ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1996. Том 3, № 3, 3–39

УДК 517.5+519.7

ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ БЕСКОНЕЧНО ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Г. Г. Аманжаев

Вводятся дискретные аналоги некоторых классов аналитических функций и исследуется «массивность» этих классов. Показывается, что такой подход применим и к некоторым классам бесконечно гладких неаналитических функций. Изучается сложность приближенных вычислений аналитических функций схемами из функциональных элементов.

Введение

В теории функций более 40 лет назад (см. дополнение к переводу [1] Л. С. Понтрягина и Л. Г. Шнирельмана) возникла и получила развитие идея о такой характеристике «массивности» множеств в метрических пространствах, как порядок роста мощности их минимальных ε-покрытий при стремлении ε к нулю; оценки подобных величин позволили А. Г. Витушкину [2] доказать теорему о неизбежности понижения гладкости при представлении функции через суперпозицию функций с меньшим числом переменных. А. Н. Колмогоров ввел понятие ε-энтропии и ε-емкости множеств (первое систематическое изложение результатов в этой области см. в [3]) и выдвинул программу исследования этих величин для различных компактов в функциональных пространствах, которая к настоящему времени в значительной мере выполнена.

В дальнейшем эти понятия оказались существенно полезными при определении сложности приближенного вычисления функций. Идея предложенной А. Н. Колмогоровым [3] конструкции, развитой его учениками и последователями [4–7], состоит в следующем.

Пусть $f : A \to B$ — приближаемая функция, A и B — некоторые интервалы. Пусть A и B разбиты на равные отрезки ($A = \bigcup\limits_i A_i$, $B = \bigcup\limits_j B_j$). Пусть g — функция, которая на каждом отрезке A_i принимает постоянное значение, равное значению функции f в средней точке этого отрезка. Говорят, что g ε-приближает f, если $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Занумеровав отрезки A_i и B_j их индексами и записав их в двоичной системе, каждой функции g поставим в соответствие дискретный двоичный оператор, который можно реализовать схемой из функциональных элементов [8]. *Сложностью ε-приближения функции f* называется наименьшая сложность двоичных операторов, соответствующих функциям g, ε-приближающим f.

Для такого определения сложности ε-приближения получен ряд существенных результатов. Однако этот подход обладает тем недостатком, что дискретные операторы и классы дискретных операторов, с помощью которых осуществляется приближенное вычисление непрерывных функций, определяются исключительно как «хорошие приближения» последних, т. е. весьма неявно и неконструктивно. В частности, ответ на вопрос, ε-приближает ли заданный булев оператор F какую-либо непрерывную функцию из заданного класса K, требует в принципе проверки бесконечного (даже не счетного) множества потенциально приближаемых функций f из K, что затруднительно и заведомо требует много времени. Чтобы избежать этого, хотелось бы определить классы дискретных функций, приближающих непрерывные, таким образом, чтобы в определении участвовал не сам класс приближаемых функций, а свойства дискретных функций, по возможности просто алгоритмически проверяемые (задача в таком виде была поставлена О. Б. Лупановым). Надежда на то, что этот путь может дать результаты, полезные для дискретной математики (подобно тому, как введение ε-энтропии помогло прояснить ситуацию с возможностью представления непрерывных функций суперпозициями), явилась стимулом для настоящего исследования. Автору удалось дать дискретное определение аналогов классов непрерывных функций различной гладкости и ввести для них меру «массивности», подобную ε-энтропии непрерывных функций.

В § 1 даются необходимые определения и приводятся необходимые вспомогательные утверждения. Некоторые из них, возможно, достаточно известны или просты, но все же полезны для полноты картины.

В § 2, который является основным в данной работе, вводятся дискретные аналоги некоторых классов аналитических функций и исследуется «массивность» этих классов с помощью введенной величины $\log \mathrm{Approx}$.

В § 3 показано, что этот же подход применим и к некоторым классам бесконечно гладких неаналитических функций.

В § 4 исследуется сложность приближенного вычисления аналитических функций схемами из функциональных элементов. Показано, что это вычисление можно сделать существенно более простым, чем при обычном разложении функции в ряд (получен выигрыш приблизительно

в $\log\log n$ раз для вычислений с n значащими цифрами), хотя найденные оценки сложности еще далеки от окончательных.

Автор выражает глубокую благодарность своему учителю О. Б. Лупанову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

§ 1. Основные определения и вспомогательные утверждения

В определении дискретных аналогов классов непрерывных функций, исследуемых ниже, существенной является замена производных конечными разностями. Ниже мы дадим известное общее определение конечных разностей и напомним их необходимые свойства.

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — различные точки из области определения функции f. Индуктивно определим n-е разделенные конечные разности функции f.

1. Положим $\Delta_0(f; x_0) = f(x_0)$ (разность нулевого порядка, как и производную нулевого порядка, естественно считать равной самой функции).

2. Имея n-ю разность Δ_n, определим $(n+1)$-ю разность соотношением

$$\Delta_{n+1}(f; x_0, \ldots, x_{n+1}) = \frac{\Delta_n(f; x_1, \ldots, x_{n+1}) - \Delta_n(f; x_0, \ldots, x_n)}{x_{n+1} - x_0}.$$

Из определения конечных разностей непосредственно следует

Утверждение 1. *Разность Δ_n обладает следующими свойствами:*
а) *величина $\Delta_n(f; x_0, \ldots, x_n)$ линейна по f;*
б) *справедливы соотношения*

$$\Delta_n(f(c\,\cdot); x_0, x_1, \ldots, x_n) = c^n \Delta_n(f(\cdot); cx_0, \ldots, cx_n),$$
$$\Delta_n(f(\cdot + c); x_0, \ldots, x_n) = \Delta_n(f(\cdot); x_0 + c, \ldots x_n + c).$$

Утверждение 2. *Справедливо разложение*

$$\Delta_n(f; x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x_i) \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} \right).$$

Доказательство. Пусть $d_{n,k}(x_0, \ldots, x_n) = \Delta_n(f_k; x_0, \ldots, x_n)$, где функция f_k удовлетворяет соотношениям $f_k(x_k) = 1$ и $f_k(x) = 0$ при $x \neq x_k$. Индукцией по n покажем, что

$$d_{n,k}(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i}.$$

При $n = 0$ по определению имеем $d_{0,0}(x_0) = 1$; это согласуется с представлением $\prod\limits_{i\in\varnothing} \frac{1}{x_0 - x_i}$ (такую величину естественно считать равной 1).

Пусть $n > 0$. Если $k = 0$, то

$$d_{n,0}(x_0, \ldots, x_n) = \Delta_n(f_0; x_0, \ldots, x_n)$$
$$= -\frac{-d_{n-1,0}(x_0, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_0 - x_i}.$$

Далее, при $0 < k < n$ имеем

$$d_{n,k}(x_0, \ldots, x_n) = \frac{d_{n-1,k-1}(x_1, \ldots, x_n) - d_{n-1,k}(x_0, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$$
$$= \frac{\prod_{i=1,i\neq k}^{n} \frac{1}{x_k - x_i} - \prod_{i=0,i\neq k}^{n-1} \frac{1}{x_k - x_i}}{x_n - x_0} = \prod_{i=0,i\neq k}^{n} \frac{1}{x_k - x_i}.$$

Наконец, если $k = n$, то

$$d_{n,k}(x_0, \ldots, x_n) = \frac{d_{n-1,k-1}(x_1, \ldots, x_n)}{x_n - x_0} = \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{x_n - x_i}.$$

В силу линейности величины Δ_n по f получаем

$$\Delta_n(f; x_0, \ldots, x_n) = \Delta_n(f(x_0)f_0(\cdot) + \cdots + f(x_n)f_n(\cdot); x_0, \ldots, x_n)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) d_{n,i}(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x_i) \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} \right).$$

Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *Величина $\Delta_n(f; x_0, \ldots, x_n)$ симметрична по $x_0, \ldots, x_n$.*

Справедливость этого утверждения следует из утверждения 2.

Утверждение 4. *При $f(x) = x^n$ справедливо разложение*

$$\Delta_k(f; x_0, \ldots, x_k) = \sum_{\substack{i_0+\cdots+i_k=n-k \\ i_0,\ldots,i_k\geqslant 0}} x_0^{i_0} \ldots x_k^{i_k}.$$

Доказательство. При $k = 0$ по определению имеем

$$\Delta_0(f; x_0) = x_0^n = \sum_{i_0\geqslant 0, i_0=n} x_0^{i_0}.$$

Пусть требуемое соотношение доказано для $k-1$. Тогда для k получаем

$$\Delta_k(f;x_0,\ldots,x_k) = \frac{\Delta_{k-1}(f;x_1,\ldots,x_k) - \Delta_{k-1}(f;x_0,\ldots,x_{k-1})}{x_k - x_0}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\substack{i_1,\ldots,i_k\geqslant 0\\ i_1+\cdots+i_k=n-k+1}} x_1^{i_1}\ldots x_k^{i_k} - \sum\limits_{\substack{i_0,\ldots,i_{k-1}\geqslant 0\\ i_0+\cdots+i_{k-1}=n-k+1}} x_0^{i_0}\ldots x_{k-1}^{i_{k-1}}}{x_k - x_0}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\substack{j,i_1,\ldots,i_{k-1}\geqslant 0\\ j+i_1+\cdots+i_{k-1}=n-k+1}} x_1^{i_1}\ldots x_{k-1}^{i_{k-1}}\left(x_k^j - x_0^j\right)}{x_k - x_0}$$

$$= \sum_{\substack{j,i_1,\ldots,i_{k-1}\geqslant 0\\ j+i_1+\cdots+i_{k-1}=n-k+1}} x_1^{i_1}\ldots x_{k-1}^{i_{k-1}}\left(x_k^{j-1}x_0^0 + x_k^{j-2}x_0^1 + \cdots + x_k^0 x_0^{j-1}\right)$$

$$= \sum_{\substack{i_0+\cdots+i_k=n-k\\ i_0,\ldots,i_k\geqslant 0}} x_0^{i_0}\ldots x_k^{i_k}.$$

Утверждение 4 доказано.

Следствие. *Пусть $f(x)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом a. Тогда*

$$\Delta_k(f;x_0,\ldots,x_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k > n, \\ a & \text{при } k = n. \end{cases}$$

Утверждение 5. *Пусть A — связное подмножество R, функция $f: A \to R$ имеет $n-1$ производную, причем $|f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(y)| \leqslant c|x-y|$. Тогда при $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, $x_i \in A$, $i = 1,2,\ldots,n$, справедливо неравенство $|\Delta_n(f;x_0,\ldots,x_n)| \leqslant c/n!$.*

Доказательство. Рассмотрим многочлен $p(x)$ степени n, совпадающий с $f(x)$ в точках $x_0,\ldots,x_n$. Пусть старший коэффициент этого многочлена равен a. Обозначим $h(x) = f(x) - p(x)$, тогда $h(x_0) = h(x_1) = \cdots = h(x_n) = 0$. Следовательно, $\Delta_n(f) = \Delta_n(h) + \Delta_n(p) = \Delta_n(p) = a$.

Заметим также, что $\dfrac{d^{n-1}p(x)}{dx^{n-1}} = an!x + b$, где b — константа.

Функция h имеет $n-1$ производную и $n+1$ нуль. Поэтому $h^{(1)}$ имеет n нулей, $h^{(2)}$ имеет $n-1$ нуль, … , $h^{(n-1)}$ имеет два нуля.

Пусть этими нулями являются y_1 и y_2 (т. е. $h^{(n-1)}(y_1) = h^{(n-1)}(y_2) = 0$). Так как $h = f - p$, то $f^{(n-1)}(y_1) = p^{(n-1)}(y_1)$ и $f^{(n-1)}(y_2) = p^{(n-1)}(y_2)$. Поэтому

$$|f^{(n-1)}(y_1) - f^{(n-1)}(y_2)| = |p^{(n-1)}(y_1) - p^{(n-1)}(y_2)|.$$

По условию левая часть не превосходит $c|y_1 - y_2|$, а правая равна $|a|n!|y_1 - y_2|$. Поэтому $|a|n! \leqslant c$, т. е. $|a| \leqslant c/n!$. Следовательно, $|\Delta_n(f)| \leqslant c/n!$. Утверждение 5 доказано.

Рассмотрим теперь величину

$$\varphi_n(x_0, \ldots, x_n) = \sup_{h:|h|\leqslant 1/2} \Delta_n(h; x_0, \ldots, x_n),$$

где супремум берется по всем функциям h, принимающим значения из отрезка $[-1/2, 1/2]$. Согласно утверждению 2 супремум достигается для функции h такой, что

$$h(x_i) = \frac{1}{2} \operatorname{sign} \prod_{j=0, j\neq i} (x_i - x_j);$$

в частности, при $x_0 > x_1 > \cdots > x_n$ имеем $h(x_i) = (-1)^i/2$.

