобщается, а именно для $k = 1, 2, \dots, n$ доказывается существование полиэдра M и таких констант γ_0 и τ_0, зависящих только от n и M, что для любого простого $\gamma > \gamma_0$ и $\tau = \gamma\tau_0$ выполняется неравенство

$$\phi^k_{\tau,\gamma}(M) \geqslant \frac{\xi_n(m)}{2^{2k+3} k^k (k-1)!} \binom{n}{k} \ln^{k-1} \gamma. \qquad (3)$$

По закону распределения простых чисел [6] при достаточно больших α в интервале от $\alpha/(2\alpha(M)(\tau_0 + n))$ до $\alpha/(\alpha(M)(\tau_0 + n))$ всегда найдется простое число γ. Отсюда и из соотношения (3) при достаточно больших α следует, что

$$\gamma_k(n, m, \alpha) \geqslant \frac{\xi_n(m)}{2^{2k+3} k^k (k-1)!} \binom{n}{k} \ln^{k-1} \frac{\alpha}{2\alpha(M)(\tau_0 + n)}.$$

Из последнего неравенства при $\alpha \geqslant (2\alpha(M)(\tau_0+n))^{2n}$ вытекает неравенство (1).

Все необходимые построения для доказательства неравенства (2) приводятся в § 1, неравенства (3) — в § 2, а обоснование и доказательство этих построений — в § 3 .

§ 1. Нижняя оценка величины $\phi^n_{\tau,\gamma}(M)$

Пусть e_i — вектор длины m, в котором i-я компонента равна 1, а остальные компоненты равны 0, $\Delta_n(M)$ — наибольший по абсолютной величине минор n-го порядка матрицы A.

Полиэдр M назовем *слабо связанным*, если для каждой его вершины v величина $e_i(b-Av)$ либо равна 0, либо больше $2n\Delta_n(M)$.

Лемма 1. *При $\tau > 2n\gamma\Delta_n(M)^2$ любой полиэдр из $T^n_{\tau,\gamma}(M)$ является слабо связанным.*

Вершину из $V(M\cap\{Z^k\times R^{n-k}\})$ при $k=1,2,\ldots,n$ назовем *внутренней*, если она не лежит ни на какой грани M размерности $n-k-1$ (при $k=n$ все вершины внутренние). Множество внутренних вершин из $V(M\cap\{Z^k\times R^{n-k}\})$ будем обозначать через $V_k(M)$. По аналогии с определением $\phi^k_{\tau,\gamma}(M)$ положим $\Phi^k_{\tau,\gamma}(M)=\gamma^{-k}\sum_{c\in K_{k,\gamma}}|V_k(M^c_{\tau,\gamma})|$.

Каждой вершине v полиэдра M поставим в соответствие угловой полиэдр M^v, образованный только теми неравенствами из системы $Ax\leqslant b$, которые в точке v обращаются в равенство.

Лемма 2. *Если M — слабо связанный полиэдр, то при $k=1,2,\ldots,n$ выполняются соотношения*

1) $V(M^v\cap\{Z^k\times R^{n-k}\})\cap V(M^u\cap\{Z^k\times R^{n-k}\})=\varnothing$, где $u,v\in V(M)$ и $u\neq v$;

2) $V_k(M^v)\cap V_k(M^u)=\{\varnothing\}$, где $u,v\in V(M)$ и $u\neq v$;

3) $V(M\cap\{Z^k\times R^{n-k}\})=\bigcup\limits_{v\in V(M)} V(M^v\cap\{Z^k\times R^{n-k}\})$;

4) $V_k(M)=\bigcup\limits_{v\in V(M)} V_k(M^v)$.

При $\tau>2n\gamma\Delta_n(M)^2$ из лемм 1, 2 и определения величины $\Phi^k_{\tau,\gamma}(M)$ следует, что

$$\phi^k_{\tau,\gamma}(M)\geqslant\Phi^k_{\tau,\gamma}(M)=\sum_{v\in V(M)}\Phi^k_{\tau,\gamma}(M^v)\geqslant|V(M)|\min_{v\in V(M)}\Phi^k_{\tau,\gamma}(M^v). \qquad (4)$$

Полиэдр M размерности n называется *простым*, если в каждой его вершине только n неравенств обращаются в равенство.

