ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1996. Том 3, № 3, 47–70

УДК 519.716

G-ПРЕДПОЛНЫЕ КЛАССЫ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ*)

С. С. Марченков

Для группы G подстановок на множестве E_k G-замыкание определяется как замыкание относительно операций суперпозиции и взятия двойственных функций относительно подстановок из G. Устанавливается, что при довольно слабых ограничениях на степень транзитивности группы G и для любого k, $k \geqslant 5$, в P_k имеется ровно два G-предполных класса: класс Слупецкого и класс идемпотентных функций. Показывается, что в P_k имеется четыре G-предполных класса, когда G есть знакопеременная или полная симметрическая группа подстановок, и дается их описание.

Проблема полноты является одной из центральных проблем в теории функциональных систем. Если имеется некоторый класс функций P с заданным на нем множеством операций O, то проблема полноты в P относительно O состоит в определении условий (как правило, необходимых и достаточных), которым должна удовлетворять произвольная система Q функций из P, чтобы из функций системы Q с помощью операций из O можно было получить все функции класса P.

Класс P_k функций k-значной логики обычно рассматривают как функциональную систему с операцией суперпозиции [1, 2]. Принципиальное решение проблемы полноты в P_k в этом случае следует из теоремы А. В. Кузнецова [1], которая формулируется в терминах предполных классов. Все предполные в P_2 классы найдены Э. Постом [3, 4], в P_3 — С. В. Яблонским [5, 1]. В [1] получено также описание нескольких серий предполных классов в случае $k \geqslant 4$. Этот список расширялся рядом авторов, и в [6, 7] определение всех предполных в P_k классов было завершено. Как установлено в [8], количество предполных в P_k классов с ростом k растет сверхэкспоненциально и пользоваться критерием полноты, основанном на предполных классах, практически невозможно уже при $k = 5$ (эта граница может быть, разумеется, несколько отодвинута с применением ЭВМ).

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95–01–01625).

На практике приходится исследовать на полноту не произвольные системы функций. К тому же часто имеется возможность помимо операции суперпозиции использовать некоторые другие операции. Это приводит к иным постановкам проблемы полноты в P_k. В качестве примера укажем на проблему полноты для систем, содержащих все одноместные функции [9], все подстановки [10] или все полиномы над кольцом вычетов по составному модулю k [11]. Проблема полноты для множеств операций, содержащих операцию суперпозиции в качестве одного из элементов либо в качестве производной операции, исследовалась в [12–22].

В частности, в работах [19–24] для группы подстановок G предлагается рассматривать операцию суперпозиции вместе с операциями взятия двойственных (сопряженных) функций относительно подстановок из G. Этот набор операций приводит к понятиям G-полноты, G-замкнутого и G-предполного классов. Особый интерес к исследованию проблемы G-полноты связан с следующими обстоятельствами. Во-первых, операция взятия двойственной функции является одной из самых распространенных операций в алгебре и многозначной логике. Она отражает часто встречающуюся на практике возможность замены одних значений другими с сохранением исходного отображения. Далее, за счет варьирования группы G можно охватить весьма широкий спектр проблем полноты в P_k, которые с сужением группы G приближаются к проблеме полноты в P_k относительно операции суперпозиции.

При решении проблемы G-полноты алгебро-логический характер операции взятия двойственной функции позволяет использовать теорию Галуа для алгебр Поста [25]. Наконец, одним из самых существенных аргументов в пользу изучения проблемы G-полноты в P_k является то, что согласно результатам из [19–24] для достаточно «большой» группы G множество всех G-замкнутых классов в P_k оказывается конечным, а каждый из G-замкнутых классов имеет эффективное описание. В этих случаях решение проблемы G-полноты представляет собой необходимый этап в построении эффективной G-классификации множества P_k.

Отправным моментом наших исследований может служить результат, сформулированный в [22]. Согласно этому результату для любого $k, k \geqslant 5$, и любой m-транзитивной группы G подстановок на множестве $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, где $m \geqslant \lfloor k/2 \rfloor + 1$, в P_k существует только два G-предполных класса: класс SL_k Слупецкого и класс I_k идемпотентных функций. При $k = 4$ к этим двум классам добавляются класс L_4 квазилинейных функций и класс K_4 функций, самодвойственных относительно подстановок из четверной группы Клейна V_4.

Ниже мы определяем понятие слабой m-транзитивности группы, которое существенно слабее понятия m-транзитивности. Мы усиливаем

результат из [22], показывая, что ту же совокупность G-предполных классов можно получить, если m-транзитивность ($m \geqslant \lfloor k/2 \rfloor + 1$) группы G при $k \geqslant 5$ заменить слабой $\lfloor k/2 \rfloor$-транзитивностью вместе с 3- либо 4-транзитивностью группы G в зависимости от вида k. При $k = 4$ условия из [22] однозначно приводят к полной симметрической группе S_4 подстановок на E_4. Мы доказываем, что можно рассматривать также знакопеременную группу A_4. Кроме того, имея в виду построение A_4-классификации множества P_4, выясняем, что единственными G-предполными классами в K_4 являются классы $K_4 \cap L_4$ и $K_4 \cap I_4$. В отличие от работ [19, 20] все доказательства проводятся чисто логическими средствами с использованием теории Галуа для алгебр Поста.

Напомним некоторые понятия. Пусть $k \geqslant 4$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, P_k — множество всех функций $f : E_k^n \to E_k$ ($n = 1, 2, \ldots$). Предполагается, что на множестве P_k задана операция суперпозиции [1, 2]. Если $Q \subseteq P_k$, то через $[Q]$ обозначается замыкание множества Q относительно операции суперпозиции. Множества $[Q]$ называются *замкнутыми классами*. Понятия полноты и предполноты вводятся обычным образом [1, 2].

Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ и π - подстановка на E_k, то через f^π обозначается функция $\pi^{-1}(f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)))$, которая называется *двойственной* к f относительно подстановки π. Если $f^\pi = f$, то говорят, что функция f *самодвойственна* относительно подстановки π.

Для любых n и i, $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, функции $e_i^n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$ называются *селекторными функциями*. Селекторные функции самодвойственны относительно любых подстановок.

Пусть G — произвольная группа подстановок на E_k. Если $Q \subseteq P_k$, то через $[Q]_G$ обозначаем замыкание множества Q относительно операции суперпозиции и операций взятия двойственных функций относительно подстановок из G. Множество $[Q]_G$ называем *G-замыканием* Q. Понятия G-полноты и G-предполноты вполне аналогичны соответствующим понятиям для операции суперпозиции.

Наряду с функциями на E_k рассматриваем также отношения на E_k. Отношение $\varrho(x_1, \ldots, x_m)$ на E_k отождествляем с множеством всех тех наборов из E_k^m, на которых это отношение истинно. В связи с этим будем употреблять выражения: набор $(a_1, \ldots, a_m)$ принадлежит отношению ϱ, отношение ϱ полно (тождественно истинно), отношение ϱ пусто (тождественно ложно), отношение ϱ содержится в отношении σ или отношение σ есть расширение отношения ϱ. Множество всех отношений на E_k обозначим через Π_k.

На множестве Π_k определим несколько операций (см. также [25]). Если отношения $\varrho(x_1, \ldots, x_m)$ и $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежат множеству Π_k, то *конъюнкцией* отношений ϱ, σ будем называть $(m+n)$-местное

отношение

$$\varrho(x_1, \dots, x_m) \& \sigma(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}).$$

Проекцией отношения $\varrho(x_1, \dots, x_m)$ по переменной x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ называется $(m-1)$-местное отношение

$$(\exists x_i)\varrho(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m),$$

где областью действия квантора $\exists x_i$ является множество E_k. Операции перестановки и отождествления переменных для отношений предполагаем известными. Если $R \subseteq \Pi_k$, то через $[R]$ обозначаем замыкание множества R относительно операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных. Множества $[R]$ будем называть *замкнутыми множествами отношений.*

Пусть ε — отношение эквивалентности на множестве $\{1, 2, \dots, m\}$. *Диагональю*, соответствующей отношению ε, называется такое отношение $\varrho(x_1, \dots, x_m)$, что

$$(a_1, \dots, a_m) \in \varrho \equiv ((i, j) \in \varepsilon \Rightarrow (a_i = a_j)).$$

Пустое отношение удобно считать диагональю.