Согласно утверждению 2 функция $\varphi_n(x_0, \ldots, x_n)$ представима в виде

$$\varphi_n(x_0, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{1}{|x_i - x_j|}.$$

Кроме того, непосредственно из рекурсивного определения конечных разностей следует, что если $x_0 > x_1 > \cdots > x_n$, то

$$\varphi_0(x_0) = 1/2;$$
$$\varphi_n(x_0, \ldots, x_n) = \frac{\varphi_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) + \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)}{x_0 - x_n}.$$

Для φ_n справедлива также следующая несложная верхняя оценка.

Утверждение 6. *При любых $x_0 > x_1 > \cdots > x_n$ выполнено неравенство*

$$\varphi_n(x_0, \ldots, x_n) \leqslant \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_1 - x_2) \ldots (x_{n-1} - x_n)}.$$

Утверждение 7. *При любых $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ справедливо неравенство*

$$\varphi_n(x_0, \ldots, x_n) \geqslant 4^{n-1}/(b-a)^n,$$

причем равенство достигается только в случае, когда $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ — точки альтернанса многочлена Чебышева

$$\cos\left(n \arccos\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right)\right).$$

Доказательство. Без ограничения общности (в силу утверждения 3) рассмотрим только случай, когда $x_0 > x_1 > \cdots > x_n$. В этом случае имеем

$$\varphi_n(x_0, \ldots, x_n) = \Delta_n(f; x_0, \ldots, x_n),$$

где f — любая функция такая, что $f(x_i) = (-1)^i/2$. В частности, в качестве f можно взять интерполяционный многочлен Лагранжа

$$g(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{1}$$

Поскольку степень этого многочлена равна n, то

$$\varphi_n(x_0, \ldots, x_n) = \Delta_n(g; x_0, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n g(x)}{dx^n}.$$

Покажем, что $\min_g \|g^{(n)}(x)\|_{C[a,b]}$ (минимум берется по всем многочленам вида (1)) достигается только на многочлене Чебышева

$$g_0(x) = \frac{1}{2}\cos\left(n \arccos\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right)\right).$$

Предположим, что экстремален какой-либо другой многочлен $g_1(x)$, принимающий знакочередующиеся значения $\pm 1/2$ в точках $x_0, \ldots, x_n$, где $b \geqslant x_0 > x_1 > \cdots > x_n \geqslant a$. Обозначим через $t_1, \ldots, t_n$ нули многочлена $g_1(x)$ $(x_{i-1} > t_i > x_i)$, а через $u_1, \ldots, u_{n-1}$ — нули его производной $(t_i > u_i > t_{i+1})$. Пусть также $u_0 = b$, $u_n = a$. Тогда

$$b = u_0 > t_1 > u_1 > t_2 > u_2 > \cdots > u_{n-1} > t_n > u_n = a.$$

Возможны два случая:

а) $|g_1(u_i)| = 1/2$ при всех i, $0 \leqslant i \leqslant n$;

б) при некотором i справедливо неравенство $|g_1(u_i)| > 1/2$.

В первом случае $g_1 = \pm g_0$, ибо только для многочлена Чебышева на отрезке имеется $n + 1$ локальных экстремумов, одинаковых по абсолютной величине. Во втором случае рассмотрим многочлены $g_\alpha(x)$ вида

$$g_\alpha(x) = g_1(x) + \alpha(x - u_0)(x - u_1)\ldots(x - u_{i-1})(x - u_{i+1})\ldots(x - u_n).$$

Так как $|g_1(u_i)| > 1/2$, то при любых достаточно малых α на отрезке $[a, b]$ имеется $n + 1$ точек $s_0, s_1, \ldots, s_n$, $s_0 > s_1 > \cdots > s_n$, в которых g_α поочередно принимает значения $\pm 1/2$, но $\|g_\alpha^{(n)}\|_{C[a,b]} \leqslant \|g_1^{(n)}\|_{C[a,b]}$.

Итак,

$$\min \varphi_n(x_0, \ldots, x_n) = |\Delta_n(g; x_0, \ldots, x_n)| = \frac{1}{n!}|g_0^{(n)}(x)| = 4^{n-1}/(b - a)^n.$$

Утверждение 7 доказано.

Утверждение 8. *Пусть A — ограниченное подмножество действительной оси, n — целое неотрицательное число, функция f определена на A и для любых различных точек $x_0, \ldots, x_n \in A$ выполнено неравенство*

$$|\Delta_n(f; x_0, \ldots, x_n)| \leqslant c_1 + c_2\varphi_n(x_0, \ldots, x_n),$$

где c_1 и c_2 — положительные константы. Тогда f можно приблизить на A многочленом степени $n-1$ с погрешностью, не превосходящей величины

$$\frac{c_2}{2}+\frac{c_1\cdot|A|^n\cdot 2}{4^n},$$

где $|A|=\sup A-\inf A$.

Доказательство. Сначала докажем утверждение в случае *конечного* множества A. Если A содержит менее $n+1$ точек, то утверждение очевидно. В противном случае существует единственный многочлен $p(x)$ наилучшего равномерного приближения. Пусть погрешность этого приближения есть h. Если $h\leqslant c_2/2$, то утверждение 8 доказано. В противном случае найдутся точки $x_0>x_1>\cdots>x_n$, $x_i\in A$, чебышевского альтернанса, в которых разность $f(x)-p(x)$ поочередно принимает значения $\pm h$. Следовательно,

$$|\Delta_n(f-p;x_0,\dots,x_n)|=2h\varphi_n(x_0,\dots,x_n).$$

Поскольку многочлен p имеет степень $n-1$, то $\Delta_n(p)=0$ и $\Delta_n(f)=\Delta_n(f-p)$. Следовательно,

$$2h\varphi_n(x_0,\dots,x_n)\leqslant c_1+c_2\varphi_n(x_0,\dots,x_n).$$

Значит, $h\leqslant c_2/2+c_1/(2\varphi_n(x_0,\dots,x_n))$.

Согласно утверждению 7 имеем $\varphi_n(x_0,\dots,x_n)\geqslant 4^{n-1}/|A|^n$, где $|A|=\sup A-\inf A$. Поэтому $h\leqslant c_2/2+2c_1|A|^n/4^n$. Тем самым для конечных множеств A утверждение 8 доказано.

Теперь рассмотрим случай *счетных* ограниченных множеств A. Пусть $A=\{a_1,a_2,a_3,\dots\}$, $A_k=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$. Тогда для каждого A_k можно подобрать многочлен p_k степени $n-1$, приближающий f на A_k с погрешностью, не превосходящей величины

$$c_2/2+2c_1|A_k|^n/4^n\leqslant c_2/2+2c_1|A|^n/4^n.$$

Из последовательности этих многочленов можно выбрать равномерно сходящуюся на A подпоследовательность. Ее предел также будет многочленом степени $n-1$. Очевидно, что погрешность приближения этим многочленом не превосходит $c_2/2+2c_1|A|^n/4^n$.

Наконец, для *произвольного* ограниченного множества A поступим следующим образом. Выберем в A всюду плотное счетное подмножество A' такое, чтобы при любом x из $\mathbb{R}$ выполнялись равенства

$$\varlimsup_{x\to x_0,x\in A} f(x)=\varlimsup_{x\to x_0,x\in A'} f(x),$$
$$\varliminf_{x\to x_0,x\in A} f(x)=\varliminf_{x\to x_0,x\in A'} f(x)$$

(пределы могут быть как конечными, так и бесконечными). Тогда многочлен, приближающий f на A', будет приближать f и на A с не худшей погрешностью, а $|A|=|A'|$.

Утверждение 9. *Пусть* $N \in \mathbb{N}$, $c_n(x) = \cos(2\pi nx/N)$, $s_n(x) = \sin(2\pi nx/N)$. *Тогда в пространстве функций* $f : I_N \to \mathbb{R}$ *со скалярным произведением*

$$(f,g) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} f(k)g(k)$$

система

$$\{1, \sqrt{2}c_1, \ldots, \sqrt{2}c_{N/2-1}, c_{N/2}, \sqrt{2}s_1, \ldots, \sqrt{2}s_{N/2-1}\}$$

является ортонормированным базисом в случае четного N, *а система*

$$\{1, \sqrt{2}c_1, \ldots, \sqrt{2}c_{(N-1)/2}, \sqrt{2}s_1, \ldots, \sqrt{2}s_{(N-1)/2}\}$$

является ортонормированным базисом в случае нечетного N.

Это утверждение можно доказать, например, выразив s_m и c_m через комплекснозначные функции $e_n(x) = \exp(2\pi ikx/N)$, которые, очевидно, сами образуют ортонормированную систему.

Утверждение 10. *Пусть* $N \in \mathbb{N}$, $p_n(x) = \cos(n \arccos((2x+1)/N - 1))$ *и пусть на пространстве функций* $f : I_N \to \mathbb{R}$ *задано скалярное произведение*

$$(f,g) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k)g(k)\mu_k,$$

где

$$\mu_k = \int\limits_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{2dx}{\sqrt{1-(1-(2x+1)/N)^2}}.$$

Тогда величины $g_{nm} = (p_n, p_m)$ *удовлетворяют соотношениям* $|g_{nn} - \frac{\pi}{2}| \leqslant 2Kn\log N/N$ *и* $|g_{nm}| \leqslant K(n+m)\log N/N$ *(при* $n \neq m$*), где* K *— некоторая абсолютная константа и* $n, m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть

$$\gamma_{nm} = \frac{2}{N}\int\limits_{-1/2}^{N-1/2} \frac{p_n(x)p_m(x)dx}{\sqrt{1-(1-(2x+1)/N)^2}}$$

(мы рассматриваем только случай $n, m \geqslant 1$). Величину g_{nm} можно записать в виде

$$g_{nm} = \frac{2}{N}\int\limits_{-1/2}^{N-1/2} \frac{p_n(\langle x\rangle)p_m(\langle x\rangle)dx}{\sqrt{1-(1-(2x+1)/N)^2}},$$

где $\langle x\rangle$ — ближайшее целое (из I_N) к x.

Найдем γ_{nm}. Положив $x = (Ny + N - 1)/2$, получаем

$$\gamma_{nm} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos(n \arccos y)\cos(m \arccos y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy.$$

Далее, положив $y = \cos t$, где $0 \leqslant t \leqslant \pi$, имеем

$$\gamma_{nm} = \int\limits_{0}^{\pi} \cos nt \cos mt\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\, dt = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ \pi/2, & \text{если } n = m. \end{cases}$$

Из определения следует, что величина g_{nm} является интегральной суммой для γ_{nm}. Оценим разность этих величин. Имеем

$$|\gamma_{nm} - g_{nm}| \leqslant \frac{2}{N}\int\limits_{-1/2}^{N-1/2} \frac{|p_n(x)p_m(x) - p_n(\langle x\rangle)p_m(\langle x\rangle)|dx}{\sqrt{1-(1-(2x+1)/N)^2}}$$

$$\leqslant \frac{2}{N}\int\limits_{-1/2}^{N-1/2} \frac{|p_n(x)|\cdot|p_m(x) - p_m(\langle x\rangle)|dx}{\sqrt{1-(1-(2x+1)/N)^2}}$$

$$+ \frac{2}{N}\int\limits_{-1/2}^{N-1/2} \frac{|p_m(\langle x\rangle)|\cdot|p_n(x) - p_n(\langle x\rangle)|dx}{\sqrt{1-(1-(2x+1)/N)^2}}$$

$$\leqslant \frac{2}{N}\int\limits_{-1/2}^{N-1/2} \frac{|p_m(x) - p_m(\langle x\rangle)|dx}{\sqrt{1-(1-(2x+1)/N)^2}}$$

$$+ \frac{2}{N}\int\limits_{-1/2}^{N-1/2} \frac{|p_n(x) - p_n(\langle x\rangle)|dx}{\sqrt{1-(1-(2x+1)/N)^2}} = r_m + r_n,$$

где

$$r_i = \frac{2}{N}\int\limits_{-1/2}^{N-1/2} \frac{|p_i(x) - p_i(\langle x\rangle)|dx}{\sqrt{1-(1-(2x+1)/N)^2}}.$$

Далее

$$|p_i(x) - p_i(\langle x\rangle)| \leqslant \left|\int\limits_{x}^{\langle x\rangle} p_i'(t)dt\right|.$$

В свою очередь,

$$|p_i'(t)| = \left|\frac{2i}{N}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2t+1}{N}-1\right)^2}}(\sin i \arccos t)\right| \leqslant \frac{2i}{N}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2t+1}{N}-1\right)^2}}.$$

Поэтому

$$|p_i(x) - p_i(\langle x\rangle)| \leqslant \frac{2i}{N}\left|\int\limits_x^{\langle x\rangle} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2t+1}{N}-1\right)^2}}dt\right|.$$

Положив $y = (2t+1)/N - 1$, получаем

$$|p_i(x) - p_i(\langle x\rangle)| \leqslant \frac{2i}{N}\left|\int\limits_{(2x+1)/N-1}^{(2\langle x\rangle+1)/N-1} \left(\frac{N}{2}/\sqrt{1-y^2}\right)dt\right|$$

$$= i\left|\arccos\left(\frac{2\langle x\rangle+1}{N}-1\right) - \arccos\left(\frac{2x+1}{N}-1\right)\right|.$$