Пусть угловой полиэдр M^v задан системой неравенств $A^vx\leqslant b^v$. Если полиэдр M — простой, то матрица A^v — квадратная.

Пусть B — квадратная целочисленная невырожденная матрица, $f \in Z^n$ и $B^+ = (\det B)B^{-1}$. Множество неотрицательных решений сравнения $B^+(x - f) \equiv 0$ $(\det B)$ обозначим через $G(B, f)$, а множество точек из $V(G(B, f))$ со строго положительными компонентами — через $V_+(G(B, f))$. Между целочисленными решениями неравенства $Bx \leqslant f$ и точками из $G(B, f)$ существует взаимно однозначное соответствие, задаваемое формулой $f - Bx = y$, при котором вершина переходит в вершину [7]. Поэтому справедливы равенства $|V(G(B, f))| = |V(\{x \mid Bx \leqslant f\} \cap Z^n)|$ и $|V_+(G(B, f))| = |V_n(\{Bx \leqslant f\})|$. Для каждого вектора c из $K_{n,\gamma}$ определим множество $G^c_\gamma(B, f)$ неотрицательных решений сравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ 0 & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma \end{pmatrix} B^+(u - f) \equiv \begin{pmatrix} c_1 \det B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (\gamma \det B). \tag{5}$$

Из сказанного вытекает равенство

$$\Phi^n_{\tau,\gamma}(\{x \mid Bx \leqslant f\}) = \gamma^{-n} \sum_{c \in K_{n,\gamma}} |V_+(G^c_\gamma(B, \tau f))|. \tag{6}$$

При γ, взаимно простом с $\det B$, сравнение (5) можно представить в виде системы сравнений

$$\begin{cases} B^+(u - f) \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \det B) \\ (1, c_2, \dots, c_n)B^+(u - f) \equiv c_1 \det B \ (\operatorname{mod} \gamma). \end{cases}$$

Пусть $H = \{x \mid B^+(x - f) \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \det B), x > 0\}$, $\delta(x)$ — число различных векторов c из $K_{n,\gamma}$ таких, что $x \in V(G^c_\gamma(B, f))$. Из приведенных определений и равенства (6) вытекает тождество

$$\Phi^n_{\tau,\gamma}(\{x \mid Bx \leqslant \frac{1}{\tau} f\}) = \gamma^{-n} \sum_{x \in H} \delta(x). \tag{7}$$

Для оценки величины $\delta(x)$ воспользуемся следующей леммой из [3].

Лемма 3. *Пусть Λ — решетка, $\Gamma(b) = \{x \mid x - b \in \Lambda, x \geqslant 0\}$ и u — точка из $\Gamma(b)$. Если не существует ненулевой точки в Λ с компонентами, по абсолютной величине не превосходящими соответствующих компонент точки nu, то u — вершина выпуклой оболочки точек из $\Gamma(b)$.*

Обозначим через Λ решетку $\{x \mid B^+x \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \det B)\}$, через $\nu(x)$ число точек из Λ с компонентами, не превосходящими по абсолютной величине соответствующих компонент точки x. При простом γ для произвольной точки x $(x \not\equiv 0 \, (\operatorname{mod} \gamma))$ найдется точно γ^{n-1} векторов c из $K_{n,\gamma}$ таких, что имеет место равенство $(1, c_2, c_3, \dots, c_n)B^+x \equiv c_1 \det B$

$(\bmod\,\gamma)$, и γ^{n-2} векторов c из $K_{n-1,\gamma}$ таких, что $(1, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})B^+x \equiv 0\,(\bmod\,\gamma)$. Следовательно, по лемме 3 $\delta(x) \geqslant \gamma^{n-1} - \nu(nx)\gamma^{n-2}$. Отсюда и из (7) вытекает, что при простом $\gamma > \det B$ выполняется неравенство

$$\Phi^n_{\tau,\gamma}(\{x \mid Bx \leqslant \frac{1}{\tau}f\}) \geqslant \frac{1}{2\gamma} \sum_{\substack{x \in H \\ 2\nu(nx) \leqslant \gamma}} 1. \tag{8}$$

Лемма 4. *Существует число γ_0, зависящее только от n и $\det B$, такое, что для любого простого $\gamma > \gamma_0$ выполняется неравенство*

$$\sum_{\substack{x \in H \\ 2\nu(nx) \leqslant \gamma}} 1 \geqslant \frac{\gamma}{n^n 4^{n+1}(n-1)!}.$$