Если $\varrho(x_1, \dots, x_m) \in \Pi_k$ и π — подстановка на E_k, то отношение

$$\varrho^\pi(x_1, \dots, x_m) \equiv \varrho(\pi(x_1), \dots, \pi(x_m))$$

называется *двойственным* к ϱ относительно подстановки π. Нетрудно видеть, что для любой диагонали δ и любой подстановки π отношение δ^π совпадает с δ.

По аналогии с G-замыканием множества функций вводим понятие G-замыкания множества отношений; G-замыкание множества отношений R обозначаем через $[R]_G$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$, $\varrho(x_1, \dots, x_m) \in \Pi_k$. Говорят, что функция f *сохраняет отношение* ϱ, если для любых n наборов

$$(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn}),$$

принадлежащих отношению ϱ, набор

$$(f(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, f(a_{m1}, \dots, a_{mn}))$$

также принадлежит отношению ϱ. Множество всех функций из P_k, сохраняющих отношение ϱ, обозначим через $\mathrm{Pol}\varrho$, а множество всех отношений из Π_k, которые сохраняет функция f, – через $\mathrm{Inv}f$. Нетрудно видеть, что для любых функции f и отношения ϱ множество $\mathrm{Pol}\varrho$ является замкнутым классом функций, содержащим все селекторные функции, а множество $\mathrm{Inv}f$ — замкнутым классом отношений, содержащим все диагонали.

Отображения Pol и Inv распространим на все подмножества из Π_k и P_k: если $R \subseteq \Pi_k$ и $Q \subseteq P_k$, то

$$\mathrm{Pol}R = \bigcap_{\varrho \in R} \mathrm{Pol}\varrho, \ \mathrm{Inv}Q = \bigcap_{f \in Q} \mathrm{Inv}f.$$

Отображения Pol и Inv определяют соответствия Галуа [26, 27] между частично упорядоченными по включению множествами всех подмножеств из P_k и всех подмножеств из Π_k. При этом Галуа-замкнутыми множествами являются замкнутые классы функций из P_k, содержащие все селекторные функции, и замкнутые классы отношений из Π_k, содержащие все диагонали [25]. Отображение Pol (или Inv) задает антиизоморфизм между частично упорядоченными по включению множествами Галуа-замкнутых классов функций и Галуа-замкнутых классов отношений. В дальнейшем ради краткости будем говорить о соответствии Галуа, имея в виду соответствия Pol и Inv, рассматриваемые лишь для Галуа-замкнутых классов функций и отношений.

Если $f \in \mathrm{Pol}\varrho$ и π — подстановка, то $f^\pi \in \mathrm{Pol}\varrho^\pi$. Отсюда следует, что для любой группы G функтор Pol отображает G-замкнутые классы отношений в G-замкнутые классы функций, а функтор Inv — G-замкнутые классы функций в G-замкнутые классы отношений.

Пусть G — группа подстановок на E_k и $1 \leqslant m \leqslant k$. Группа G называется *m-транзитивной*, если для любых двух упорядоченных наборов $(a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m)$, каждый из которых состоит из попарно различных элементов, в группе G найдется такая подстановка π, что $\pi(a_1) = b_1, \dots, \pi(a_m) = b_m$. Группу G будем называть *слабо m-транзитивной*, если для любого $l, 1 \leqslant l \leqslant m$, и для любых двух l-элементных подмножеств E, F из E_k в группе G найдется такая подстановка π, что $\pi(E) = F$. Очевидно, что из m-транзитивности группы G вытекает ее слабая m-транзитивность. Обратное, вообще говоря, неверно: при $k \geqslant 4$ знакопеременная группа подстановок на E_k является слабо $(k-1)$-транзитивной, но не $(k-1)$-транзитивной.

Отметим следующий факт, которым мы будем пользоваться в дальнейшем: если группа подстановок на E_k слабо $\lfloor k/2 \rfloor$-транзитивна, то она слабо k-транзитивна. В самом деле, если подстановка π переводит m-элементное множество E в m-элементное множество F, то π переводит $(k-m)$-элементное множество $E_k \setminus E$ в $(k-m)$-элементное множество $E_k \setminus F$. Остается заметить, что $k - \lfloor k/2 \rfloor = \lceil k/2 \rceil$ и $\lceil k/2 \rceil - \lfloor k/2 \rfloor \leqslant 1$.

Если π — подстановка, то отношение $\pi(x_1) = x_2$ называется *графиком* подстановки π.

Согласно результатам из [6, 7] любой предполный в P_k класс определяется (в смысле функтора Pol) отношением одного из множеств **P**, **O**, **L**, **E**, **C**, **B**.

Множество $\mathbf{P}$ состоит из графиков всех подстановок на E_k, которые разлагаются в циклы одинаковой длины p, где p — простое число.

Множество $\mathbf{O}$ состоит из всех двуместных отношений, которые определяют на E_k частичный порядок с наименьшим и наибольшим элементами.

Множество $\mathbf{L}$ непусто только в том случае, когда $k = p^m$, где p — простое число, $m \geqslant 1$. Пусть в этом случае на множестве E_k определена структура абелевой p-группы периода p [28] и «+» есть операция сложения в этой группе. Тогда при $p = 2$ в классе $\mathbf{L}$ содержится четырехместное отношение

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4, \tag{1}$$

а при $p \geqslant 3$ — трехместное отношение

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_3. \tag{2}$$

Множество $\mathbf{E}$ состоит из нетривиальных (неединичных и неполных) отношений эквивалентности на E_k.

Для любого n, $n \geqslant 2$, положим

$$\tau_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i = x_j).$$

Отношение $\varrho(x_1, \dots, x_n)$ называется *вполне рефлексивным*, если оно содержит отношение τ_n, и *вполне симметричным*, если оно не меняется при любой перестановке переменных. Одноместное отношение по определению считаем вполне рефлексивным. Неполное отношение $\varrho(x_1, \dots, x_n)$ называется *центральным*, если оно вполне рефлексивно, вполне симметрично и существует такое непустое подмножество C в E_k (центр отношения ϱ), что отношению ϱ принадлежит любой набор $(a_1, \dots, a_n)$ такой, что $\{a_1, \dots, a_n\} \cap C \neq \varnothing$.

Множество $\mathbf{C}$ состоит из всех центральных отношений на E_k.

Определение множества $\mathbf{B}$ в полном объеме нам не потребуется. Отметим лишь, что множество $\mathbf{B}$ содержит отношение τ_k, а любое отношение из $\mathbf{B}$ вполне рефлексивно, вполне симметрично и зависит не менее чем от трех переменных.

Для любого $k, k \geqslant 4$, через SL_k обозначим предполный в P_k класс, который определяется отношением τ_k (класс Слупецкого): $SL_k = \mathrm{Pol}\tau_k$. Так как для произвольной подстановки π на множестве E_k выполняется равенство $\tau_k^\pi = \tau_k$, то для любой группы G подстановок на E_k класс SL_k является G-замкнутым.

Для любого $k, k \geqslant 4$, через I_k обозначим множество всех идемпотентных функций из P_k, т. е. таких функций $f(x_1, \dots, x_n)$, что $f(x, \dots, x) = x$. Легко видеть, что класс I_k является пересечением предполных в P_k

классов, определяемых одноместными отношениями $x = 0, \dots, x = k-1$. Иными словами, $I_k = \mathrm{Pol}\{x = 0, \dots, x = k-1\}$. Так как любая подстановка на E_k лишь переставляет отношения в последовательности $x = 0, \dots, x = k-1$, то для любой группы G подстановок на E_k класс I_k является G-замкнутым.

Через $|E|$ обозначается число элементов множества E.

Теорема 1. *Пусть $k \geqslant 5$ и G — слабо $\lfloor k/2 \rfloor$-транзитивная группа подстановок на E_k, которая является 4-транзитивной при четном k и при $k = p^m$, где p — простое число, $m \geqslant 1$, и 3-транзитивной при остальных значениях k. Тогда множество G-предполных в P_k классов состоит из классов SL_k и I_k.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что классы SL_k, I_k не содержатся друг в друге. Покажем, что всякий G-замкнутый класс отношений на E_k, содержащий недиагональное отношение, содержит хотя бы одно из отношений τ_k или $x = 0$. Так как для транзитивной группы G множество $[\{x = 0\}]_G$ содержит все отношения $x = 0, \dots, x = k-1$, то в силу соответствия Галуа следует, что любой G-замкнутый класс функций, отличный от P_k, содержится в одном из классов SL_k или I_k. Это означает, что SL_k, I_k — единственные G-предполные классы в P_k.