Поэтому

$$r_i \leqslant \frac{2i}{N}\int\limits_{-1/2}^{N-1/2} \frac{\left|\arccos\left(\frac{2\langle x\rangle+1}{N}-1\right) - \arccos\left(\frac{2x+1}{N}-1\right)\right|dx}{\sqrt{1-(1-(2x+1)/N)^2}}$$

$$= \frac{2i}{N}\left(\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{\left|\arccos\left(\frac{2(x+j)+1}{N}-1\right) - \arccos\left(\frac{2j+1}{N}-1\right)\right|dx}{\sqrt{1-(1-(2x+1)/N)^2}}\right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{0}^{1/2} \frac{\left|\arccos\left(\frac{2j+1}{N}-1\right) - \arccos\left(\frac{2(x+j)+1}{N}-1\right)\right|dx}{\sqrt{1-(1-(2x+1)/N)^2}}\right).$$

Так как две стоящие здесь суммы равны (замена $x \to -x$ и $j \to N-1-j$ переводит одну сумму в другую), то

$$r_i \leqslant \frac{4i}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_0^{1/2}\frac{\arccos\left(\frac{2j+1}{N}-1\right)dx}{\sqrt{1-(1-\frac{2(x+j)+1}{N})^2}} - \frac{4i}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_0^{1/2}\frac{\arccos\left(\frac{2x+2j+1}{N}-1\right)dx}{\sqrt{1-(1-\frac{2(x+j)+1}{N})^2}}.$$

В свою очередь,

$$\arccos\left(\frac{2j+1}{N}-1\right)\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-(1-(2(x+j)+1)/N)^2}}$$

$$= \arccos\left(\frac{2j+1}{N}-1\right)\int\limits_{1-(2j+2)/N}^{1-(2j+1)/N}\frac{(N/2)dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \tfrac{N}{2}\arccos\left(\tfrac{2j+1}{N}-1\right)\left(\arccos\left(1-\tfrac{2j+2}{N}\right)-\arccos\left(1-\tfrac{2j+1}{N}\right)\right)$$

$$= \tfrac{N}{2}\arccos\left(\tfrac{2j+1}{N}-1\right)\left(\arccos\left(\tfrac{2j+1}{N}-1\right)-\arccos\left(\tfrac{2j+2}{N}-1\right)\right),$$

а

$$\int_0^{1/2} \frac{\arccos\left(\frac{2(x+j)+1}{N}-1\right)dx}{\sqrt{1-\left(1-\frac{2(x+j)+1}{N}\right)^2}}$$

$$= \int_{\frac{2j+1}{N}-1}^{\frac{2j+2}{N}-1} \frac{\arccos y \frac{N}{2} dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{N}{2}\int_{\frac{2j+1}{N}}^{\frac{2j+2}{N}-1} (-\arccos y) d(\arccos y)$$

$$= \frac{N}{4}\left(\arccos^2\left(\frac{2j+1}{N}-1\right) - \arccos^2\left(\frac{2j+2}{N}-1\right)\right).$$

Поэтому

$$r_i \leqslant i\sum_{j=0}^{N-1}\left(\arccos\left(\frac{2j+1}{N}-1\right) - \arccos\left(\frac{2j+2}{N}-1\right)\right)^2$$

$$= \frac{i}{2}\sum_{j=-N}^{N-1}\left(\arccos\frac{j}{N} - \arccos\frac{j+1}{N}\right)^2$$

$$= i\sum_{j=0}^{N-1}\left(\arccos\frac{j}{N} - \arccos\frac{j+1}{N}\right)^2.$$

Поскольку из соотношения $|\arccos' x| = 1/\sqrt{1-x^2} \leqslant 1/(\sqrt{2}\sqrt{1-x})$ следует, что

$$\left|\arccos\frac{j}{N} - \arccos\frac{j+1}{N}\right| \leqslant \sqrt{2}\left|\sqrt{1-\frac{j}{N}} - \sqrt{1-\frac{j+1}{N}}\right|,$$

то

$$r_i \leqslant 2i\sum_{j=0}^{N-1}\left(\sqrt{1-j/N} - \sqrt{1-(j+1)/N}\right)^2 = \frac{2i}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\sqrt{j}-\sqrt{j+1}\right)^2$$

$$= \frac{2i}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{(\sqrt{j}+\sqrt{j+1})^2} \leqslant \frac{2i}{N}\left(1+\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{4j}\right) \leqslant \frac{2i}{N}\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\sum_{j=2}^{N-1}\frac{1}{j}\right)$$

$$\leqslant \frac{2i}{N}\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\int_1^{N-1}\frac{dx}{x}\right) = \frac{2i}{N}\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\ln(N-1)\right).$$

Следовательно, можно найти такую константу $k > 0$, что при всех $N \geqslant 2$ выполнено неравенство $r_i \leqslant ki\log N/N$. Поэтому $|g_{nm} - j_{nm}| \leqslant k(n +$

$m)\log N/N$. С учетом (1) из этого неравенства следует справедливость утверждения 10.

Определение величины Approx. На множестве функций f, определенных на I_N, введем норму $\|\cdot\|_p$, где $1 \leqslant p < \infty$, задав ее соотношением

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} |f(x)|^p\right)^{1/p};$$

множитель $1/N$ добавлен для того, чтобы функция $f \equiv 1$ имела единичную норму. Ясно, что «предельная» норма

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$$

совпадает с равномерной $\|f\| = \max|f(x)|$. Если $x_i \geqslant 0$ и $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$, то в силу известного неравенства

$$\left(\frac{x_1^p + \cdots + x_N^p}{N}\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{x_1^q + \cdots + x_N^q}{N}\right)^{1/q}$$

можно утверждать, что для любой функции f имеет место соотношение $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_p \leqslant \|f\|_q \leqslant \|f\|_\infty$; для $f = \mathrm{const}$ эти неравенства обращаются в равенства.

Определение. Множество дискретных функций A называется 1-*приближающим* для класса K в метрике $\|\cdot\|_p$, если для каждой функции $f \in K$ в A имеется такая функция g, что $\|f-g\|_p \leqslant 1$.

Минимальную мощность 1-приближающего в метрике $\|\cdot\|_p$ множества для класса K обозначим через $\mathrm{Approx}_p(K)$ (ниже обычно используется двоичный логарифм этой величины). Связь между нормами для разных p при $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ приводит к неравенству

$$\mathrm{Approx}_1(K) \leqslant \mathrm{Approx}_p(K) \leqslant \mathrm{Approx}_q(K) \leqslant \mathrm{Approx}_\infty(K).$$

§ 2. Дискретный аналог аналитических функций

В работах [9, 10] рассматривались классы функций $f(x)$ с конечной гладкостью, т. е. функции, удовлетворяющие ограничению вида $|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y)| \leqslant \omega(|x-y|)$ (или его частным случаям: $\leqslant c|x-y|^\alpha$, $\leqslant c|x-y|$, $\leqslant c$). Были построены и исследованы дискретные аналоги этих классов, которые определялись с помощью некоторых ограничений для $(n+1)$-й разности.

Естественно рассмотреть и функции бесконечной гладкости, среди которых в первую очередь выделяется класс аналитических функций.

Известно, что аналитические функции можно определять двумя эквивалентными способами: как функции, имеющие комплексную производную, и как функции, разлагающиеся в ряд по степеням $(x - x_0)$ в любой внутренней точке x_0 области определения.

Пусть λ — положительный параметр. Через $\Omega(\lambda)$ обозначим λ-окрестность отрезка $[0, 1]$, а через $\overset{\circ}{\Omega}(\lambda)$ — полосу $|\operatorname{Im} z| < \lambda$.

Введем следующие классы аналитических функций:

$A_{\lambda,c}$ — класс бесконечно дифференцируемых функций $f : [0,1) \to [0,1)$ таких, что

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant c\lambda^{-n}n!;$$

$\mathring{A}_{\lambda,c}$ — класс бесконечно дифференцируемых функций $f : \mathbb{R} \to [0,1)$, периодических с периодом 1 и при всех $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяющих условию

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant c\lambda^{-n}n!;$$

$A'_{\lambda,c}$ — класс аналитических на $\Omega(\lambda)$ функций f, ограниченных на $\Omega(\lambda)$ константой c, и таких, что $f(x) \in \mathbb{R}$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $f(x) \in [0,1)$ при $x \in [0,1)$;

$\mathring{A}'_{\lambda,c}$ — класс аналитических на $\overset{\circ}{\Omega}(\lambda)$ функций f, имеющих период 1, ограниченных на $\overset{\circ}{\Omega}(\lambda)$ константой c, и таких, что $f(x) \in \mathbb{R}$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $f(x) \in [0,1)$ при $x \in [0,1)$.

Ясно, что функции из классов $A_{\lambda,c}$ и $\mathring{A}_{\lambda,c}$ аналитически продолжаются соответственно на области $\Omega(\lambda)$ и $\overset{\circ}{\Omega}(\lambda)$ (их ряды Тейлора имеют радиус сходимости λ). Полагая функции из этих классов определенными при произвольном комплексном $z \in \Omega(\lambda)$ (или $\overset{\circ}{\Omega}(\lambda)$), можно говорить о «близости» классов $A_{\lambda,c}$ и $A'_{\lambda,c}$ ($\mathring{A}_{\lambda,c}$ и $\mathring{A}'_{\lambda,c}$). Точнее, справедливо несложное

Утверждение 11. *Пусть* $0 < \lambda' < \lambda$, $c' = c/(1-\lambda'/\lambda)$. *Тогда имеют место вложения* $A'_{\lambda,c} \subset A_{\lambda,c} \subset A'_{\lambda',c'}$ *и* $\mathring{A}'_{\lambda,c} \subset \mathring{A}_{\lambda,c} \subset \mathring{A}'_{\lambda',c'}$.

Теперь перейдем к определению дискретных классов аналитических функций. Обозначим через K один из классов $A_{\lambda,c}$, $\mathring{A}_{\lambda,c}$, $A'_{\lambda,c}$, $\mathring{A}'_{\lambda,c}$. Пусть функцию f из класса K надо реализовать (вычислить) с помощью некоторого дискретного вычислительного устройства У, на вход которого могут подаваться, а на выходе появляться элементы некоторого множества M мощности N. Для того чтобы в этих терминах можно было максимально точно описывать непрерывные функции, естественно предполагать, что на множестве M величина

$$\sup_{x\in[0,1)} \min_{y\in M} |x - y|$$

принимает минимально возможное значение.

Очевидно, что наилучшим выбором для M является множество

$$\widetilde{I}_N = \left\{ \frac{1}{2N}, \frac{3}{2N}, \frac{5}{2N}, \dots, \frac{2N-1}{2N} \right\}.$$

При этом любое значение x из $[0,1)$ можно приблизить величиной из $\widetilde{I}_N$ с точностью не хуже $1/2N$; в частности, в качестве такого приближения можно взять величину $1/(2N) + \lfloor Nx \rfloor / N$.

Итак, устройство У реализует функцию вида $\widetilde{f} : \widetilde{I}_N \to \widetilde{I}_N$. Потребуем, чтобы она приближала исходную функцию $f : [0,1) \to [0,1)$ наилучшим образом в смысле минимизации величины

$$\max_{x \in \widetilde{I}_N} |f(x) - \widetilde{f}(x)|;$$

одной из таких функций является функция $\widetilde{f} = 1/(2N) + \lfloor Nf(x) \rfloor / N$ (для $x \in \widetilde{I}_N$).

Замечание. Наш подход несколько отличается, например, от предлагаемого в [11]. Следуя последнему, за меру качества приближения непрерывной функции $f : [0,1) \to [0,1)$ дискретной функцией $\widetilde{f} : \widetilde{I}_N \to \widetilde{I}_N$ берется величина $\sup\limits_{x \in [0,1)} |f(x) - \widetilde{f}(\widetilde{x})|$, где $\widetilde{x} = \widetilde{x}(x)$ — ближайшая к x точка из множества $\widetilde{I}_N$. Этот подход обладает тем преимуществом, что непрерывная функция f с заданной точностью приближается к дискретной на всей области определения $[0,1)$ (в качестве приближения можно взять $\widetilde{f}(\widetilde{x}(x))$). Особенностью же является то, что для достижения хорошего (с погрешностью не более ε) приближения функций, когда величина $\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right|$ может быть достаточно большой, область определения приходится разбивать на отрезки, длины которых существенно меньше ε.

Применяемый в настоящей работе подход при определенных условиях позволяет получать приближение непрерывной функции на всей области определения; если для функции f выполнено, например, условие равномерной непрерывности производной, то для получения приближенных значений f в точках из $[0,1) \setminus \widetilde{I}_N$ можно пользоваться, например, линейной интерполяцией; при этом погрешность приближения не превосходит $1/(2N) + o(1/N)$.