Из соотношения (8) и леммы 4 вытекает существование такого числа γ_0, зависящего только от n и $\det B$, что при всех простых $\gamma > \gamma_0$ выполняется неравенство

$$\Phi^n_{\tau,\gamma}(\{x \mid Bx \leqslant \frac{1}{\tau}f\}) \geqslant \frac{1}{2^{2n+3}(n-1)!n^n} \ln^{n-1}\gamma. \tag{9}$$

Поскольку неравенство (9) выполняется при произвольном векторе f, а при простом полиэдре M каждый угловой полиэдр M^v размерности n задается квадратной системой n неравенств, из (4) и (9) вытекает

Теорема 1. *Если M — простой полиэдр, то найдется такое число γ_0, зависящее только от n и M, что при всех простых $\gamma > \gamma_0$ и $\tau > 2n\gamma\Delta_n(M)^2$ выполняется неравенство*

$$\phi_{\tau,\gamma}(M) \geqslant \frac{|V(M)|}{2^{2n+3}(n-1)!n^n} \ln^{n-1}\gamma.$$

Обозначим через $DC_n(m)$ полиэдр

$$\{x \mid \sum_{j=1}^{n}(mi^j - \sum_{k=1}^{m} k^j)x_j \leqslant m \quad \text{при любом } i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Известно [8], что полиэдр $DC_n(m)$ — простой и число его вершин равно $\xi_n(m)$. Взяв в теореме 1 в качестве полиэдра M полиэдр $DC_n(m)$, получаем неравенство (2).

§ 2. Нижняя оценка величины $\phi^k_{\tau,\gamma}(M)$ при $k = 1, \ldots, n$

Введем следующие обозначения:

D — полиэдр, заданный системой неравенств $Bx \leqslant f$ с целочисленными коэффициентами;

C_k^n — множество всех $(n-k)$-элементных подмножеств множества $\{1,\ldots,n\}$;

$B_{2\,2}(J)$ — подматрица матрицы B, расположенная в последних $n-k$ столбцах и строках с номерами из J;

$B_{2\,1}(J)$ — подматрица матрицы B, расположенная в первых k столбцах и строках с номерами из J;

$B_{1\,2}(J)$ — подматрица матрицы B, расположенная в последних $n-k$ столбцах и строках с номерами, не принадлежащими J;

$B_{1\,1}(J)$ — подматрица матрицы B, расположенная в первых k столбцах и строках с номерами, не принадлежащими J;

$f_1(J)$ — вектор, полученный удалением из f компонент с номерами из J;

$f_2(J)$ — вектор, составленный из компонент вектора f с номерами из J.

Под полиэдром $D(J)$ будем понимать полиэдр размерности k, заданный системой неравенств

$$(B_{1\,1}(J)-B_{1\,2}(J)B_{2\,2}(J)^{-1}B_{2\,1}(J))x \leqslant f_1(J)-B_{1\,2}(J)B_{2\,2}(J)^{-1}f_2(J).$$

Для каждой точки из $V(D\cap\{Z^k\times R^{n-k}\})$ найдется $n-k$ неравенств, обращающихся в ней в равенство. Каждой вершине z из $V(D(J)\cap Z^k)$ однозначно соответствует вершина $(z, B_{2\,2}(J)^{-1}(f_2(J)-B_{2\,1}(J)z))$ из $V(D\cap\{Z^k\times R^{n-k}\})$. Это соответствие сохраняет свойство «внутренности» вершин. Так как в каждой внутренней вершине $V(D\cap\{Z^k\times R^{n-k}\})$ в равенство обращается только $n-k$ неравенств, то при разных множествах J_1 и J_2 из C_k^n внутренним вершинам из $V(D(J_1)\cap Z^k)$ и $V(D(J_2)\cap Z^k)$ соответствуют разные вершины из $V(D\cap\{Z^k\times R^{n-k}\})$. Следовательно,

$$\Phi^k_{\tau,\gamma}(D) \geqslant \sum_{\substack{J\in C_k^n\\ \det B_{2\,2}(J)\neq 0}} \Phi^k_{\tau,\gamma}(D(J)). \tag{10}$$