Итак, пусть Π — G-замкнутый класс отношений на E_k, содержащий недиагональное отношение. Пользуясь замкнутостью класса Π, соответствием Галуа и основным результатом работы [7], заключаем, что в класс Π входит отношение ϱ, содержащееся в одном из множеств **P**, **O**, **L**, **E**, **C**, **B**.

Сначала предположим, что ϱ — одноместное отношение из **C**. Если отношению ϱ принадлежит только один элемент, то, разумеется, $(x = 0) \in \Pi$. Пусть отношению ϱ принадлежит m элементов, $2 \leqslant m < k$, a, b, c — элементы из E_k такие, что $a \neq b$, a, b принадлежат, а c — не принадлежит отношению ϱ. Пользуясь 3-транзитивностью группы G, выберем в G такую подстановку π, что $\pi(a) = a$ и $\pi(b) = c$. Тогда отношению ϱ^π из класса Π принадлежит элемент a и не принадлежит элемент b. Следовательно, непустому отношению $\varrho(x) \& \varrho^\pi(x)$ из класса Π принадлежит менее m элементов. В случае необходимости повторяя этот процесс, получаем отношение вида $x = a$.

Пусть ϱ — двуместное отношение из **P**. Покажем, что в класс Π входит отношение $x = 0$. Согласно определению множества **P** отношение $\varrho(x_1, x_2)$ является графиком подстановки π на E_k, разлагающейся в циклы одинаковой длины p, где p — простое число. Пусть $p = 2$. Без ограничения общности можно считать, что разложение подстановки π на циклы имеет вид $(01)(23)(45)\dots$ (напомним, что $k \geqslant 5$). Так как в рассматриваемом случае k четно, то группа G 4-транзитивна и в ней

имеется такая подстановка φ, что $\varphi(i) = i$ при $0 \leqslant i \leqslant 2$ и $\varphi(3) = 4$. Отношение ϱ^{φ} представляет собой график подстановки $\varphi^{-1}\pi\varphi$, сопряженной с π посредством φ. Из определения φ следует, что подстановка $\varphi^{-1}\pi\varphi$ переводит 0 в 1, 1 в 0 и 2 в элемент, не входящий в E_4. Следовательно, подстановка $\pi\varphi^{-1}\pi\varphi$ оставляет неподвижными элементы 0,1 и отлична от тождественной подстановки. Тогда отношению

$$\varrho_1(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\varrho^{\varphi}(x_1, y) \& \varrho(y, x_2)), \tag{3}$$

которое является графиком подстановки $\pi\varphi^{-1}\pi\varphi$, принадлежат наборы (0,0), (1,1), но не принадлежит, например, набор (2,2). Таким образом, в класс Π входит одноместное отношение $\varrho_1(x, x)$.

Предположим, что $p \geqslant 3$. Без ограничения общности считаем, что разложение подстановки π на циклы имеет вид $(01\ldots p-1)(p\ldots)\ldots$ Пользуясь 3-транзитивностью группы G, выберем в G такую подстановку φ, что $\varphi(0) = p-1$, $\varphi(p-1) = 0$, $\varphi(1) = 2$ при $p \geqslant 5$ и $\varphi(1) = 3$ при $p = 3$. Легко видеть, что подстановка $\pi\varphi^{-1}\pi\varphi$ переводит 0 в 0 и 1 в элемент, отличный от 1. Таким образом, если определить отношение $\varrho_1(x_1, x_2)$ по формуле (3), то $\varrho_1(x_1, x_2)$ окажется одноместным отношением из Π, которому принадлежит 0 и не принадлежит 1.

Покажем, что во всех оставшихся случаях множество Π содержит отношение τ_k. Сначала рассмотрим случай, когда отношение $\varrho(x_1, \ldots, x_n)$ вполне рефлексивно, вполне симметрично и $n \geqslant 3$ (этот случай целиком охватывает отношения из множества **B**, а также отношения из множества **C**, зависящие не менее чем от трех переменных). Ясно, что для любой подстановки π отношение ϱ^{π} вполне рефлексивно. Так как отношение ϱ неполно и вполне рефлексивно, то ему не принадлежит некоторый набор $(b_1, \ldots, b_n)$ с попарно различными компонентами. Пользуясь слабой k-транзитивностью группы G, для любого набора $(a_1, \ldots, a_n)$ с попарно различными компонентами, принадлежащего отношению ϱ, в G можно найти подстановку π, переводящую множество $\{a_1, \ldots, a_n\}$ в множество $\{b_1, \ldots, b_n\}$. В силу полной симметричности отношения ϱ набор $(a_1, \ldots, a_n)$ не принадлежит отношению ϱ^{π}. Поэтому если $\pi_1, \ldots, \pi_s$ — все подстановки из G, то

$$\varrho^{\pi_1}(x_1, \ldots, x_n) \& \ldots \& \varrho^{\pi_s}(x_1, \ldots, x_n) \equiv \tau_n(x_1, \ldots, x_n).$$

В случае $n = k$ требуемое отношение τ_k получено. Пусть $n < k$. При $n = 3$ получаем отношение τ_4:

$$\tau_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (\exists y)(\tau_3(x_1, x_2, y) \& \tau_3(x_3, x_4, y)). \tag{4}$$

Если же $n \geqslant 4$, то справедлива эквивалентность

$$\tau_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \equiv (\exists y_1) \ldots (\exists y_m)(\mathop{\&}_{1 \leqslant i \leqslant m} \tau_n(x_1^i, \ldots, x_{n-1}^i, y_i) \&$$

$$\mathop{\&}_{\substack{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant m\\ 1\leqslant j_4<\ldots<j_n\leqslant n+1}} \tau_n(y_{i_1},y_{i_2},y_{i_3},x_{j_4},\ldots,x_{j_n})), \qquad (5)$$

где $m=\binom{n+1}{2}$ и $\{x_1^1,\ldots,x_{n-1}^1\},\ldots,\{x_1^m,\ldots,x_{n-1}^m\}$ — совокупность всех подмножеств мощности $n-1$ из множества $\{x_1,\ldots,x_{n+1}\}$.

Чтобы убедиться в справедливости (5), предположим, что набор $(a_1,\ldots,a_{n+1})$ содержит не более n различных значений из E_k. Тогда в качестве значений переменных $y_1,\ldots,y_m$ в (5) можно выбрать не более двух различных значений из множества $\{a_1,\ldots,a_{n+1}\}$, одно из которых встречается в наборе $(a_1,\ldots,a_{n+1})$ с кратностью не менее двух. Пусть все элементы набора $(a_1,\ldots,a_{n+1})$ различны, но правая часть из (5) в этом наборе истинна. Тогда из истинности $\tau_n(a_1,\ldots,a_{n-1},y_1)$ вытекает, что $y_1\in\{a_1,\ldots,a_{n-1}\}$. Можно считать, что $y_1=a_1$. Из истинности $\tau_n(a_2,\ldots,a_n,y_2)$ следует, что $y_2\in\{a_2,\ldots,a_n\}$. Пусть, например, $y_2=a_2$. Из истинности $\tau_n(a_3,\ldots,a_{n+1},y_3)$ следует, что $y_3\in\{a_3,\ldots,a_{n+1}\}$. Предположив, что $y_3=a_3$, видим, что $\tau_n(y_1,y_2,y_3,a_4,\ldots,a_n)$ не может быть истинным. Противоречие завершает доказательство (5). Таким образом, при $n<k$ формулы (4), (5) позволяют получить отношение τ_k из отношения τ_n.