Для удобства от множества $\widetilde{I}_N$ перейдем к множеству $I_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$; при этом вместо функции $\widetilde{f}$ используется *целочисленная дискретная функция* $\widehat{f}$, связанная с f соотношением

$$\widehat{f}(x) = \left\lfloor Nf\left(\frac{x}{N} + \frac{1}{2N} \right) \right\rfloor. \tag{2}$$

Множество функций $\widehat{f}$ вида (2) назовем ***внешним дискретным аналогом*** класса K и обозначим через $\widehat{K}$. Утверждение «$g \in \widehat{K}$» является лишь другой записью для

$$(\exists f \in K)(\forall x \in I_N) g(x) = \left\lfloor N f\left(\frac{x}{N} + \frac{1}{2N}\right)\right\rfloor.$$

Уже отсюда видно, что проверка условия «$g \in \widehat{K}$» является нетривиальной: для этого, в сущности, надо перебрать все функции f из K (а таких функций бесконечно много).

Предлагается следующий выход из этой ситуации. Вначале надо исследовать класс $\widehat{K}$ для выявления легко проверяемых свойств функций из этого класса. Затем рассматривается новый класс, состоящий из всех тех дискретных функций, для которых выполнены эти свойства. При этом возможно некоторое расширение рассматриваемого класса функций, однако при удачном выборе упомянутых свойств это расширение оказывается несущественным.

Для $K = A_{\lambda,c}$, $\mathring{A}_{\lambda,c}$, $A'_{\lambda,c}$, $\mathring{A}'_{\lambda,c}$ введем дискретные классы

$$\widehat{K}^N = \left\{ f : I_N \to I_N \;\middle|\; (\exists g \in k)(\forall x \in I_N) f(x) = \left\lfloor N g\left(\frac{x}{N} + \frac{1}{2N}\right)\right\rfloor \right\}.$$

По утверждению 5 имеем следующие оценки (здесь $n \in \mathbb{N}$, x_i — различные числа).

Если $f \in \widehat{A}^N_{\lambda,c}$ и $x_i \in I_N$, то

$$|\Delta_n(f; x_0, \dots, x_n)| \leqslant c\lambda^{-n} N^{1-n} + \varphi_n(x_0, \dots, x_n);$$

если $f \in \widehat{\mathring{A}}^N_{\lambda,c}$ и $x_i \in \mathbb{Z}$, то

$$|\Delta_n(\widetilde{f}; x_0, \dots, x_n)| \leqslant c\lambda^{-n} N^{1-n} + \varphi_n(x_0, \dots, x_n),$$

где $\widetilde{f}(x) = f(N\{x_i/N\})$ есть периодическое (с периодом N) продолжение f на все множество $\mathbb{Z}$.

Пользуясь этими свойствами, введем дискретные классы

$$\begin{aligned}
A^N_{c,\lambda} = \{ f : I_N \to I_N \mid & (\forall n \in \mathbb{N})(\forall x_0, \dots, x_n \in I_N, x_i \neq x_j) \\
& |\Delta_n(f; x_0, \dots, x_n)| \leqslant c\lambda^{-n} N^{1-n} + \varphi_n(x_0, \dots, x_n)\}; \\
\mathring{A}^N_{c,\lambda} = \{ f : I_N \to I_N \mid & (\forall n \in \mathbb{N})(\forall x_0, \dots, x_n \in \mathbb{Z}, x_i \neq x_j) \\
& |\Delta_n(f(N\{\cdot/N\}); x_0, \dots, x_n)| \leqslant c\lambda^{-n} N^{1-n} + \varphi_n(x_0, \dots, x_n)\},
\end{aligned}$$

элементы которых, как и элементы классов $\widehat{A}^N_{\lambda,c}$, $\widehat{\mathring{A}}^N_{\lambda,c}$, $\widehat{A'}^N_{\lambda,c}$, $\widehat{\mathring{A}'}^N_{\lambda,c}$, будем называть ***дискретными аналитическими функциями.***

Эти определения формально не являются эффективными, так как содержат кванторы по бесконечным множествам. Покажем, что без изменения классов можно перейти к конечным кванторам. Прежде всего, в силу симметричности конечных разностей достаточно ограничиться случаем $x_0 > x_1 > \cdots > x_n$. Затем в определениях высказывание «для любого $n \in \mathbb{N}$» можно заменить на «для любого $n = 1, 2, 3, \ldots, N-1$», поскольку при $n \geqslant N$ в множестве I_N нельзя выбрать различные элементы $x_0, \ldots, x_n$. Теперь избавимся от «для любых $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$» в определении класса $\mathring{A}^N_{\lambda,c}$. В силу периодичности (если все x_i одновременно увеличить или уменьшить на N, ничего не изменится) можно считать, что $x_0 \in I_N$. Пусть $x_1 = x_0 - a_1$, $x_2 = x_1 - a_2$, $\ldots$, $x_n = x_{n-1} - a_n$, где $a_i \in \mathbb{N}$. Для любой $f : I_N \to I_N$ по утверждению 6 имеем

$$|\Delta_n(f; x_0, \ldots, x_n)|$$
$$= |\Delta_n(f - N/2) + \Delta_n(N/2)| \leqslant N\varphi_n(x_0, \ldots, x_n) \leqslant \frac{N}{a_1 \ldots a_n}.$$

Поэтому если среди a_i есть число, большее $\frac{1}{2}\lambda^n N^n$, то условие

$$|\Delta_n(f; x_0, \ldots, x_n)| \leqslant c\lambda^{-n} N^{1-n} + \varphi_n(x_0, \ldots, x_n)$$

будет выполнено. Следовательно, высказывание «для любых $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$, $x_i \neq x_j$» можно заменить на «для любых $x_0 \in I_N$, $x_1, \ldots, x_n$, таких, что $x_i - x_{i+1} \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \lambda^n N^n / c \rfloor\}$».

Перейдем к установлению верхних и нижних оценок для $\log \operatorname{Approx}$ в случае введенных классов дискретных аналитических функций. Сначала установим верхние оценки.

Теорема 1. *Справедливы неравенства*

$$\log \operatorname{Approx}(A^N_{\lambda,c}) < \begin{cases} \frac{5}{\lambda} \log^2 N & \text{при } \lambda \leqslant 2, \\ \frac{2}{\log \lambda} \log^2 N & \text{при } \lambda > 2. \end{cases}$$

Доказательство. Множество I_N, на котором определены функции f, разобьем на m отрезков не более чем по $\lceil N/m \rceil$ точек в каждом и на каждом отрезке функцию f наилучшим образом приблизим многочленом степени $n-1$. Поскольку длина каждого отрезка не больше N/m, из утверждения 8 следует, что погрешность такого приближения не превосходит

$$\frac{1}{2} + \frac{cN}{\lambda^n N^n} \left(\frac{N}{m}\right)^n \frac{2}{4^n} = \frac{1}{2} + \frac{2cN}{(4\lambda m)^n}.$$

Пусть на каждом отрезке множества I_N целочисленная функция $g(x)$ принимает значение, ближайшее к соответствующему многочлену наилучшего приближения. Тогда имеем

$$|f(x) - g(x)| \leqslant 1 + \frac{2cN}{(4\lambda m)^n},$$

т. е. при $2cN/(4\lambda m)^n < 1$ функция g является 1-приближением для f. Будем считать, что $4\lambda m > 1$, и выберем

$$n = \lfloor \log(2cN)/\log(4\lambda m)\rfloor + 1 \sim (\log N)/(\log 4\lambda m).$$

Оценим сверху число указанных 1-приближающих функций. Для многочлена степени $n-1$ наилучшего приближения найдутся $n+1$ точек чебышевского альтернанса. Так как эти точки берутся из $I_N \times I_N$, то число возможных многочленов не превосходит $N^{2(n+1)}$. Поскольку функция f приближается отдельно на каждом из m отрезков, число приближающих функций g не превосходит $N^{2m(n+1)}$. Поэтому $\log \operatorname{Approx} A^N_{\lambda,c} \leqslant 2m(n+1)\log N$ при любом $m > 1/(4\lambda)$ и $n = 1 + \lfloor \log(cN)/\log(4\lambda m)\rfloor$. Следовательно, при любом $m > 1/(4\lambda)$ имеем

$$\log \operatorname{Approx}(A^N_{\lambda,c}) \leqslant 2m(2 + \log(2cN)/\log(4\lambda m))\log N.$$

Полагая $m = \lceil 1/(2\lambda)\rceil < 1 + 1/(2\lambda)$, получаем

$$\log \operatorname{Approx} A^N_{\lambda,c} \leqslant (2 + 1/\lambda)(2 + \log(2cN))\log N \sim (2 + 1/\lambda)\log^2 N.$$

Следовательно, $\log \operatorname{Approx}(A^N_{\lambda,c}) < \frac{5}{\lambda}\log^2 N$ при любом $\lambda \leqslant 2$.

Если же $\lambda > 2$, то условие $m > 1/(4\lambda)$ сводится к тривиальному $m \geqslant 1$. Полагая $m = 1$, имеем

$$n = 1 + \lfloor \log(2cN)/\log(4\lambda)\rfloor \sim (\log N)/\log(4\lambda),$$

т. е.

$$\log \operatorname{Approx} A^N_{\lambda,c} < (2\log^2 N/\log(4\lambda) \leqslant \frac{2}{\log\lambda}\log^2 N.$$

Заметим, что в силу вложения $\mathring{A} \subset A$ эта же оценка справедлива и для периодических классов. Однако при больших значениях параметра λ специфика периодических классов позволяет получить лучшую верхнюю оценку, которая содержится в теореме 2.

Предварительно докажем следующее

Утверждение 12. *Пусть значения многочлена $p(x)$ степени $2n-1$ в точках $x_1, \dots, x_n, x_{-1}, \dots, x_{-n}$ известны с погрешностью не более ε, где $x_i = a + (2i-1)b$, $x_{-i} = a - (2i-1)b$, $b > 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда при любом x, $x_{-1} \leqslant x \leqslant x_1$, интерполяционный многочлен Лагранжа $\widehat{p}(x)$, построенный по этим неточным значениям, приближает $p(x)$ с погрешностью, не превосходящей $\varepsilon \ln n$.*

Доказательство. Пусть заданы величины $\widetilde{p}(x_i) = p(x_i) + h(x_i)$, где $|h(x_i)| \leqslant \varepsilon$. Интерполяционный многочлен имеет вид

$$\widehat{p}(x) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}(x_i) \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_{-j}}{x_{-i} - x_{-j}} \prod_{j=1, j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}(x_{-i}) \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \prod_{j=1, j\neq i} \frac{x - x_{-j}}{x_{-i} - x_{-j}}.$$

Поскольку p и $\widehat{p}$ — многочлены степени $2n-1$, справедливо неравенство

$$|\widehat{p}(x)-p(x)| \leqslant \left|\sum h(x_i)\prod \frac{x-x_{-j}}{x_i-x_{-j}}\prod{}' \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right.$$
$$\left. + \sum h(x_{-i})\prod \frac{x-x_j}{x_{-i}-x_j}\prod{}' \frac{x-x_{-j}}{x_{-i}-x_{-j}}\right|,$$

где $\sum = \sum\limits_{i=1}^{n}$, $\prod = \prod\limits_{j=1}^{n}$, $\prod' = \prod\limits_{j=1, j\neq i}$. Положим $y_i = 2i-1$, $y_{-i} = -y_i = -(2i-1)$. Тогда $x_i = a + by_i$. Пусть также $x = a + by$, где $-1 = y_{-1} \leqslant y \leqslant y_1 \leqslant 1$. Тогда

$$|\widehat{p}(x)-p(x)| \leqslant \left|\sum h(x_i)\prod \frac{y+y_i}{y_i+y_j}\prod{}' \frac{y-y_i}{y_i-y_j}\right.$$
$$\left. + \sum h(x_{-i})\prod \frac{y-y_j}{-y_i-y_j}\prod{}' \frac{y+y_i}{-y_i+y_j}\right|$$
$$\leqslant \varepsilon\left(\sum\prod \frac{y_i+y}{y_j+y_i}\prod{}' \frac{y_j-y}{|y_j-y_i|} + \sum\prod \frac{y_j-y}{y_j+y_i}\prod{}' \frac{y_j+y}{|y_j-y_i|}\right)$$
$$= \varepsilon\left(\sum \frac{y_i+y}{2y_i}\prod{}' \frac{y_j^2-y^2}{|y_j^2-y_i^2|} + \sum \frac{y_j-y}{2y_i}\prod{}' \frac{y_j^2-y^2}{|y_j^2-y_i^2|}\right)$$
$$= \varepsilon\sum\prod{}' \frac{y_j^2-y^2}{|y_j^2-y_i^2|} \leqslant \varepsilon\sum\prod{}' \frac{y_j^2}{|y_j^2-y_i^2|}$$
$$= \varepsilon\sum\prod{}' \frac{(2j-1)^2}{|(2j-1)^2-(2i-1)^2|} = \varepsilon\sum\prod{}' \frac{(2j-1)^2}{4|j-i|(i+j-1)}$$
$$= \varepsilon\sum\left(\frac{(2n)!}{n!2^n(2i-1)}\right)^2 \frac{1}{4^{n-1}}\prod{}' \frac{1}{|j-i|(i+j-1)}$$
$$= \varepsilon\sum\left(\left(\frac{(2n)!}{2^n n!(2i-1)}\right)^2 \frac{1}{4^{n-1}}\,\frac{1}{(i-1)!(n-i)!}\,\frac{(i-1)!(2i-1)}{(n+i-1)!}\right)$$
$$= 4^{1-2n}\varepsilon\binom{2n}{n}\sum\left(\frac{n+i}{2i-1}\binom{2n}{n+i}\right) \leqslant 4^{1-2n}\varepsilon\binom{2n}{n}^2\sum\frac{n+i}{2i-1}$$
$$< \frac{4\varepsilon}{\pi n}\sum\frac{n+i}{2i-1} < \varepsilon\ln n.$$

Утверждение 12 доказано.