Из (4), (10) и (9) получаем, что при простом полиэдре M, достаточно большом простом γ и $\tau > 2n\gamma\Delta_n(M)^2$ выполняется неравенство

$$\phi^k_{\tau,\gamma}(M) \geqslant \sum_{v\in V(M)} \left(\sum_{\substack{J\in C_k^n\\ \det A^v_{2\,2}(J)\neq 0}} \frac{\ln^{k-1}\gamma}{2^{2k+3}(k-1)!k^k} \right). \tag{11}$$

В качестве M возьмем полиэдр $DC_n(m)$. Так как в последних $n-k$ столбцах матрицы все миноры $(n-k)$-го порядка отличны от нуля, то

$$\sum_{v\in V(M)} \sum_{\substack{J\in C_k^n\\ \det A^v_{2\,2}(J)\neq 0}} 1 = \xi_n(m)\binom{n}{k}$$

и неравенство (3) очевидным образом следует из (11).

§ 3. Доказательства лемм 1–4

Доказательство леммы 1. По определению множества $T^k_{\tau,\gamma}(M)$ полиэдр D из этого множества задается системой неравенств $A(Bx - d) \leqslant \beta b$, где B — целочисленная матрица с определителем γ, $d \in Z^n$ и $\beta > 2n\gamma\Delta_n(M)^2$. Точка u является вершиной полиэдра D тогда и только тогда, когда точка $v = 1/(\beta(Bu - d))$ — вершина полиэдра M. Из целочисленности матрицы A, вектора b и правила Крамера следует, что если $e_i(b - Av) \neq 0$, то $e_i(B - Av) \geqslant 1/(\Delta_n(M))$. Подставляя в последнее неравенство вместо v ее выражение через u, получаем неравенство $e_j(\beta b - A(Bu - d)) \geqslant \beta/(\Delta_n(M))$. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что $\gamma\Delta_n(M) = \Delta_n(D)$ и $\beta/(\Delta_n(M)) > 2n\Delta_n(D)$.

Доказательство леммы 2. Пусть полиэдр D задан системой неравенств $Bx \leqslant f$ ($B \in Z^{m\times n}$, $f \in Z^m$), полиэдр D^v — системой неравенств $B^v x \leqslant f^v$ ($B^v v = f^v$), и пусть $t \in V(D^v \cap \{Z^k \times R^{n-k}\})$. Так как вектор $t - v$ принадлежит конусу $B^v x \leqslant 0$, то этот вектор может быть представлен в виде $t - v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i h^i$ неотрицательной комбинации его ребер. Не уменьшая общности, можно считать, что векторы $h^1, h^2, \ldots, h^n$ целочисленные и наибольший общий делитель всех компонент каждого вектора равен 1. Нетрудно видеть, что при этих условиях имеют место неравенства $|e_j B h^i| \leqslant \Delta_n(D)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, m$. Ни при каком i величина α_i не может быть больше 1, так как иначе векторы $t - h^i$ и $t + h^i$ содержатся в D^v. Значит, точка $t = (1/2)(t - h^i) + (1/2)(t + h^i)$ не является вершиной выпуклой оболочки точек из $D^v \cap \{Z^k \times R^{n-k}\}$. Следовательно, при $j = 1, 2, \ldots, m$ выполняются неравенства $|e_j B(t - v)| < n\Delta_n(D)$. Поскольку полиэдр D слабо связанный, то для любых различных вершин u и v полиэдра найдется r такое, что $|e_r B(u - v)| > 2n\Delta_n(D)$. Допущение, что $t \in V(D^v \cap \{Z^k \times R^{n-k}\}) \cap V(D^u \cap \{Z^k \times R^{n-k}\})$ приводит к неравенству $|e_r B(u - v)| \leqslant |e_r B(u - t)| + |e_r B(v - t)| < 2n\Delta_n(D)$, противоречащему предыдущему. Таким образом, первое утверждение леммы доказано. Поскольку $V_k(D) \subseteq V(D^v \cap Z^k \times R^{n-k})$, второе утверждение леммы следует из первого.