Аналогичная схема рассуждения используется, когда $k=2^m$ и ϱ — отношение (1) из **L**. В этом случае отношение ϱ можно задать в виде

$$\varrho(x_1,x_2,x_3,x_4)\equiv(x_1+x_2+x_3+x_4=0), \qquad (6)$$

где 0 является нулем соответствующей абелевой 2-группы. Так как порядки всех ненулевых элементов абелевой 2-группы равны двум, то из представления (6) следует, что отношение ϱ вполне симметрично, содержит отношение

$$(x_1=x_2)\&(x_3=x_4)\vee(x_1=x_3)\&(x_2=x_4)\vee(x_1=x_4)\&(x_2=x_3), \qquad (7)$$

а также некоторые наборы, состоящие из попарно различных элементов. Ясно, что для любой подстановки π отношение ϱ^π, как и отношение ϱ, является расширением отношения (7). Пользуясь теперь полной симметричностью отношения ϱ, слабой k-транзитивностью группы G и всеми подстановками $\pi_1,\ldots,\pi_s$ группы G, убеждаемся, что отношение

$$\varrho^{\pi_1}(x_1,x_2,x_3,x_4)\&\ldots\&\varrho^{\pi_s}(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

совпадает с отношением (7). Проектируя отношение (7) по переменной x_4, получаем отношение $\tau_3(x_1,x_2,x_3)$.

Пусть $\varrho\in\mathbf{E}$. Сначала предположим, что ϱ имеет только один неодноэлементный класс эквивалентности E, т. е.

$$\varrho(x_1,x_2)\equiv(x_1=x_2)\vee(x_1\in E)\&(x_2\in E),$$

и пусть в E входит менее $k-1$ элементов. Для определенности будем считать, что $E = E_t$, где $2 \leqslant t \leqslant k-2$. Пользуясь слабой k-транзитивностью группы G, выберем в G такую подстановку π, что $\pi(E_{t-1} \cup \{t\}) = E_t$. Тогда ϱ^π является отношением эквивалентности на E_k, причем

$$\varrho^\pi(x_1, x_2) \equiv (x_1 = x_2) \vee (x_1 \in E_{t-1} \cup \{t\})\&(x_2 \in E_{t-1} \cup \{t\}).$$

Положим

$$\varrho_1(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\varrho(x_1, y)\&\varrho^\pi(x_2, y)).$$

Нетрудно убедиться в том, что отношение ϱ_1 получается из отношения эквивалентности

$$(x_1 = x_2) \vee (x_1 \in E_{t+1})\&(x_2 \in E_{t+1})$$

удалением набора $(t, t-1)$. Значит,

$$(\exists y)(\varrho_1(x_1, y)\&\varrho_1(y, x_2)) \equiv (x_1 = x_2) \vee (x_1 \in E_{t+1})\&(x_2 \in E_{t+1}).$$

Проведенные рассуждения показывают, как по отношению эквивалентности

$$(x_1 = x_2) \vee (x_1 \in E_t)\&(x_2 \in E_t),$$

где $2 \leqslant t \leqslant k-2$, можно получить отношение эквивалентности

$$(x_1 = x_2) \vee (x_1 \in E_{k-1})\&(x_2 \in E_{k-1}).$$

Далее, пользуясь транзитивностью группы G, путем взятия двойственного отношения из последного отношения получаем все отношения эквивалентности вида

$$(x_1 = x_2) \vee (x_1 \in F)\&(x_2 \in F), \tag{8}$$

где $|F| = k-1$. Вместе с тем изложенный выше прием построения отношения ϱ_1 для произвольных неравных элементов a, b позволяет из отношений (8) строить отношения вида

$$\varrho_{ab}(x_1, x_2) \equiv (x_1 \neq a \vee x_2 \neq b),$$

которые отличаются от полного отношения только одним набором (a, b). Таким образом, отношение

$$\varrho_2(x_1, \ldots, x_k) \equiv (\exists y)(\varrho_{01}(x_1, y)\&\varrho_{12}(x_2, y)\& \ldots \&\varrho_{k-1,0}(x_k, y))$$

принадлежит множеству П. Из определения отношений ϱ_{ab} следует, что набор $(0, 1, \ldots, k-1)$ не принадлежит отношению ϱ_2. Кроме того, отношение ϱ_2 вполне рефлексивно. В самом деле, пусть в наборе $(a_1, \ldots, a_k)$ содержится не более $k-1$ различных значений. Тогда он отличается

от набора $(0, 1, \ldots, k-1)$ хотя бы в одной позиции. Пусть для определенности $a_1 \neq 0$. Значит, отношение $\varrho_{01}(a_1, y)$ полное, а каждому из остальных $k-1$ отношений $\varrho_{12}(a_2, y), \ldots, \varrho_{k-1,0}(a_k, y)$ принадлежит не менее $k-1$ значений. Поэтому отношение $\varrho_{12}(a_2, y) \& \ldots \& \varrho_{k-1,0}(a_k, y)$ непусто и необходимое для определения отношения ϱ_2 значение переменной y существует.

Остается сделать последний шаг, чтобы из отношения ϱ_2 получить отношение τ_k:

$$\tau_k(x_1, \ldots, x_k) \equiv \& \, \varrho_2(x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(k)}),$$

где конъюнкция берется по всем подстановкам φ на множестве $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Допустим, что отношение ϱ из множества $\mathbf{E}$ имеет не менее двух неодноэлементных классов эквивалентности. Покажем, как из ϱ можно получить отношение с одним неодноэлементным классом эквивалентности. Обозначим через E класс с максимальным числом элементов. Пусть $|E| \geqslant 3$, a, b, c — различные элементы из E и $d \notin E$. Пользуясь 3-транзитивностью группы G, выберем в G такую подстановку π, что $\pi(\{a, b\}) = \{a, b\}$ и $\pi(c) = d$. Тогда

$$\varrho(x_1, x_2) \& \varrho^{\pi}(x_1, x_2) \tag{9}$$

называется *отношением эквивалентности* на E_k — пересечением отношений эквивалентности ϱ и ϱ^{π}. При этом, как вытекает из определения подстановки π, класс E разбивается по крайней мере на два класса эквивалентности, один из которых нетривиален и содержит элементы a, b. Поэтому предположим, что $|E| = 2$, $E = \{a, b\}$ и $\{c, d\}$ — класс эквивалентности отношения ϱ, отличный от E. Рассмотрим сначала случай, когда отношение ϱ имеет одноэлементный класс эквивалентности. Обозначим его через $\{e\}$. Пользуясь 3-транзитивностью группы G, выберем в G такую подстановку π, что $\pi(\{a, b\}) = \{a, b\}$ и $\pi(c) = e$. Тогда (9) окажется таким отношением эквивалентности на E_k, в котором элементы a, b эквивалентны, а элементы c, d — неэквивалентны. Если у отношения ϱ отсутствуют одноэлементные классы эквивалентности, то k четно. Обозначим через e элемент, отличный от a, b, c, d. Используя 4-транзитивность группы G, выберем в G подстановку π такую, что $\pi(\{a, b\}) = \{a, b\}$ и $\pi(\{c, d\}) = \{c, e\}$. Как и выше, у отношения эквивалентности (9) элементы a, b будут эквивалентны, а элементы c, d — неэквивалентны.

Завершим рассмотрение центральных отношений. Пусть ϱ — двуместное отношение из $\mathbf{C}$ и, например, 0 входит в центр отношения ϱ, а набор (a, b) не принадлежит отношению ϱ. Если отношению ϱ принадлежит такой набор (c, d), что $c \neq d$ и $0 \notin \{c, d\}$, то пусть $\pi_1, \ldots, \pi_s$ —

все подстановки группы G, которые переводят 0 в 0, а наборы (c, d) указанного вида — в набор (a, b). Тогда

$$\varrho_0(x_1, x_2) \equiv \varrho^{\pi_1}(x_1, x_2) \& \ldots \& \varrho^{\pi_s}(x_1, x_2)$$

является центральным отношением с центром 0, которому не принадлежит ни один набор (c, d), где $c \neq d$ и $0 \notin \{c, d\}$. Если в группе G выбрать подстановку π такую, что $\pi(0) = 1$, $\pi(1) = 0$, то ϱ_0^π будет центральным отношением с центром 1. Поэтому $\varrho_0(x_1, x_2) \& \varrho_0^\pi(x_1, x_2)$ есть нетривиальное отношение эквивалентности с единственным неодноэлементным классом эквивалентности $\{0, 1\}$.