Теорема 2. *При любом* $\lambda > 0$ *справедливо неравенство*

$$\log \operatorname{Approx}(\mathring{A}^N_{\lambda,c}) \lesssim (12/\lambda)\log^2 N.$$

Доказательство. При $\lambda \leqslant 2$ искомое неравенство следует из теоремы 1, так как $\mathring{A}^N_{\lambda,c} \subset A^N_{\lambda,c}$. При $\lambda > 2$ поступим следующим образом.

Пусть $f \in \mathring{A}^N_{\lambda,c}$. По лемме 8 погрешность приближения f многочленом степени $2n-1$ на множестве $J = \{0, 1, \ldots, kN\}$, где $k = \lfloor 2\lambda \rfloor$, не превосходит

$$\frac{1}{2} + 2cN\left(\frac{k}{4\lambda}\right)^{2n} \leqslant \frac{1}{2} + 2cN \cdot 2^{-2n}.$$

Положим $n = \lceil \log N \rceil$. Пусть $p(x)$ — соответствующий многочлен наилучшего приближения. Тогда погрешность приближения не превосходит $1/2 + 2CN/N^2 \leqslant 1$. На отрезке $[0, kN]$ выберем систему точек $\{0, t, 2t, \ldots, kN\}$, где $t = N/r$, $r \in \mathbb{N}$. Заметим, что t может быть нецелым. Пусть $\varphi_i = \lfloor mp(ti) \rfloor / m$, т. е. φ_i приближает $p(ti)$ с погрешностью, не превышающей $1/m$. Так как $f(x) = f(x+N)$, то $|p(x) - p(x+jN)| \leqslant 2$ при $x \in J$ и $x + jN \in J$.

Распространим теперь оценку такого вида на произвольные (не обязательно целые) значения x такие, что $x \in [N, (k-1)N]$ и $x + jN \in [N, (k-1)N]$. Пусть $x_i = \lfloor x \rfloor + (2i-1)$ и $x_{-i} = \lfloor x \rfloor - (2i-1)$, $i = 1, \ldots, n$. При $n = o(N)$ точки x_i и x_{-i} лежат в $\{0, 1, 2, \ldots, kN\}$. Так как модуль значений многочлена $q(x) = p(x) - p(x+jN)$ степени $2n-1$ в точках x_i и x_{-i} не превосходит 2, то, положив $\varepsilon = 2$, по утверждению 12 имеем $|q(x)| \leqslant 16n^2$, т. е. для значений x, удовлетворяющих условиям $x \in [N, (k-1)N]$ и $x + jN \in [N, (k-1)N]$, справедливо неравенство $|p(x) - p(x+jN)| \leqslant 16n^2$. Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$ — параметры, значения которых будут выбраны позднее. Обозначим $\varphi_i = \lfloor mp(N + Ni/r) \rfloor / m$, где $i \in \{0, 1, 2, \ldots, r(k-2)\}$. Величины φ_i приближают значения $p(N + Ni/r)$ с погрешностью, не превышающей $1/m$. Снова пользуясь утверждением 12 при $\varepsilon = 1/m$, заключаем, что при $N + 2nN/r \leqslant x \leqslant (k-1)N - 2nN/r$ значения $p(x)$ можно восстановить по φ_i с погрешностью, не превосходящей $8n^2/m$. Поскольку $p(x)$ приближает $f(x)$ с погрешностью, не превосходящей 1, при $m > 16n^2$ указанная интерполяция позволяет приблизить f с погрешностью строго меньше $3/2$. Наконец, переходя к ближайшим целым значениям, приблизим f с погрешностью меньше 2, т. е. не больше 1 (ибо и исходная функция, и приближающая — целочисленные).

Для того чтобы проведенное рассуждение стало вполне корректным, потребуем, чтобы указанную интерполяцию можно было провести на целом периоде функции f. Для этого достаточно иметь $((k-1)N - 2nN/r) - (N + 2nN/r) \geqslant N$, т. е. $r \geqslant 4n/(k-3)$.

Оценим число наборов $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{r(k-2)}\}$. В силу того, что p приближает f на J с погрешностью не больше 1, можно утверждать, что $-N \leqslant p \leqslant 2N$ при любом $x \in [0, kN]$. Далее, значения φ_i кратны $1/m$ и принадлежат $[-N, 2N]$, т. е. каждое φ_i может принимать не более чем $3mN + 1$ значений. Кроме того, из неравенства $|p(x) - p(x+jN)| \leqslant 16n^2$

следует $|\varphi_i - \varphi_{i+r}| \leqslant 16n^2+1$. Поэтому число наборов $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{r(k-2)}\}$ не превосходит $(3mN+1)^r((16n^2+1)m+1)^{r(k-3)+1}$. Логарифм этой величины является верхней оценкой для $\log \operatorname{Approx} \mathring{A}^N_{\lambda,c}$, т. е.

$$\log \operatorname{Approx} \mathring{A}^N_{\lambda,c} \leqslant r \log(3mN+1) + (r(k-3)+1)\log((16n^2+1)m+1).$$

Поскольку $n = \lceil \log N \rceil$ и $k = \lfloor 2\lambda \rfloor$, то, взяв $m = 17n^2$ и $r = \lceil 4n/(k-3) \rceil$, при $\lambda > 2$ имеем

$$\log \operatorname{Approx} \mathring{A}^N_{\lambda,c} \lesssim \left\lceil \frac{4\lceil \log N \rceil}{\lfloor 2\lambda \rfloor - 3} \right\rceil \log N \lesssim \frac{4 \log^2 N}{\lfloor 2\lambda \rfloor - 3} \leqslant \frac{12}{\lambda} \log^2 N.$$

Теорема 2 доказана.

Перейдем к получению нижних оценок. Сначала рассмотрим периодический случай.

Теорема 3.

$$\log \operatorname{Approx}_1 \widehat{\mathring{A}'}^N_{\lambda,c} \gtrsim \frac{1}{8\pi\lambda \log e} \log^2 N.$$

Доказательство. Пусть ε, q, s — положительные вещественные параметры, $n < N/2$. Обозначим через $A(n, \varepsilon, q, s)$ семейство функций $f(x)$ вида

$$f(x) = q + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos 2\pi k x,$$

где коэффициенты a_k кратны ε и принадлежат $[-s, s]$. Условия

1) $0 \leqslant f(x) < 1$ при $x \in \mathbb{R}$,

2) $|f(x)| \leqslant c$ при $|\operatorname{Im} x| \leqslant \lambda$

являются достаточными для включения

$$A(n, \varepsilon, q, s) \subset \mathring{A}'_{\lambda,c}. \tag{3}$$

Положим $q = c' = \min(c/2, 1/3)$. Тогда условия 1 и 2 следуют из условия

3) $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos 2\pi k x \right| \leqslant c'$ при $|\operatorname{Im} x| \leqslant \lambda$.

Если $x = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $|b| \leqslant \lambda$, то

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \cos 2\pi k x \right| &\leqslant s \sum_{k=1}^{n} |\cos 2\pi k x| = s \sum_{k=1}^{n} |\cos(2\pi k a + 2\pi k i b)| \\
&= s \sum_{k=1}^{n} |\cos 2\pi k a \operatorname{ch} 2\pi k b - i \sin 2\pi k a \operatorname{sh} 2\pi k b| \\
&= s \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\cos^2 2\pi k a \operatorname{ch}^2 2\pi k b + \sin^2 2\pi k a \operatorname{sh}^2 2\pi k b}
\end{aligned}$$

$$\leqslant s \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch} 2\pi k b \leqslant s \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch} 2\pi k \lambda = \frac{s}{2} \sum_{k=1}^{n} (e^{2\pi k \lambda} + e^{-2\pi k \lambda}) \leqslant s n e^{2\pi n \lambda}.$$

Поэтому $q = c' = \min(c/2, 1/3) < s = c'/(ne^{2\pi n\lambda})$ — достаточное условие для (3).

Обозначим через $\widehat{A}(n, \varepsilon, q, s)$ множество функций $f : \mathbb{Z} \to I_N$, представимых в виде $f(x) = \lfloor Ng(x/N) \rfloor$, где $g \in A(n, \varepsilon, q, s)$.

Убедимся в справедливости вложения $\widehat{A} \subset \widehat{\mathring{A}'}^{N}_{\lambda,c}$. Оно не очевидно, поскольку наш «стандартный» подход требует переходить к дискретным функциям по формуле $\lfloor Ng(x/N + 1/(2N)) \rfloor$. Однако сначала можно сдвинуть семейство $A(n, \varepsilon, q, s)$ на $1/(2N)$ по x (заменив $g(\cdot)$ на $g(\cdot - 1/(2N))$); новое семейство функций также будет лежать в классе $\mathring{A}'_{\lambda,c}$, поскольку этот класс инвариантен относительно сдвигов. Затем можно стандартным способом переходить к дискретному классу функций, который совпадет с $\widehat{A}$. Подберем теперь параметры такими, чтобы в метрике $\|\cdot\|_1$ расстояние между любыми двумя элементами множества $\widehat{A}$ было больше 2.

Пусть $\widetilde{f}$ и $\widetilde{\widetilde{f}}$ — различные элементы множества $\widehat{A}$, т. е. среди соответствующих коэффициентов в разложении

$$f(x) = \left\lfloor N \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(2\pi k\left(\frac{x}{N}\right)\right) \right\rfloor$$

есть такие, что $|\widetilde{a}_k - \widetilde{\widetilde{a}}_k| \geqslant \varepsilon$. Оценим снизу $\|\widetilde{f} - \widetilde{\widetilde{f}}\|_1$.

Пусть $\|\widetilde{f} - \widetilde{\widetilde{f}}\| = \alpha$. Разложим функцию $\widetilde{f} - \widetilde{\widetilde{f}}$ по базису

$$\text{Б}_N = \begin{cases} \{1, \sqrt{2}c_1, \dots, \sqrt{2}c_{N/2-1}, c_{N/2}, \sqrt{2}s_1, \dots, \sqrt{2}s_{N/2-1}\} & \text{при четных } N, \\ \{1, \sqrt{2}c_1, \dots, \sqrt{2}c_{N-1/2}, \sqrt{2}s_1, \dots, \sqrt{2}s_{N-1/2}\} & \text{при нечетных } N, \end{cases}$$

где $c_n(x) = \cos(2\pi nx/N)$, $s_n = \sin(2\pi nx/N)$ (см. утверждение 9). В этом случае коэффициент β при $\sqrt{2}c_k$ равен $(\widetilde{f} - \widetilde{\widetilde{f}}, \sqrt{2}c_k)$, т. е.

$$\beta = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{x=0}^{N-1} (\widetilde{f}(x) - \widetilde{\widetilde{f}}(x))c_k(x).$$

Так как $|c_k(x)| \leqslant 1$ и $\|\widetilde{f} - \widetilde{\widetilde{f}}\|_1 = \alpha$, то $|\beta| \leqslant \sqrt{2}\alpha$. С другой стороны, $\widetilde{f}(x) = \left\lfloor N \sum\limits_{m=1}^{n} \widetilde{a}_m c_m(x) \right\rfloor$ и $\widetilde{\widetilde{f}}(x) = \left\lfloor N \sum\limits_{m=1}^{n} \widetilde{\widetilde{a}}_m c_m(x) \right\rfloor$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\beta| = \frac{\sqrt{2}}{N} &\sum_{0 \leqslant x \leqslant N-1} \left(\left(N \sum_{m=1}^{n} (\widetilde{a}_m - \widetilde{\widetilde{a}}_m) c_m(x) \right) c_k(x) \right) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{0 \leqslant x \leqslant N-1} \left(\left(\left\{ N \sum_{m=1}^{n} \widetilde{\widetilde{a}}_m c_m(x) \right\} - \left\{ N \sum_{m=1}^{n} \widetilde{a}_m c_m(x) \right\} \right) c_k(x) \right). \end{aligned}$$

В свою очередь,

$$\sqrt{2}\sum_{m=1}^{n}(\widetilde{a}_m-\widetilde{\widetilde{a}}_m)\sum_{x=0}^{N-1}c_m(x)c_k(x)$$
$$=\sqrt{2}N\sum_{m=1}^{n}(\widetilde{a}_m-\widetilde{\widetilde{a}}_m)(c_m,c_k)=\sqrt{2}N(\widetilde{a}_m-\widetilde{\widetilde{a}}_m)(c_k,c_k)=\frac{N}{\sqrt{2}}(\widetilde{a}_m-\widetilde{\widetilde{a}}_m),$$

т. е. абсолютная величина этого выражения не меньше $N\varepsilon/\sqrt{2}$. Далее, поскольку $|c_k(x)|\leqslant 1$ и $|\{x\}-\{y\}|<1$, то вторая сумма по абсолютной величине меньше $\sqrt{2}$. Поэтому $|\beta|\geqslant N\varepsilon/\sqrt{2}-\sqrt{2}$. Отсюда и из неравенства $|\beta|\leqslant\sqrt{2}\alpha$ следует, что $\alpha\geqslant N\varepsilon/2-1$. Поэтому, выбрав $\varepsilon>6/N$, для любых различных функций $\widetilde{f}$ и $\widetilde{\widetilde{f}}$ из $\widehat{A}$ получаем неравенство $\|\widetilde{f}-\widetilde{\widetilde{f}}\|_1>2$.