Убедимся в справедливости третьего утверждения леммы. Величина $e_j Bt$ не превосходит величин $e_j f$ при $e_j Bv = e_j f$ и $e_j f + e_j B(t - v) - (e_j f - e_j Bv)$ при $e_j Bv \neq e_j f$. Так как при $e_j Bv \neq e_j f$ по определению слабо связанного полиэдра выполняется неравенство $e_j f - e_j Bv > 2n\Delta_n(D) \geqslant e_j B(t - v)$, то $t \in D$ и в точке t в равенство могут обращаться только неравенства из системы $B^v x \leqslant f^v$. Тем самым доказаны включения $V(D \cap \{Z^k \times R^{n-k}\}) \subseteq \bigcup\limits_{v \in V(D)} V(D^v \cap \{Z^k \times R^{n-k}\})$ и $V_k(D) \subseteq \bigcup\limits_{v \in V(D)} V_k(D^v)$.

Пусть $t \in V(D \cap \{Z^k \times R^{n-k}\})$. Тогда найдется вектор c такой, что максимум линейной формы cx на $D \cap \{Z^k \times R^{n-k}\}$ достигается в единственной точке t. Обозначим через v вершину полиэдра D, в которой достигается максимум линейной формы на этом полиэдре. Если t не является вершиной выпуклой оболочки точек $D \cap \{Z^k \times R^{n-k}\}$, то найдется точка y из $V(D^v \cap \{Z^k \times R^{n-k}\})$ такая, что $cy \geqslant ct$. По доказанному выше $y \in D$, что противоречит определению вектора c. Следовательно, $t \in V(D^v \cap Z^k \times R^{n-k})$ и $V(D \cap \{Z^k \times R^{n-k}\}) \subseteq \bigcup\limits_{v \in V(D)} V(D^v \cap \{Z^k \times R^{n-k}\})$. Тем самым доказано третье утверждение леммы.

Для доказательства последнего утверждения леммы достаточно заметить, что если $t \in V_k(D)$, то по предыдущему найдется точка v из $V(D)$ такая, что $t \in V(D^v \cap \{Z^k \times R^{n-k}\})$, а значит, $t \in V_k(D^v)$.

Доказательство леммы 3. Пусть точка u удовлетворяет условиям леммы и не принадлежит множеству $V(\Gamma(b))$. В этом случае u является выпуклой комбинацией точек $h^0, h^1, \ldots, h^n$ из $\Gamma(b)$ с коэффициентами $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Пусть λ_j — наибольший из этих коэффициентов Так как $h^j \geqslant 0$, то точка $h^j - u$ принадлежит Λ и $-u \leqslant h^j - u$. С другой стороны, справедливы соотношения

$$h^j - u = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_j}(u - h^i) \leqslant \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} u \leqslant n\, u.$$

Но существование точки $h^j - u$ противоречит условиям леммы. Следовательно, допущение неверно и u — вершина.

Доказательство леммы 4. Обозначим через Λ_1 решетку $\{x \mid x \in \Lambda, x \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, n)\}$. Число различных классов фактор-множества $Z^n \mid \Lambda_1$ не превосходит $n^n \det B$. В каждом классе Sk существует вектор с неотрицательными компонентами, не превосходящими $n \det B$. Этот вектор обозначим через $y(Sk)$. Пусть $\overline{K}_\gamma$ — множество целочисленных векторов с компонентами, большими γ. Для произвольного класса Sk имеет место включение $\{Sk \cap \overline{K}_n \det B\} - y(Sk - n\,f) \subseteq nH$. Следовательно,

$$\sum_{\substack{x \in H \\ 2\nu(nx) \leqslant \gamma}} 1 \geqslant \sum_{\substack{x \in Sk \cap \overline{K}_n \\ 2\nu(x - y(Sk - nb)) \leqslant \gamma}} 1 \geqslant \sum_{\substack{x \in Sk \cap \overline{K}_n \\ 2\nu(x) \leqslant \gamma}} 1.$$

Просуммировав эти неравенства по всем классам из фактор-множества Z^n / Λ_1, получим неравенство

$$\sum_{\substack{x \in nH \\ 2\nu(nx) \leqslant \gamma}} 1 \geqslant \frac{1}{n^n \det B} \sum_{\substack{x \in \overline{K}_n \det B \\ 2\nu(x) \leqslant \gamma}} 1. \tag{12}$$