Пусть $k = p^m$, где p — простое число, $p \geqslant 3$, и $\varrho(x_1, x_2, x_3)$ — отношение (2) из **L**. Заметим, что отношение ϱ симметрично по переменным x_1, x_2 и ему принадлежат наборы с тремя либо одинаковыми, либо попарно различными компонентами, причем для любых x_1, x_2 существует единственное x_3 такое, что $\varrho(x_1, x_2, x_3)$ истинно. Пусть элементы $a_1, \ldots, a_5$ попарно различны, наборы (a_1, a_2, a_3) и (a_2, a_3, a_4) принадлежат, а набор (a_2, a_3, a_5) — не принадлежит отношению ϱ. Пользуясь 4-транзитивностью группы G, выберем в G подстановку π такую, что $\pi(a_1) = a_1$, $\pi(a_2) = a_2$, $\pi(a_3) = a_3$ и $\pi(a_4) = a_5$. Тогда отношение

$$\varrho_1(x_1, x_2, x_3) \equiv \varrho(x_1, x_2, x_3) \& \varrho^\pi(x_1, x_2, x_3)$$

симметрично по переменным x_1, x_2, ему принадлежит набор (a_1, a_2, a_3) и не принадлежит набор (a_2, a_3, a_4). Полагая

$$\varrho_2(x_1, x_2) \equiv (\exists y) \varrho_1(x_1, x_2, y),$$

видим, что ϱ_2 — рефлексивное и симметричное отношение, которому принадлежит набор (a_1, a_2), но не принадлежит набор (a_2, a_3). Если $\pi_1, \ldots, \pi_s$ — все подстановки группы G, сохраняющие множество $\{a_1, a_2\}$, то, используя 3-транзитивность группы G, убеждаемся в том, что отношение

$$\varrho_3(x_1, x_2) \equiv \varrho_2^{\pi_1}(x_1, x_2) \& \ldots \& \varrho_2^{\pi_s}(x_1, x_2)$$

рефлексивно, симметрично, $\varrho_3(a_1, a_2)$ истинно и $\varrho_3(a_2, c)$ ложно для любого $c, c \notin \{a_1, a_2\}$. Аналогично определяем рефлексивное и симметричное отношение $\varrho_4(x_1, x_2)$, которому принадлежит набор (a_1, a_2) и не принадлежит ни один набор вида (a_1, c), где $c \notin \{a_1, a_2\}$. Положим

$$\varrho_5(x_1, x_2) \equiv \varrho_3(x_1, x_2) \& \varrho_4(x_1, x_2).$$

Отношение ϱ_5 рефлексивно, симметрично, $\varrho_5(a_1, a_2)$ истинно, а $\varrho_5(a_1, c)$ и $\varrho_5(a_2, c)$ ложны для любого $c, c \notin \{a_1, a_2\}$. Определяя последовательно отношения

$$\varrho_6(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\varrho_5(x_1, y) \& \varrho_5(x_2, y)),$$

$$\varrho_7(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\varrho_6(x_1, y) \& \varrho_6(x_2, y)), \dots ,$$

не более чем через $k-2$ шага придем к транзитивному замыканию отношения ϱ_5 — нетривиальному отношению эквивалентности на E_k, в котором $\{a_1, a_2\}$ будет являться классом эквивалентности.

Завершим доказательство теоремы рассмотрением отношения $\varrho(x_1, x_2)$ из **O**. Предположим, что 0 — наименьший элемент частичного порядка ϱ и $\varrho(0, a)$ истинно для любого элемента a из E_k. Так как группа G 3-транзитивна, то для любых двух неравных и отличных от 0 элементов a_1, a_2 таких, что $\varrho(a_1, a_2)$ истинно, в группе G найдется подстановка π, удовлетворяющая условиям: $\pi(0) = 0$ и $\varrho(\pi(a_1), \pi(a_2))$ ложно. Если $\pi_1, \dots, \pi_s$ — все подстановки из G, которые в указанном смысле отвечают всем перечисленным парам элементов (a_1, a_2), то отношение

$$\varrho_1(x_1, x_2) \equiv \varrho^{\pi_1}(x_1, x_2) \& \dots \& \varrho^{\pi_s}(x_1, x_2)$$

задает частичный порядок на E_k с наименьшим элементом 0 и попарно не сравнимыми элементами $1, \dots, k-1$. Полагая

$$\varrho_2(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\varrho_1(x_1, y) \& \varrho_1(x_2, y)),$$

замечаем, что отношению ϱ_2 принадлежат все наборы вида $(0, a), (a, 0)$, (a, a) и не принадлежат наборы вида (a, b), где $a \neq b$ и $0 \notin \{a, b\}$. Значит, ϱ_2 — центральное отношение с центром 0. Теорема доказана.

Известно (см., например, [2]), что всякую функцию из P_4 можно единственным образом представить в виде полинома над полем Галуа $GF(4)$, сложение и умножение в котором задаются следующими таблицами:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Обозначим через F множество всех функций из P_4, представимых полиномами вида

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}, \tag{10}$$

где $a_1, \dots, a_n \in E_2$, $a_{n+1} \in E_4$. Из определения легко следует, что F — замкнутый класс в P_4, содержащий все селекторные функции.

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — такие отношения эквивалентности на E_4, что

$$\varepsilon_1(x_1, x_2) \equiv (x_1, x_2 \in \{0, 1\}) \vee (x_1, x_2 \in \{2, 3\}),$$
$$\varepsilon_2(x_1, x_2) \equiv (x_1, x_2 \in \{0, 2\}) \vee (x_1, x_2 \in \{1, 3\}),$$
$$\varepsilon_3(x_1, x_2) \equiv (x_1, x_2 \in \{0, 3\}) \vee (x_1, x_2 \in \{1, 2\}).$$

Лемма. $\mathrm{Pol}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} = F$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что отношения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ сохраняют функцию $x_1 + x_2$ и все константы. Так как система $\{1, 2, x_1 + x_2\}$ полна (относительно суперпозиции) в F, то $F \subseteq \mathrm{Pol}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

Предположим, что классу $\mathrm{Pol}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ принадлежит функция вида (10), где хотя бы один из коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$ не входит в E_2. Пусть, например, $a_1 \in \{2, 3\}$. Так как $F \subseteq \mathrm{Pol}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ и класс $\mathrm{Pol}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ замкнут относительно суперпозиции, то в этом случае классу $\mathrm{Pol}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ будет принадлежать функция

$$(a_1 x_1 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 + a_{n+1}) + a_{n+1} = a_1 x_1.$$

Однако функции $2x_1, 3x_1$ не сохраняют отношения ε_1.

Предположим, что в класс $\mathrm{Pol}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ входит нелинейная (в смысле представления полиномом над полем $GF(4)$) функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, зависящая более чем от одной переменной. Для полинома, представляющего функцию f, имеются две возможности.

Полином для функции f содержит квадрат или куб некоторой переменной. Пусть это будет x_1. Тогда f представима в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^3 g_1(x_2, \ldots, x_n) + x_1^2 g_2(x_2, \ldots, x_n) \\ + x_1 g_3(x_2, \ldots, x_n) + g_4(x_2, \ldots, x_n),$$

где хотя бы одна из функций g_1, g_2 не равна тождественно нулю. Если такой функцией является g_1, то выбираем такие константы $b_2, \ldots, b_n$, что $g_1(b_2, \ldots, b_n) \neq 0$, и получаем функцию $f(x_1, b_2, \ldots, b_n)$ от одной переменной, нелинейную в классе $\mathrm{Pol}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$. Если g_1 тождественно равна нулю, то поступаем аналогичным образом, используя функцию g_2.

Пусть полином для функции f содержит каждую переменную в первой степени. Ввиду нелинейности полинома хотя бы в одно его слагаемое входят две переменные. Пусть это переменные x_1, x_2. Тогда f представима в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 h_1(x_3, \ldots, x_n) + x_1 h_2(x_3, \ldots, x_n) \\ + x_2 h_3(x_3, \ldots, x_n) + h_4(x_3, \ldots, x_n),$$

где функция h_1 не равна тождественно нулю. Отождествляя переменные x_1, x_2, приходим к предыдущему случаю.

Итак, нам остается рассмотреть случай, когда в класс $\mathrm{Pol}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ входит одноместная нелинейная функция $f(x)$. Ясно, что все подстановки на E_4 имеют вид $ax + b$ или $ax^2 + b$, где $a \neq 0$. Поэтому если f — подстановка, то $f(x) = ax^2 + b$. Так как функция $x + b$ принадлежит

классу $\mathrm{Pol}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, то можно считать, что $b = 0$. Ясно, что функции $x^2, 2x^2, 3x^2$ не сохраняют соответственно отношений $\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_1$.