Положим $\varepsilon=7/N$ и оценим $|\widehat{A}|$. Функции из A определяются n параметрами, значения которых по абсолютной величине не превосходят $\min(c/2,1/3)/(ne^{2\pi n\lambda})$ и кратны $7/N$. Поэтому

$$|\widehat{A}|=\left(1+\left\lfloor\frac{2N\min(c/2,1/3)}{7ne^{2\pi n\lambda}}\right\rfloor\right)^n.$$

Так как $1+2\lfloor x\rfloor\geqslant x$, то при $n\to\infty$ и $N\to\infty$ имеем

$$\log|\widehat{A}|\geqslant n\log\left(\frac{N\min(c/2,1/3)}{7ne^{2\pi n\lambda}}\right)$$
$$=n\log N-(2\pi\lambda\log e)n^2+O(n\log n).$$

Выбрав $n=\lfloor\log N/(4\pi\lambda\log e)\rfloor$, получаем

$$\log|\widehat{A}|\gtrsim\frac{\log^2 N}{8\pi\lambda\log e}.$$

Тем самым теорема 3 доказана.

Замечание. В силу утверждения 11 эта же оценка справедлива и для других введенных нами классов дискретных аналитических функций с теми же параметрами λ и N.

Наконец, получим нижнюю оценку в непериодическом случае.

Теорема 4.

$$\log\operatorname{Approx}_1\widehat{A'}^{N}_{\lambda,c}\gtrsim\begin{cases}\frac{1}{8\pi\lambda\log e}\log N^2 & \textit{при } 0<\lambda<2,\\ \frac{1}{18\log\lambda}\log N^2 & \textit{при } \lambda\geqslant 2.\end{cases}$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая $\lambda\geqslant 2$, так как при $\lambda<2$ можно воспользоваться оценкой для периодического случая.

Обозначим через $A(n,\varepsilon,q,s)$ семейство функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = q + \sum_{k=1}^{n} \cos(k \arccos(2x-1)),$$

где коэффициенты a_k кратны ε и по абсолютной величине не превосходят s. Легко видеть, что условия

1) $0 \leqslant f(x) < 1$ при $x \in [0,1)$,

2) $|f(x)| \leqslant c$ при $x \in \Omega(\lambda)$

являются достаточными для включения

$$A(n,\varepsilon,q,s) \subset A'_{\lambda,c}. \tag{4}$$

Фактически вместо условия 2 мы будем пользоваться более сильным условием

2′) $|f(x)| \leqslant c$ при $x \in \Omega'(\lambda)$, где Ω' — эллипс с фокусами в точках 0 и 1 и большой полуосью длины $1/2+\lambda$; при этом $\Omega' \supset \Omega$.

Положим $q = c' = \min(c/2, 1/3)$. При этом условия 1 и 2′ следуют из условия

3) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos(k\arccos(2x-1))\right| \leqslant c'$ при $x \in \Omega'$.

Для оценки сверху указанной суммы воспользуемся конформным отображением $x \to 2x-1+2\sqrt{x^2-x}$, которое отображает $\Omega'/[0,1]$ на кольцо $1 < |x| < 1+2\lambda+2\sqrt{\lambda^2+\lambda}$ и переводит функции $\cos k\arccos(2x-1)$ в $(1/2)(x^k+x^{-k})$. Следовательно, функция $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos(k\arccos(2x-1))$ перейдет в $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \frac{x^k+x^{-k}}{2}$.

Максимальное значение суммы $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos(k\arccos(2x-1))\right|$ достигается на границе области Ω' и равно максимуму величины $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \frac{x^k+x^{-k}}{2}\right|$ при $|x| = 1+2\lambda+2\sqrt{\lambda^2+\lambda}$. Эта величина, в свою очередь, не превосходит

$$\max_{|x|=5\lambda}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{x^k+x^{-k}}{2}\right|,$$

поскольку при $\lambda \geqslant 2$ справедливо неравенство $1+2\lambda+2\sqrt{\lambda^2+\lambda} \leqslant 5\lambda$. В свою очередь,

$$\max_{|x|=5\lambda}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{x^k+x^{-k}}{2}\right| \leqslant \frac{s}{2}\sum_{k=-n}^{n}(5\lambda)^k < \frac{s}{2}\frac{(5\lambda)^n}{1-\frac{1}{5\lambda}} < s(5\lambda)^n.$$

Поэтому искомое достаточное условие для включения (4) можно записать в виде

$$q = c' = \min(c/2, 1/3), \qquad s = c'/(5\lambda)^n.$$

Обозначим через $\widehat{A}(n, \varepsilon, q, s)$ множество функций $f : I_N \to I_N$, представимых в виде

$$f(x) = \left\lfloor Ng\left(\frac{x}{N} + \frac{1}{2N}\right)\right\rfloor,$$

где $g \in A(n, \varepsilon, q, s)$. По построению $\widehat{A} \subset \widehat{A'}^{N}_{\lambda,c}$. Подберем параметры n и ε такими, чтобы в метрике $\|\cdot\|_1$ расстояние между любыми двумя элементами из множества $\widehat{A}$ было больше 2.

Пусть $\widetilde{f}$ и $\approx{f}$ — различные элементы множества $\widehat{A}$, т. е. среди соответствующих коэффициентов в разложении

$$f(x) = \left\lfloor N\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k \arccos((2x+1)/N - 1)\right\rfloor = \left\lfloor N\sum_{k=1}^{n} a_k p_k(x)\right\rfloor$$

есть такие, что $|\widetilde{a}_k - \overset{\approx}{a}_k| \geqslant \varepsilon$.

Оценим снизу $\|\widetilde{f} - \overset{\approx}{f}\|_1$. Пусть $\|\widetilde{f} - \overset{\approx}{f}\|_1 = \alpha$. Рассмотрим (однозначное) разложение функции $\widetilde{f} - \overset{\approx}{f}$ по базису

$$\text{Б} = \{p_1(x), \ldots, p_n(x), q_{n+1}(x), \ldots, q_N(x)\},$$

где $p_j(x) = \cos(j \arccos((2x+1)/N - 1))$, а q_j — многочлены, ортогональные друг другу и многочленам p_i относительного скалярного произведения

$$(f, g) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k)g(k)\mu_k,$$

где

$$\mu_k = \int\limits_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{2dx}{\sqrt{1 - (1 - (2x-1)/N)^2}}$$

(точнее, потребуем выполнения соотношений $(p_i, q_j) = 0$, $(q_i, q_j) = \pi/2$, $(q_i, q_j) = 0$ (при $i \neq j$)). Найдем верхнюю и нижнюю оценки для

коэффициента β при p_k в этом разложении. Пусть

$$r_i = \begin{cases} (p_i, \widetilde{f} - \widetilde{\widetilde{f}}) & \text{при } 1 \leqslant i \leqslant n, \\ (q_i, \widetilde{f} - \widetilde{\widetilde{f}}) & \text{при } n+1 \leqslant i \leqslant N; \end{cases}$$

$$t_{ij} = \begin{cases} (p_i, p_j) & \text{при } 1 \leqslant i, j \leqslant n, \\ (p_i, q_j) & \text{при } 1 \leqslant i \leqslant n, \quad n+1 \leqslant j \leqslant N, \\ (q_i, p_j) & \text{при } n+1 \leqslant i \leqslant N, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \\ (q_i, q_j) & \text{при } n+1 \leqslant i, j \leqslant N. \end{cases}$$

Матрицу $T = (t_{ij})$ запишем в виде

$$T = \frac{\pi}{2} E + H,$$

где E — единичная матрица. Из построения и утверждения 10 следует, что матрица $H = (h_{ij})$ является такой, что $|h_{ij}| \leqslant 2kn \log N/N$ при $1 \leqslant i$, $j \leqslant n$, а все остальные элементы в M равны 0.

Пусть функция $\widetilde{f} - \widetilde{\widetilde{f}}$ разложена по базису Б в виде

$$\widetilde{f} - \widetilde{\widetilde{f}} = b_1 p_1 + \dots + b_n p_n + b_{n+1} q_{n+1} + \dots + b_N q_N.$$

Следовательно, $r_i = \sum\limits_{j=1}^{N} b_j t_{ij}$, т. е. $\bar{r} = T\bar{b}$. Поэтому $\bar{b} = T^{-1}\bar{r}$. Поскольку $T = (\pi/2)E + H$, имеем

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \frac{2}{\pi} \left(E + \frac{2}{\pi} H \right)^{-1} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(E - \frac{2}{\pi} H + \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 H^2 - \left(\frac{2}{\pi} \right)^3 H^3 + \dots \right) = \frac{2}{\pi} (E + X). \end{aligned}$$

Оценим элементы матрицы $X = \{x_{ij}\}$. Очевидно, что элементы могут быть отличными от нуля лишь при $i, j \leqslant n$. В матрице H каждый элемент не превосходит $2kn \log N/N$, в H^2 не превосходит $n^3(2k \log N/N)^2$ и т. д. Поэтому каждый элемент в X не превосходит

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \right)^j \left(\frac{2k \log N}{N} \right)^j n^{2j-1} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} k n^2 \frac{\log N}{N} \right)^j.$$

Если $4kn^2 \log N/(\pi N) < 1$, то ряд сходится и имеет сумму

$$\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{4}{\pi} k n^2 \frac{\log N}{N} \right) \Big/ \left(1 - \frac{4}{\pi} k n^2 \frac{\log N}{N} \right) = \delta.$$

При $n = O(\log^2 N)$ имеем $\delta = O(1/n)$. Поэтому величина $\beta = a_k$ имеет вид

$$\frac{2}{\pi}\left(r_k + \sum_{j=1}^{n}\theta_j r_j\right),$$

где $|\theta_j| \leqslant \delta$. Следовательно,

$$|\beta| = \frac{2}{\pi}(1+n\delta)\max_{1\leqslant j\leqslant n}|r_j| = \frac{2}{\pi}(1+n\delta)\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\widetilde{f}(k)-\approx{f}(k))p_j(k)\mu_k\right|$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}(1+n\delta)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mu_k|\widetilde{f}(k)-\approx{f}(k)|$$

$$\leqslant \frac{2(1+n\delta)}{\pi}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|\widetilde{f}(k)-\approx{f}(k)|\right)\max_k \mu_k = \frac{2(1+n\delta)}{\pi}\alpha\max_k\mu_k.$$

Из определения коэффициентов μ_k следует, что максимальны среди них μ_0 и μ_{N-1}, равные

$$\int_{-1/2}^{1/2}\frac{2dx}{\sqrt{1-(1-(2x+1)/N)^2}} = \int_0^1\frac{2dy}{\sqrt{1-(1-2y/N)^2}}$$

$$= \int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y/N-y^2/N^2}} \leqslant \sqrt{\frac{N}{1-1/N}}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{\frac{N}{1-1/N}} \leqslant 3\sqrt{N}.$$

Следовательно, $|\beta| \leqslant 6\sqrt{N}(1+n\delta)\alpha/\pi \leqslant 8\alpha\sqrt{N}/\pi$ (поскольку $\delta = o(1/n)$).

С другой стороны,

$$\widetilde{f}(x) = \left\lfloor N\sum_{m=1}^{n}\widetilde{a}_m p_m(x)\right\rfloor \qquad \text{и} \qquad \approx{f}(x) = \left\lfloor N\sum_{m=1}^{n}\approx{a}_m p_m(x)\right\rfloor,$$

поэтому $|\beta| = \frac{2}{\pi}\left|r_k + \sum\limits_{j=1}^{n}\theta_j r_j\right| \geqslant \frac{2}{\pi}\left(|r_k| - n\delta\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|r_j|\right)$. Следовательно, $4\alpha\sqrt{N} \geqslant |r_k| - n\delta\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|r_j|$.