Пусть $h^1, h^2, \ldots, h^{\nu(x)}$ — точки из Λ, компоненты которых по абсолютной величине не превосходят соответствующих компонент точки x. Из множества этих точек выделим наибольшее подмножество точек с одинаковым знаком соответствующих компонент. Не уменьшая общности, можно считать, что это подмножество состоит из точек $h^1, h^2, \ldots, h^r$ ($r \geqslant \nu(x)2^{-n}$). Рассмотрим фактор-множество Z^n/Λ. Число классов равно $\det B$, и в каждом классе Sk существует вектор $y(Sk)$ с компонентами, по абсолютной величине не большими $\det B$ и имеющими тот же знак, что и соответствующие компоненты точки h^1. При x, принадлежащем $\overline{K}_{n \det B}$, и $j = 1, 2, \ldots, k$ точка $h^j - y(Sk)$ для любого класса Sk из Z^n/Λ имеет компоненты, не превосходящие соответствующих компонент точки x. Так как $y(Sk_1) - y(Sk_2) = h^j - h^s \in \Lambda$, то из равенства $h^j - y(Sk_1) = h^s - y(Sk_2)$ вытекает, что $Sk_1 = Sk_2$ и $h^j = h^s$. Поэтому найдется не менее $\det B\nu(x)2^{-n}$ целочисленных точек с компонентами, не превосходящими по абсолютной величине соответствующих компонент точки x. С другой стороны, число таких точек равно $\prod_{i=1}^{n}(1 + 2|x_i|)$. Тем самым установлено неравенство $\prod_{i=1}^{n}(1 + 2|x_i|) \geqslant 2^{-n}\nu(x) \det B$. Записав это неравенство в виде $\nu(x) \leqslant (2^n/\det B) \prod_{i=1}^{n}(1 + 2|x_i|)$ и подставив его в (14), получаем

$$\sum_{\substack{x \in H \\ 2\nu(nx) \leqslant \gamma}} 1 \geqslant \frac{1}{n^n \det B} \sum_{\substack{x \in \overline{K}_{n \det B} \\ 2^{n+1} \prod_{i=1}^{n}(1+2x_i) \leqslant \gamma \det B}} 1.$$

Положим $D = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \geqslant n \det B,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ \prod_{i=1}^{n}(3 + 2x_i) \leqslant 2^{-n-1}\gamma \det B\}$ и запишем очевидное неравенство

$$\sum_{\substack{x \in \overline{K}_{n \det B} \\ 2^{n+1} \prod_{i=1}^{n}(1+2x_i) \leqslant \gamma \det B}} 1 \geqslant \int_D \cdots \int dx.$$

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться в том, что

$$\int_D \cdots \int dx = (-1)^n(3 + 2n \det B)^n 2^{-n}$$

$$+ \frac{\gamma \det B}{2^{2n+1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n-i+1}(\ln(\frac{\gamma \det B}{2^{n+1}}) - n\ln(3 + 2n \det B))^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Утверждение леммы 4 следует из последних трех соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Веселов С. И.** Нахождение выпуклой оболочки целых точек полиэдра на плоскости / Горьк. гос. ун-т. М., 1988. 12 с. Деп. в ВИНИТИ. 07.12.88. № 8624–В88.
2. **Шевченко В. Н.** О числе крайних точек в целочисленном программировании // Кибернетика. 1981. № 2. С. 133–134.
3. **Веселов С. И.** Нижняя оценка среднего числа неприводимых и крайних точек в двух задачах дискретного программирования / Горьк. гос. ун-т. М., 1984. 8 с. Деп. в ВИНИТИ. 03.06.84. № 619–В84.
4. **Cook W., Hartmann M., Kannan R., McDiarmid C.** On integer points in polyhedra // Combinatorica. 1992. V. 12, N 1. P. 27–37.
5. **Чирков А. Ю., Шевченко В. Н.** О числе вершин выпуклой оболочки пересечения полиэдра с целочисленной решеткой / Нижегород. гос. ун-т. М., 1993. 12 с. Деп. в ВИНИТИ. 29.07.93. № 2165–В93.
6. **Карацуба А. А.** Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
7. **Шевченко В. Н.** Алгебраический подход в целочисленном линейном программировании // Кибернетика. 1984. № 4. С. 36–41.
8. **Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.** Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
9. **Шевченко В. Н.** Верхние оценки числа крайних точек в целочисленном программировании // Мат. вопросы кибернетики. М.: Наука, 1992. Вып. 4. С. 65–72.

Адрес автора:

Россия,
603600 Нижний Новгород,
пр. Гагарина, 23,
Нижегородский
государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского

Статья поступила

23 ноября 1994 г.