Предположим, что функция $f(x)$ не является подстановкой, и пусть $f(b_1) = f(b_2) = c_1$, $f(b_3) = c_2$, где $b_1 \neq b_2$ и $c_1 \neq c_2$. Если пара (b_1, b_3) принадлежит отношению ε_i, то из предположения $f \in \mathrm{Pol}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ следует, что пара (c_1, c_2) также должна принадлежать отношению ε_i. Но тогда функция f не может сохранять отношение ε_j, которому принадлежит пара (b_2, b_3). Противоречие завершает доказательство леммы.

Обозначим через S_4, A_4, V_4 соответственно полную симметрическую группу подстановок на E_4, знакопеременную группу и четверную группу Клейна. Группа V_4 кроме тождественной подстановки содержит еще три подстановки с цикловыми разложениями (01)(23), (02)(13), (03)(12). Пусть K_4 есть множество всех функций из P_4, самодвойственных относительно всех подстановок из V_4. Так как группа V_4 нормальна в S_4, то для любой группы $G, G \subseteq S_4$, класс K_4 является G-замкнутым. Отметим, что класс K_4 может быть определен как класс всех функций из P_4, сохраняющих графики подстановок из группы V_4.

При $k = 4$ множество $\mathbf{L}$ состоит из единственного отношения (1), которое можно представить в виде [8]

$$(x_1 = x_2)\&(x_3 = x_4) \vee (x_1 = x_3)\&(x_2 = x_4) \vee (x_1 = x_4)\&(x_2 = x_3) \vee \mathop{\&}_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (x_i \neq x_j). \tag{11}$$

Множество всех функций из P_4, сохраняющих отношение (11), обозначим через L_4. Ясно, что отношение (11) совпадает с любым своим двойственным отношением. Поэтому класс L_4 является G-замкнутым для любой группы $G, G \subseteq S_4$.

Теорема 2. *Предположим, что $G \in \{A_4, S_4\}$. Тогда классы SL_4, I_4, K_4, L_4 и только они являются G-предполными в P_4.*

Доказательство. Сначала установим, что классы SL_4, I_4, K_4, L_4 попарно не содержатся друг в друге. Поскольку классы SL_4, L_4 предполны в P_4 [7], то они не содержатся друг в друге и в классах I_4, K_4. Поскольку каждый класс I_4, K_4 содержит множество всех однородных функций [29, 30], то I_4, K_4 не могут содержаться в SL_4 и L_4. Функция $\min(x_1, x_2)$ из класса I_4 не принадлежит классу K_4, а нетождественные подстановки из группы V_4, входящие в класс K_4, — классу I_4.

Оставшаяся часть доказательства в значительной степени повторяет доказательство теоремы 1. Поэтому остановимся лишь на отличительных моментах. Сначала заметим, что группа G 2-транзитивна и, следовательно, слабо 4-транзитивна. В связи с этим мы опускаем случаи одноместного отношения и вполне рефлексивного, вполне симметричного отношения от трех или четырех переменных.

Пусть $\varrho(x_1, x_2) \in \mathbf{P}$. Тогда отношение ϱ является графиком подстановки π, разлагающейся в два цикла длины 2. Предположим, например, что $\pi = (01)(23)$. Так как $A_4 \subseteq G$, то группе G принадлежит четная подстановка $\varphi = (012)(3)$. Имеем $\pi\varphi^{-1}\pi\varphi = (03)(12)$. Таким образом, множество $[\{\varrho\}]_G$ содержит графики всех подстановок из группы V_4.

Случай $\varrho \in \mathbf{L}$ не требует дополнительных рассмотрений.

Если $\varrho \in \mathbf{E}$ и ϱ имеет только один неодноэлементный класс эквивалентности, то проходят рассуждения из доказательства теоремы 1 (напомним, что группа G слабо 4-транзитивна). Поэтому предположим, что отношение ϱ имеет два двухэлементных класса эквивалентности, например $\{0, 1\}$ и $\{2, 3\}$. Тогда $\varrho(x_1, x_2) \equiv \varepsilon_1(x_1, x_2)$. Два других отношения эквивалентности $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ получаем из отношения ε_1, используя 2-транзитивность группы G. Согласно доказанной лемме и соответствию Галуа имеем $\mathrm{Pol}[\{\varrho\}]_G \subseteq F$. Так как функции из F очевидно сохраняют отношение (1), то $F \subseteq \mathrm{Pol}\{x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$. Из включения $\mathrm{Pol}[\{\varrho\}]_G \subseteq \mathrm{Pol}\{x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$ в силу соответствия Галуа следует, что отношение (1) принадлежит множеству $[\{\varrho\}]_G$.

Двуместные центральные отношения рассматриваются так же, как в теореме 1. Следует лишь учесть, что если набор (c, d) принадлежит, а набор (a, b) не принадлежит отношению ϱ и $c \neq d$, $a \neq b$, $0 \notin \{a, b, c, d\}$, то $|\{a, b\} \cap \{c, d\}| = 1$. Поэтому в группе A_4 существует такая подстановка π, что $\pi(0) = 0$ и $\pi\{c, d\} = \{a, b\}$. Например, в случае $a = c = 1$, $b = 2$, $d = 3$ такой подстановкой π является $(0)(123)$.

Пусть $\varrho(x_1, x_2) \in \mathbf{O}$ и 0 — наименьший элемент частичного порядка ϱ. Тогда имеется только два неизоморфных частичных порядка ϱ на E_4. Нетрудно убедиться в том, что если $a \neq b$, $0 \notin \{a, b\}$ и $\varrho(a, b)$ истинно, то в группе A_4 существует такая подстановка π, что $\pi(0) = 0$ и $\varrho(\pi(a), \pi(b))$ ложно.

Изучим отношения класса $\mathrm{Inv}K_4$. Поскольку группа V_4 состоит из подстановок, задаваемых функциями $x, x+1, x+2, x+3$, где сложение рассматривается в поле $GF(4)$, то класс K_4 можно определить как класс всех функций из P_4, сохраняющих множество отношений

$$x_1 = x_2,\ x_1 + 1 = x_2,\ x_1 + 2 = x_2,\ x_1 + 3 = x_2. \tag{12}$$

Так как группа V_4 нормальна в S_4, то для любой группы $G, G \subseteq S_4$, при определении G-замыкания множества отношений (12) операцию взятия двойственного отношения можно опустить. Таким образом, класс $\mathrm{Inv}K_4$ совпадает с замыканием множества (12) относительно операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных. Нетрудно видеть, что из отношений (12) с помощью операций конъюнкции и отождествления переменных можно получить любое отношение

вида

$$x_1 + a_1 = x_2 + a_2 = \dots = x_m + a_m, \tag{13}$$

где $a_1, \dots, a_m \in E_4$. Так как

$$\begin{aligned}(\exists y)(\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\&}(x_{i1} + a_{i1} = \dots = x_{im_i} + a_{im_i} = y + b_i))\\ \equiv \underset{1\leqslant i<j\leqslant n}{\&}(x_{i1} + a_{i1} + b_i = \dots = x_{im_i} + a_{im_i} + b_i = x_{j1} + a_{j1} + b_j\\ = \dots = x_{jm_j} + a_{jm_j} + b_j),\end{aligned}$$

то после дальнейшего применения операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных к отношениям вида (13) получаются отношения, которые представимы в виде конъюнкции (не обязательно с попарно не пересекающимися множествами переменных) отношений (13) и отношений, которые получаются из отношений (13) отождествлением некоторых переменных. Это и есть общий вид отношений из класса $\mathrm{Inv}K_4$. Технически нам будет более удобно иметь дело с конъюнкцией отношений с попарно не пересекающимися множествами переменных. В этом случае отождествление переменных x_1, x_2 в отношении (13) приводит к пустому отношению при $a_1 \neq a_2$ и к отношению $x_2 + a_2 = \dots = x_m + a_m$ при $a_1 = a_2$ и $m \geqslant 3$ (если $m = 2$, то получаем полное отношение $x_2 = x_2$). Кроме того, конъюнкцию отношений

$$\begin{aligned}x_{11} + a_{11} = \dots = x_{1m_1} + a_{1m_1} = y + a_1,\ x_{21} + a_{21}\\ = \dots = x_{2m_2} + a_{2m_2} = y + a_2\end{aligned}$$

с общей переменной y можно заменить одним отношением

$$\begin{aligned}x_{11} + a_{11} + a_1 = \dots = x_{1m_1} + a_{1m_1} + a_1 = x_{21} + a_{21} + a_2\\ = \dots = x_{2m_2} + a_{2m_2} + a_2 = y.\end{aligned}$$

Таким образом, далее можно считать, что всякое непустое отношение из $\mathrm{Inv}K_4$ представлено в виде конъюнкции с попарно не пересекающимися множествами переменных из отношений типа (13) и одноместных полных отношений $x_i = x_i$.