Оценим выражения, стоящие в правой части неравенства:

$$
\begin{aligned}
|r_k| &= \left|\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(\widetilde{f}(j)-\widetilde{\widetilde{f}}(j))p_k(j)\mu_j\right| \geqslant \left|\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{n}(\widetilde{a}_m-\widetilde{\widetilde{a}}_m)p_m(j)p_k(j)\mu_j\right| \\
&- \frac{1}{N}\left|\sum_{j=0}^{N-1}p_k(j)\mu_j\left(\left\{N\sum_{m=1}^{n}\widetilde{a}_m p_m(j)\right\}-\left\{N\sum_{m=1}^{n}\widetilde{\widetilde{a}}_m p_m(j)\right\}\right)\right| \\
&\geqslant \left|\sum_{m=0}^{n}(\widetilde{a}_m-\widetilde{\widetilde{a}}_m)\sum_{j=0}^{N-1}p_m(j)p_k(j)\mu_j\right| - \frac{1}{N}\left|\sum_{j=0}^{N-1}\mu_j\right| \\
&= N\left|\sum_{m=0}^{n}(\widetilde{a}_m-\widetilde{\widetilde{a}}_m)(p_m,p_k)\right| - \frac{1}{N}\int\limits_{-1/2}^{N-1/2}\frac{2dx}{\sqrt{1-(1-(2x+1)/N)^2)}} \\
&\geqslant N|\widetilde{a}_k-\widetilde{\widetilde{a}}_k| - 2Kn\log Ns - \pi \geqslant \frac{\pi}{2}N\varepsilon - 2Kn\log Ns - \pi.
\end{aligned}
$$

Далее имеем

$$
\begin{aligned}
|r_j| &= \left|\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(\widetilde{f}(i)-\widetilde{\widetilde{f}}(i))p_j(i)\mu_i\right| \\
&\leqslant N\left|\sum_{m=0}^{n}(\widetilde{a}_m-\widetilde{\widetilde{a}}_m)(p_m,p_j)\right| + \frac{1}{N}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\mu_i\right| \\
&\leqslant \frac{\pi N}{2}|\widetilde{a}_j-\widetilde{\widetilde{a}}_j| + \sum_{m=0}^{n}2Kn\log N|\widetilde{a}_m-\widetilde{\widetilde{a}}_m| + \pi \\
&\leqslant \left(\frac{\pi N}{2}+2Kn^2\log N\right)s+\pi.
\end{aligned}
$$

Поэтому $4\alpha\sqrt{N} \geqslant (\pi/2)N\varepsilon - 2Kns\log N - \pi - n\delta((\pi N/2 + 2Kn^2\log N)s+\pi)$, а условие $\alpha > 2$ будет выполнено при

$$
\varepsilon \geqslant \frac{16}{\pi\sqrt{N}} + \frac{2}{\pi N}\left(2Kns\log N + \pi + n\delta\left(\pi + \left(\frac{\pi N}{2}+2Kn^2\log N\right)s\right)\right).
$$

В предположении $n = o(\log^2 N)$ последнее неравенство следует из

$$
\varepsilon \geqslant \frac{16}{\pi\sqrt{N}} + \frac{2}{\pi}\left(s\frac{\log^3 N}{N} + \frac{\pi}{N} + \frac{(\pi+s\pi)\log^5 N}{N}\right),
$$

поскольку $\delta = O(\frac{n\log N}{N})$. При $s = O(1)$ главным слагаемым в правой части этого неравенства будет первое слагаемое, т. е. достаточно положить, например, $\varepsilon \geqslant 10/\sqrt{N}$.

Наконец, выберем значения всех параметров. Положим

$$n = \left\lfloor \frac{\log N}{3 \log \lambda} \right\rfloor \sim \frac{1}{3} \log N / \log \lambda;\, s = \frac{c'}{(5\lambda)^n};$$

$$c'/\sqrt[3]{N} \leqslant s \leqslant 5\lambda c'/\sqrt[3]{N};\, \varepsilon = \lceil 10/\sqrt{N} \rceil.$$

При этом все используемые в ходе рассуждений предположения будут выполнены. Оценим мощность полученного множества $A(n, \varepsilon, q, s)$ (и $\widehat{A}(n, \varepsilon, q, s)$).

Функция из такого множества задается набором n коэффициентов, которые кратны ε и принимают значения из $[-s, s]$. Поэтому

$$|A(n, \varepsilon, q, s)| = |\widehat{A}(n, \varepsilon, q, s)| = (1 + 2\lfloor s/\varepsilon \rfloor)^n.$$

Отсюда с учетом выбранных значений параметров n, ε, s получаем

$$\log |A(n, \varepsilon, q, s)| = \log |\widehat{A}(n, \varepsilon, q, s)| = n \log(1 + 2\lfloor s/\varepsilon \rfloor) \sim \frac{\log^2 N}{18 \log \lambda}.$$

Функции из $\widehat{A}(n, \varepsilon, q, s)$ принадлежат классу $\widehat{A'}^N_{\lambda,c}$ и в метрике $\|\cdot\|_1$ расстояния между любыми двумя такими функциями больше 2. Поэтому множество таких функций образует 2-различимое множество, число элементов которого является нижней оценкой для $\log \mathrm{Approx}$. Теорема 4 доказана.

Из теорем 1–4 следует, что для всех метрик $\|\cdot\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и для всех рассмотренных дискретных аналогов классов аналитических функций ($A^N_\lambda = A^N_{\lambda,c}$, $\widehat{A'}^N_{\lambda,c}$, $\widehat{A}^N_{\lambda,c}$ в непериодическом и $\mathring{A}^N_\lambda = \{\mathring{A}^N_{\lambda,c}$, $\widehat{\mathring{A}'}^N_{\lambda,c}$, $\widehat{\mathring{A}}^N_{\lambda,c}\}$ в периодическом случаях) справедливы соотношения

$$\log \mathrm{Approx}_p A^N_\lambda \asymp \begin{cases} \frac{\log^2 N}{\lambda} & \text{при } 0 < \lambda < 2, \\ \frac{\log^2 N}{\log \lambda} & \text{при } \lambda \geqslant 2 \end{cases}$$

и

$$\log \mathrm{Approx}_p \mathring{A}^N_\lambda \asymp \frac{\log^2 N}{\lambda} \quad \text{при } 0 < \lambda < \infty.$$

Заметим также, что полученные оценки для непериодического случая как при $\lambda \to 0$, так и при $\lambda \to \infty$ в некотором смысле согласуются (при $\varepsilon = 1/N$) с ε-энтропией, асимптотически равной $(\log^2 \frac{1}{\varepsilon})/\log \nu$, и для множества функций, аналитических в эллипсе с фокусами в ± 1 и суммой полуосей ν (см. [3]). Оценка для периодического случая также согласуется с соответствующей ε-энтропией для аналитических функций, периодических и ограниченных в полосе $|\mathrm{Im} z| < \mathrm{const}$ [3, с. 51].

§ 3. «Промежуточные» классы дискретных функций

В работах [9, 10] рассматривались дискретные аналоги классов функций конечной гладкости; в § 2 были исследованы дискретные аналоги классов аналитических функций.

В этом параграфе рассматриваются некоторые классы, занимающие промежуточное положение между этими двумя семействами классов.

Для определения таких «промежуточных» классов естественно использовать известную связь между гладкостью функций и скоростью стремления к нулю их коэффициентов Фурье: условия на коэффициенты вида $|a_n| = O(n^{-c})$ характеризуют функции конечной гладкости, а условия вида $|a_n| = O(\exp(-cn))$ — аналитические функции. Понятно, что промежуточные порядки убывания коэффициентов будут соответствовать некоторым промежуточным классам, состоящим из бесконечно дифференцируемых, но не обязательно аналитических функций. Примером такой функции является

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Пусть $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ — последовательность положительных чисел таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < 1/2$. Обозначим через P_λ класс таких функций $f : \mathbb{R} \to [0, 1)$, что

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kx + \theta_k),$$

где θ_k — произвольные действительные числа, $|a_k| \leqslant \lambda_k$. Очевидно, что такие функции являются периодическими с периодом 1.

Пусть $d_n = \sup\limits_{f\in P_\lambda} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|$, где $n \geqslant 1$. Легко видеть, что $d_n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (2\pi k)^n$ (величина d_n может быть равна $+\infty$). Рассмотрим класс

$$P'_\lambda = \{f : [0, 1) \to [0, 1) \mid (\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [0, 1))|f^{(n)}(x)| \leqslant d_n\}.$$

Очевидно, что $P_\lambda \subset P'_\lambda$, если функции из P_λ принимают значения из $[0, 1)$.

Наконец, определим соответствующие классы дискретных функций.

Положим

$$\widehat{P}_\lambda^N = \left\{ f : I_N \to I_N \mid (\exists g \in P_\lambda)(\forall x \in I_N) f(x) = \left\lfloor Ng\left(\frac{x}{N} + \frac{1}{2N}\right)\right\rfloor \right\};$$

$$\widehat{P'}_\lambda^N = \left\{ f : I_N \to I_N \mid (\exists g \in P'_\lambda)(\forall x \in I_N) f(x) = \left\lfloor Ng\left(\frac{x}{N} + \frac{1}{2N}\right)\right\rfloor \right\};$$

$$P_\lambda^N = \Big\{ f : I_N \to I_N \mid (\forall n \in \{1, 2, \ldots, N-1\}) \\ (\forall x_0, \ldots, x_n \in I_N, x_i \neq x_j) \\ |\Delta_n(f; x_0, \ldots, x_n)| \leqslant \frac{Nd_n}{n!N^n} + \varphi_n(x_0, \ldots, x_n) \Big\}.$$

По построению имеем $\widehat{P}_\lambda^N \subset \widehat{P'}_\lambda^N \subset P_\lambda^N$.

Величину $\log \operatorname{Approx}_1 \widehat{P}_\lambda^N$ оценим снизу, а величину $\log \operatorname{Approx} P_\lambda^N$ — сверху.

Теорема 5. *Справедливо неравенство*

$$\log \operatorname{Approx}_1 \widehat{P}_\lambda^N \geqslant \sum_{k \in \mathbb{N}, N\lambda_k \geqslant 7} \log(N\lambda_k/7).$$

Доказательство. Воспользуемся рассуждениями из доказательства теоремы 3. Рассмотрим семейство функций $f(x)$ из $P(\varepsilon)$ вида

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2\pi kx,$$

где коэффициенты a_k кратны ε и $|a_k| \leqslant \lambda_k$. По построению $P(\varepsilon) \subset P_\lambda$.

Через $\widehat{P}^N(\varepsilon)$ обозначим множество функций $g(x) = \lfloor Nf(x/N) \rfloor$, определенных на I_N, где $f \in P(\varepsilon)$. Поскольку класс P_λ инвариантен относительно сдвигов, то $\widehat{P}^N(\varepsilon) \subset \widehat{P}_\lambda^N$.

Те же рассуждения, что и в случае аналитических функций, показывают, что если $\widetilde{f}$ и $\approx{f}$ — различные функции из $\widehat{P}^N(\varepsilon)$, т. е. среди соответствующих коэффициентов $\widetilde{a}_i$ и $\overset{\approx}{a}_i$ имеются коэффициенты, отличающиеся не менее чем на ε, то

$$\|\widetilde{f} - \overset{\approx}{f}\|_1 \geqslant N\varepsilon/2 - 1.$$

Поэтому, взяв $\varepsilon > 6/N$, получаем $\|\widetilde{f} - \overset{\approx}{f}\|_1 > 2$.

Пусть $\varepsilon = 7/N$. Тогда в метрике $\|\cdot\|_1$ все функции из $\widehat{P}^N(\varepsilon)$ находятся на расстоянии более 2 друг от друга и выполняется неравенство $\log \operatorname{Approx}_1 \widehat{P}_\lambda^N > \log |\widehat{P}^N(\varepsilon)|$.

В свою очередь, коэффициент a_k кратен $7/N$ и $|a_k| \leqslant \lambda_k$. Поэтому a_k может принимать не более $1 + 2\lfloor N\lambda_k/7 \rfloor$ значений. Следовательно,

$|\widehat{P}^N(\varepsilon)| = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+2\lfloor N\lambda_k/7\rfloor) \geqslant \prod\limits_{k\in\mathbb{N}, N\lambda_k\geqslant 7} N\lambda_k/7$, и $|\widehat{P}_\lambda^N| \geqslant \prod\limits_{k\in\mathbb{N}, N\lambda_k\geqslant 7} N\lambda_k/7$.
Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Справедливо неравенство*

$$\log \operatorname{Approx} P_\lambda^N \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(4n + e\sqrt[n]{2Nd_n}\right)\log N.$$

Доказательство. Как и в случае аналитических функций, множество I_N разобьем на m отрезков, содержащих не более чем по $\lceil N/m\rceil$ точек. На каждом отрезке функцию $f \in P_\lambda^N$ приблизим наилучшим образом многочленом степени $n-1$. По утверждению 8 погрешность такого приближения не превосходит

$$\frac{1}{2} + \frac{Nd_n}{n!N^n}\left(\frac{N}{m}\right)^n \frac{2}{4^n} = \frac{1}{2} + \frac{2Nd_n}{n!(4m)^n}.$$

Пусть $g(x)$ — округление значений этих многочленов до ближайших целых чисел. Тогда

$$|f(x) - g(x)| \leqslant 1 + \frac{2Nd_n}{n!(4m)^n}.$$

При $\frac{2Nd_n}{n!(4m)^n} < 1$ функция g 1-приближает функцию f. Взяв $m = \left\lceil \frac{e}{4n}\sqrt{2Nd_n}\right\rceil$ и воспользовавшись неравенством $n! > (n/e)^n$, убеждаемся в том, что неравенство $\frac{2Nd_n}{n!(4m)^n} < 1$ выполняется.

Оценим сверху число функций g. Так как многочлен степени $n-1$ наилучшего приближения однозначно задается своими $n+1$ точками чебышевского альтернанса, то число таких многочленов не превосходит $N^{2(n+1)}$. Поскольку функция f приближается по отдельности на m отрезках, число приближающих функций g не превосходит $N^{2(n+1)m}$. Следовательно,

$$\log \operatorname{Approx} P_\lambda^N \leqslant 2(n+1)m\log N = 2(n+1)\left\lceil\frac{e}{4n}\sqrt{2Nd_n}\right\rceil \log N$$
$$\leqslant \log \operatorname{Approx} P_\lambda^N \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} 2(n+1)\left\lceil\frac{e}{4n}\sqrt{2Nd_n}\right\rceil \log N$$
$$\leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} 4n\left\lceil\frac{e}{4n}\sqrt{2Nd_n}\right\rceil \log N \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}}\left(4n\log N + e\sqrt{2Nd_n}\log N\right).$$

Теорема 6 доказана.

Теперь воспользуемся теоремами 5 и 6 для исследования одного семейства «промежуточных» классов.

Теорема 7. *Пусть* $0 < \alpha \leqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\lambda_k = c\exp(-k^\alpha/\alpha)$, *где*

$$c = 1 \Big/ \left(3\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-k^\alpha/\alpha)\right).$$

Тогда

$$c_1(\log N)^{1+1/\alpha} \lesssim \log \mathrm{Approx}_p(\widehat{P}_\lambda^N)$$
$$\leqslant \log \mathrm{Approx}_p(\widehat{P'}_\lambda^N) \leqslant \log \mathrm{Approx}_p(P_\lambda^N) \lesssim c_2(\log N)^{1+1/\alpha},$$

где c_1 *и* c_2 *— положительные константы, зависящие только от* α.

Параметр c выбран таким, чтобы выполнялось условие $\sum a_k < 1/2$. Очевидно, что случай $\alpha = 1$ соответствует аналитическим функциям (так что, пользуясь теоремой 7, можно найти порядок величины $\log \mathrm{Approx}$ для периодических функций, но без явного указания мультипликативных констант), а при $0 < \alpha < 1$ мы получаем более широкие классы функций.

Доказательство. По теореме 5 имеем

$$\log \mathrm{Approx}_1 \widehat{P}_\lambda^N \geqslant \sum_{k\in\mathbb{N}, N\lambda_k \geqslant 7} \log(N\lambda_k/7),$$

а по определению

$$\log(N\lambda_k/7) = \log N - k^\alpha/(\alpha \ln 2) + \log(c/7);$$
$$\sum_{k=1}^{n} \log(N\lambda_k/7) \geqslant n\log N + n\log(c/7) - \frac{n}{\alpha\ln 2}n^\alpha.$$

Выбрав $n = c'(\log N)^{1/\alpha}$, где $c' = (\alpha \ln 2/7)^{1/\alpha}$, и воспользовавшись неравенством $N\lambda_k/7 \geqslant 1$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \log\frac{N\lambda_k}{7} \gtrsim \frac{n\log N}{2} \succeq (\log N)^{1+1/\alpha},$$

тем самым нижняя оценка установлена.

Теперь получим верхнюю оценку. Сначала оценим сверху величины d_n. Из их определения следует, что

$$d_n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(2\pi k)^n = \sum_{k=1}^{\infty} c(2\pi k)^n e^{-k^\alpha/\alpha} = c(2\pi)^n \sum_{k=1}^{\infty} k^n e^{-k^\alpha/\alpha}.$$

Поскольку при $x > 0$ функция $x^n e^{-x^\alpha/\alpha}$ сначала возрастает, затем убывает и принимает максимальное значение $(n/e)^{n/\alpha}$ при $x = n^{1/\alpha}$, то

$$d_n \leqslant c(2\pi)^n \left(\int_0^\infty x^n e^{-x^\alpha/\alpha}dx + (n/e)^{n/\alpha}\right).$$

Положив $y = x^\alpha/\alpha$, получаем

$$d_n = c(2\pi)^n \left(\int_0^\infty (\alpha y)^{n/\alpha} e^{-y} \frac{(\alpha y)^{1/\alpha}}{\alpha} dy + (n/e)^{n/\alpha} \right)$$
$$= c(2\pi)^n \left(\alpha^{\frac{n+1}{\alpha}-1} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - 1\right) + \left(\frac{n}{e}\right)^{n/\alpha} \right),$$

где Γ — гамма-функция. Согласно формуле Стирлинга $\Gamma(x+1) \lesssim \sqrt{2\pi x}(x/e)^x$. Поэтому

$$d_n \leqslant c(2\pi)^n \left(\left(\frac{n}{e}\right)^{n/\alpha} \frac{1}{\alpha} \alpha^{\frac{n+1}{\alpha}} \sqrt{2\pi\left(\frac{n+1}{\alpha}\right)} \left(\frac{n+1}{e\alpha}\right)^{\frac{n+1}{\alpha}} (1+o(1)) \right)$$
$$= c(2\pi)^n \left(\left(\frac{n}{e}\right)^{n/\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sqrt{2\pi\left(\frac{n+1}{\alpha}\right)} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{\frac{n+1}{\alpha}} (1+o(1)) \right)$$
$$\leqslant c(2\pi)^n \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{\frac{n+1}{\alpha}+\frac{1}{2}} c'',$$

где c'' — некоторая константа. Следовательно,

$$\sqrt[n]{d_n} = \sqrt[n]{cc''/(\alpha\sqrt{\alpha})} \cdot 2\pi((n+1)/e)^{\frac{n+1}{\alpha n}+\frac{1}{2n}}$$
$$= \sqrt[n]{cc''/(\alpha\sqrt{\alpha})} \cdot 2\pi((n+1)/e)^{\frac{1}{\alpha}}((n+1)/e)^{\frac{1}{\alpha n}+\frac{1}{2n}} \sim 2\pi\left(\frac{n}{e}\right)^{1/\alpha}.$$

Поэтому согласно теореме 6 имеем

$$\log \operatorname{Approx} P_\lambda^N \leqslant \inf_n \left((\log N) \left(4n + e\sqrt[n]{2Nd_n} \right) \right)$$
$$\lesssim \inf_n \left((\log N) \left(4n + 2\pi e \sqrt[n]{2N}(n/e)^{1/\alpha} \right) \right).$$

Поскольку $\alpha < 1$, первое слагаемое меньше второго, следовательно,

$$\log \operatorname{Approx} P_\lambda^N \lesssim (\log N) 4\pi e \inf_n \left(\sqrt[n]{2N}(n/e)^{1/\alpha} \right).$$

Выражение $\sqrt[n]{2N}(n/e)^{1/\alpha}$, как функция от n, минимально при $n = \alpha\ln(2N)$. Положим $n = \lfloor \alpha\ln(2N) \rfloor$. Тогда имеем $\sqrt[n]{2N} = e^{n\ln(2N)} \sim e^\alpha$ и $\log \operatorname{Approx} P_\lambda^N \preceq (\log N)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$. Теорема 7 доказана.

Замечание. Используя аналогичные и даже несколько более простые рассуждения, можно убедиться в справедливости «непрерывного» аналога теоремы 7, т. е. показать, что соотношение

$$\mathscr{H}_\varepsilon(P) \asymp \mathscr{H}_\varepsilon(P') \asymp \log^{1+1/\alpha}(1/\varepsilon)$$

справедливо для классов P и P' в любой метрике L_p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

§ 4. О сложности вычисления «дискретных аналитических» функций

К сожалению, получить асимптотику или даже порядок сложности реализации аналитических функций схемами не удается. С помощью мощностных соображений можно установить нижнюю оценку сложности порядка $n^2/\log n$ (для схем, вычисляющих аналитические функции с точностью до n знаков). Тривиальная верхняя оценка сложности получается при вычислении аналитической функции через разложение в ряд Тейлора и организации счета по схеме Горнера: если $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, то для достижения точности 2^{-n} достаточно взять $m = O(n)$ членов ряда. Частичную сумму с нужной точностью можно найти по формуле

$$a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{m-1} + x \cdot a_m) \dots)),$$

причем промежуточные вычисления достаточно проводить с $O(n)$ значащими цифрами. Это вычисление включает $O(n)$ арифметических операций, и если для умножения чисел использовать алгоритм Шёнхаге — Штрассена сложности $M(n) = O(n \log n \log\log n)$, то общая сложность вычисления не превзойдет

$$O(nM(n)) = O(n^2 \log n \log\log n)$$

(см. [6, 12]).

Если же не пытаться вычислить функцию на всем отрезке по единой формуле, а воспользоваться известной идеей о разбиении области определения на несколько отрезков и вычислении функции в зависимости от того отрезка, в который попадет значение аргумента, то можно понизить эту оценку приблизительно в $\log\log n$ раз.

Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ надо вычислять на $[0,1]$, причем для простоты рассуждений $|f^{(i)}(x)| \leqslant i!$ при любом $x \in [0,1]$. Отрезок $[0,1]$ разобьем на N отрезков длины $1/N$. Пусть на отрезке $[k/N, (k+1)/N]$ функция f разлагается в ряд

$$f(k/N + z) = a_0(k) + a_1(k) \cdot x + a_2(k) \cdot x^2 + \dots$$

Поскольку $|a_i(k)| \leqslant 1$, точность 2^{-n} достигается, если взять $O(n/\log N)$ членов ряда; сложность вычисления этих членов (при известных $a_i(k)$) не превышает

$$O\left(\frac{n}{\log N} M(n)\right) = O\left(\frac{n^2 \log n \log\log n}{\log N}\right).$$

Опишем предлагаемую процедуру вычисления, одновременно указывая схемную сложность ее шагов.

1. По заданному x находятся значения $k = \lfloor Nx \rfloor$ и $z = x - \lfloor Nx \rfloor / N$. Сложность реализации соответствующего булева оператора есть $O(n \log N)$.

2. Каждый коэффициент $a_i(k)$ вычисляется булевым оператором $\log N + \mathrm{const}$ входами и $O(n)$ выходами (при этом можно достичь требуемой точности); сложность реализации такого оператора не превосходит $O(nN/\log N)$. Поэтому общая сложность вычисления всех коэффициентов a_i есть $O(n^2 N/\log^2 N)$.

3. Находится значение $f(x)$ с использованием разложения в ряд в окрестности точки k/N. Сложность этого шага, как указывалось выше, не превышает $O(n^2 \log n \log\log n/\log N)$.

Таким образом, общая сложность вычисления $f(x)$ равна

$$O\left(\frac{n^2 \log n \log\log n}{\log N} + n \log N + \frac{n^2 N}{\log^2 N}\right).$$

Наименьшее значение этого выражения достигается при $N = O(\log n)$ и равно $O(n^2 \log n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гуревич В., Волмен Г.** Теория размерности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
2. **Витушкин А. Г.** К тринадцатой проблеме Гильберта // Докл. АН СССР. 1955. Т. 95, № 4. С. 701–704.
3. **Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.** ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, № 2. С. 3–86.
4. **Дискретная** математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974.
5. **Асарин Е. А.** О сложности равномерных приближений непрерывных функций // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, № 3. С. 157–169.
6. **Офман Ю.** О приближенной реализации непрерывных функций на автоматах // Докл. АН СССР. 1963. Т. 152, № 4. С. 823–826.
7. **Тогер А. В.** О сложности некоторых функциональных классов // Докл. АН СССР. 1971. Т. 199, № 4. С. 789–791.
8. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
9. **Аманжаев Г. Г.** О дискретных аналогах непрерывных функций различной гладкости // Докл. РАН. 1995. Т. 342, № 2. С. 154–159.
10. **Аманжаев Г. Г.** Дискретные функции с заданным модулем непрерывности // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1992. № 5. С. 86–89.

11. **Колмогоров А. Н.** Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций // Proc. Intern. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962). Djursholm: Inst. Mittag-Leffler, 1963. С. 230–250.
12. **Офман Ю.** Об алгоритмической сложности дискретных функций // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 1. С. 48–51.

Адрес автора:

Россия,
119899 Москва,
Воробьевы горы,
МГУ, мех.-мат. факультет

Статья поступила

7 декабря 1995 г.