Будем говорить, что переменные $x_i, x_j (i \neq j)$ отношения $\varrho(x_1, \dots, x_n)$ из $\mathrm{Inv}K_4$ *зависимы*, если в указанном выше представлении отношения ϱ переменные x_i, x_j входят в (13).

Пусть $\varrho(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Inv}K_4, n \geqslant 2$. Обозначим через $\varrho_0(x_2, \dots, x_n), \dots \dots, \varrho_3(x_2, \dots, x_n)$ отношения, которые получаются из отношения ϱ подстановкой вместо переменной x_1 соответственно функций x_2, $x_2 + 1$, $x_2 + 2$, $x_2 + 3$. Так как

$$\varrho_i(x_2, \dots, x_n) \equiv (\exists x_1)(\varrho(x_1, x_2, \dots, x_n)\&(x_1 = x_2 + i)),$$

то отношения $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ принадлежат классу $\mathrm{Inv}K_4$. Если переменные x_1, x_2 в отношении ϱ зависимы и, например, входят в конъюнктивный сомножитель $x_1+a_1 = x_2+a_2 = \cdots$, то три из четырех отношений $\varrho_0 - \varrho_3$ будут пустыми и лишь одно, отвечающее функции $x_2 + b$, для которой $a_1 + b = a_2$, — непустым. Если же переменные x_1, x_2 в отношении ϱ независимы, то, как легко видеть, отношения $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ будут непустыми. Этим фактом мы будем пользоваться при доказательстве теоремы 3.

Положим $K_4I_4 = K_4 \cap I_4$, $K_4L_4 = K_4 \cap L_4$. G-Замкнутость классов K_4I_4, K_4L_4 вытекает из G-замкнутости классов K_4, I_4, L_4.

Теорема 3. *Пусть $G \in \{A_4, S_4\}$. Тогда классы K_4I_4, K_4L_4 и только они являются G-предполными в K_4.*

Доказательство. Как и в теореме 2, устанавливаем, что классы K_4I_4, K_4L_4 не содержатся друг в друге: в класс K_4I_4 входят все однородные функции из P_4 [29, 30], а в класс K_4L_4 — все подстановки группы V_4. Далее покажем, что если $\varrho \notin \mathrm{Inv}K_4$, то классу $[\mathrm{Inv}K_4 \cup \{\varrho\}]_G$ принадлежит хотя бы одно из отношений (1) или $x = 0$. Отсюда в силу соответствия Галуа будет вытекать справедливость теоремы.

Итак, пусть отношение $\varrho(x_1, \dots, x_n)$ не входит в $\mathrm{Inv}K_4$. Если $n = 1$, то $\varrho \in \mathbf{C}$ и, как в теореме 1, из отношения ϱ получаем отношение $x = 0$. Далее считаем, что $n \geqslant 2$. Мы хотим понизить число переменных у отношения, не входящего в $\mathrm{Inv}K_4$. Поэтому будем предполагать, что отношения $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ принадлежат классу $\mathrm{Inv}K_4$.

Поскольку области значений вектор-функций

$$(x_2, x_2),\ (x_2 + 1, x_2),\ (x_2 + 2, x_2),\ (x_2 + 3, x_2)$$

не пересекаются и в целом покрывают все множество E_4^2, то отношение ϱ можно представить в виде

$$\varrho(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigvee_{0 \leqslant i \leqslant 3} (x_1 = x_2 + i) \& \varrho_i(x_2, \dots, x_n). \tag{14}$$

Из (14) следует, что среди отношений $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ есть различные, поскольку в противном случае

$$\varrho(x_1, \dots, x_n) \equiv (x_1 = x_1) \& \varrho_0(x_2, \dots, x_n).$$

Последнее противоречит соотношениям $\varrho \notin \mathrm{Inv}K_4$, $\varrho_0 \in \mathrm{Inv}K_4$.

Допустим, что среди отношений $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ имеются пустые. Если непусто только одно отношение ϱ_i, то из (14) следует, что

$$\varrho(x_1, \dots, x_n) \equiv (x_1 = x_2 + i) \& \varrho_i(x_2, \dots, x_n).$$

Вновь приходим к противоречию с соотношениями $\varrho \notin \mathrm{Inv}K_4$, $\varrho_i \in \mathrm{Inv}K_4$.

Предположим, что из отношений $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ непусты два или три. Строение отношений из класса $\mathrm{Inv}K_4$ показывает, что для непустых отношений $\varrho_i(x_2, \ldots, x_n)$ отношение $(\exists x_3)\ldots(\exists x_n)\varrho_i(x_2, \ldots, x_n)$ будет полным. Поэтому, проектируя отношение ϱ по переменным $x_3, \ldots, x_n$ и пользуясь (14), приходим к выводу, что отношение

$$\sigma(x_1, x_2) \equiv (\exists x_3)\ldots(\exists x_n)\varrho(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

представимо в виде дизъюнкции двух или трех отношений (12). Если σ есть дизъюнкция только двух отношений (12) и среди этих отношений имеется диагональ $x_1 = x_2$, то σ совпадает с одним из отношений эквивалентности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Два других отношения эквивалентности получаем, беря двойственные отношения для подходящих подстановок из A_4. Как установлено в теореме 2, в этом случае отношение (1) входит в множество $[\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}]_G$.

Пусть в дизъюнкцию двух отношений (12), составляющих отношение σ, не входит диагональ $x_1 = x_2$. Тогда нетрудно проверить, что

$$(\exists y)(\sigma(x_1, y) \& \sigma(y, x_2))$$

есть одно из отношений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Предположим, что σ является дизъюнкцией трех отношений (12). Если в σ не входит отношение $x_1 + i = x_2$, то

$$\sigma(x_1, x_2) \equiv (x_1 + i \neq x_2).$$

Из отношения σ получаем двойственное отношение вида $x_1 + j \neq x_2$, где $j \neq i$. Тогда

$$(x_1 + i \neq x_2) \& (x_1 + j \neq x_2)$$

представляет собой дизъюнкцию двух отношений (12).

Предположим теперь, что все отношения $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ непусты. Случай $n = 2$ невозможен, поскольку всякое непустое одноместное отношение из $\mathrm{Inv}K_4$ является полным и, следовательно, ввиду представления (14) полным будет отношение ϱ. Значит, $n \geqslant 3$.

Если в одном из отношений $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ никакие две переменные x_i, x_j $(2 \leqslant i < j \leqslant n)$ не являются зависимыми, то в соответствии со структурой отношений из $\mathrm{Inv}K_4$ отношения $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ будут полными. Это вновь приводит к полному отношению ϱ. Допустим, что хотя бы в одном из отношений $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ зависимыми являются, например, переменные x_2, x_n, а переменные x_2, x_n удовлетворяют ограничениям $x_2 + a_i = x_n$ $(0 \leqslant i \leqslant m-1)$, где m — число отношений, в которых переменные x_2, x_n зависимы. Если $m \leqslant 2$ и $b \neq a_0$, то для $(n-1)$-местного отношения

$$\sigma(x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv \varrho(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_2 + b)$$

среди отношений $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ по крайней мере одно (отвечающее отношению ϱ_j, в котором переменные x_2, x_n не являются зависимыми) будет непустым. Пользуясь свойством отношений из $\mathrm{Inv}K_4$, приведенным перед теоремой 3, получаем, что $\sigma \notin \mathrm{Inv}K_4$.

Предположим, что $m \geqslant 3$ и множество $\{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ содержит более одного, но менее m различных элементов. Пусть, например, элемент a_0 встречается в последовательности $(a_0, \dots, a_{m-1})$ более одного раза. Полагая

$$\sigma(x_1, \dots, x_{n-1}) \equiv \varrho(x_1, \dots, x_{n-1}, x_2 + a_0),$$

видим, что среди отношений $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ по крайней мере два отношения являются непустыми и хотя бы одно (отвечающее тому из отношений $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, в котором переменные x_2, x_n связаны ограничением $x_2 + a_j = x_n$, где $a_j \neq a_0$) — пустым. Следовательно, $\sigma \notin \mathrm{Inv}K_4$.

Аналогично рассматривается случай, когда $m = 3$ и все элементы a_0, a_1, a_2 различны. Следует лишь отметить, что одно из непустых отношений появляется за счет того, что переменные x_2, x_n в одном из отношений $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ независимы.

Пусть $m = 3$ и $a_0 = a_1 = a_2$. При $n = 3$ полагаем

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) \equiv \varrho(x_1, x_2, x_3),$$

а при $n \geqslant 4$ —

$$\sigma(x_1, x_2, x_n) \equiv (\exists x_3) \dots (\exists x_{n-1}) \varrho(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{15}$$

Так же, как и для отношения ϱ, переменные x_2, x_n в трех из четырех отношений $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ будут зависимы и удовлетворяют условию $x_2 + a_0 = x_n$, а в одном — независимы. Если переменные независимы в отношении σ_i, то из (14) получаем, что

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 + i = x_2) \vee (x_2 + a_0 = x_n).$$

Если $i \neq a_0$, то отношение $\sigma(x_1, x_2, x_1)$ представимо в виде дизъюнкции двух отношений (12). Этот случай рассмотрен выше. Если же $i = a_0$, то

$$(\exists y)(\sigma(x_1, x_2, y) \& (y = x_n + 1)) \equiv (x_1 + i = x_2) \vee (x_2 + i + 1 = x_n),$$

и мы возвращаемся к случаю $i \neq a_0$.

Пусть $m = 4$ и $a_0 = a_1 = a_2 = a_3$. Тогда

$$\varrho(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \varrho(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_2 + a_0) \& (x_2 + a_0 = x_n)$$

и, следовательно, классу $\mathrm{Inv}K_4$ не принадлежит $(n-1)$-местное отношение $\varrho(x_1, \dots, x_{n-1}, x_2 + a_0)$.

Остается исследовать случай, когда элементы a_0, a_1, a_2, a_3 различны. Пусть набор (a_0, a_1, a_2, a_3) совпадает с одним из наборов

$$(0,1,2,3),\ (1,0,3,2),\ (2,3,0,1),\ (3,2,1,0). \tag{16}$$

Тогда для подходящего значения b имеем $a_i = i + b$ $(0 \leqslant i \leqslant 3)$. Следовательно, для слагаемого

$$(x_1 = x_2 + i)\&\varrho_i(x_2, \dots, x_n)$$

из (14) выполняются соотношения

$$\begin{aligned}(x_2 + a_i = x_n) &\equiv (x_2 + i + b = x_n)\\ &\equiv (x_2 + x_1 + x_2 + b = x_n) \equiv (x_1 + b = x_n).\end{aligned}$$

Потому

$$\varrho(x_1, \dots, x_n) \equiv \varrho(x_1, \dots, x_{n-1}, x_1 + b)\&(x_1 + b = x_n).$$

Отсюда следует, что $(n-1)$-местное отношение $\varrho(x_1, \dots, x_{n-1}, x_1 + b)$ не входит в класс $\mathrm{Inv}K_4$.

Пусть набор (a_0, a_1, a_2, a_3) отличен от наборов из (16). Определяя отношение $\sigma(x_1, x_2, x_n)$ по формуле (15), получаем

$$\sigma(x_1, x_2, x_n) \equiv \bigvee_{0 \leqslant i \leqslant 3} (x_1 = x_2 + i)\&(x_2 + a_i = x_n).$$

Если набор (a_0, a_1, a_2, a_3) отличен от наборов

$$\begin{aligned}(0,2,3,1),\ (0,3,1,2),\ (1,2,0,3),\ (1,3,2,0),\ (2,0,1,3),\ (2,1,3,0),&\\ (3,0,2,1),\ (3,1,0,2),&\end{aligned} \tag{17}$$

то отношение

$$(\exists x_2)\sigma(x_1, x_2, x_n) \equiv \bigvee_{0 \leqslant i \leqslant 3} (x_1 + a_i + i = x_n)$$

является объединением точно двух отношений из (12). Этот случай рассмотрен в доказательстве ранее.

Пусть набор (a_0, a_1, a_2, a_3) совпадает с одним набором из (17). Все наборы из (17) исследуются одинаково. Поэтому рассмотрим случай, когда $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 2, 3, 1)$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned}\sigma(x_1, x_2, x_n) \equiv\ &(x_1 = x_2)\&(x_2 = x_n)\\ \vee\ &(x_1 = x_2 + 1)\&(x_2 + 2 = x_n) \vee (x_1 = x_2 + 2)\&(x_2 + 3 = x_n)\\ &\vee\ (x_1 = x_2 + 3)\&(x_2 + 1 = x_n).\end{aligned}$$

Если считать x_1 единственным параметром отношения σ, то множество наборов, принадлежащих отношению σ, можно представить в виде объединения четырех попарно не пересекающихся подмножеств, каждое из которых состоит из четырех наборов. Символически это множество запишем в виде

$$(x_1, x_1, x_1) \vee (x_1, x_1+1, x_1+3) \vee (x_1, x_1+2, x_1+1) \vee (x_1, x_1+3, x_1+2). \quad (18)$$

Положим

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv (\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(\sigma(x_1, y_1, y_2) \& \sigma(x_2, y_1, y_3) \\ \& \sigma(x_3, y_2, y_3) \& \sigma(y_1, y_3, y_2)).$$

Отношению φ принадлежит отношение $x_1 = x_3$. Чтобы в этом убедиться, для наборов (x_1, x_1, x_1), $(x_1, x_1 + 1, x_1)$, $(x_1, x_1 + 2, x_1)$, $(x_1, x_1 + 3, x_1)$ достаточно выбрать наборы (y_1, y_2, y_3), совпадающие соответственно с (x_1, x_1, x_1), (x_1+2, x_1+1, x_1+3), (x_1+3, x_1+2, x_1+1), (x_1+1, x_1+3, x_1+2), и воспользоваться представлением (18) для отношения σ. Кроме того, отношению φ принадлежит отношение $(x_1 = x_2 + 1) \& (x_2 + 2 = x_3)$: достаточно положить $(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + 3, x_1 + 2, x_1)$. С использованием представления (18) нетрудно проверить, что отношению φ не принадлежат никакие другие наборы, т. е.

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 = x_3) \vee (x_1 = x_2 + 1) \& (x_2 + 2 = x_3).$$

Так как

$$\varphi_1(x_2, x_3) \equiv (x_2 + 1 = x_3) \vee (x_2 + 2 = x_3),$$

то приходим к рассмотренному ранее случаю. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Яблонский С. В.** Функциональные построения в k-значной логике // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.
2. **Яблонский С. В.** Введение в теорию функций k-значной логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974. С. 9–66.
3. **Post E. L.** Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. V. 43. P. 163–185.
4. **Post E. L.** The Two-valued Iterative Systems of Mathematical Logic. Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.
5. **Яблонский С. В.** О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95, № 6. С. 1153–1156.
6. **Rosenberg I.** La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A–B. 1965. T. 260, N 14. P. 3817-3819.

7. **Rosenberg I. G.** Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpravy Československe Akad. Věd Řada Mat. Přirod. Věd. 1970. Bd 80. S. 3–93.
8. **Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В.** О предполных классах в k-значных логиках // Докл. АН СССР. 1969. Т. 186, № 3. С. 509–512.
9. **Slupecki J.** Kryterium petnosci wielowartosciowych systemow logiki zdan // Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. 1939. Cl. III, 32. P. 102–109.
10. **Salomaa A.** Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain I, II // Ann. Univ. Turku. Ser. AI. 1962. N 53. P. 1–9; 1963. N 63. P. 1–19. (Русский перевод: Саломаа А. Некоторые критерии полноты для множеств функций многозначной логики // Кибернетический сб. М.: Мир, 1964. Вып. 8. С. 7–32.)
11. **Нечаев А. А.** Критерий полноты систем функций p^n-значной логики, содержащих операции сложения и умножения по модулю p^n // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. Вып. 34. С. 74–87.
12. **Кузнецов А. В.** О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 5–33.
13. **Данильченко А. Ф.** О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 4. С. 397–416.
14. **Голунков Ю. В.** Полнота систем операций в операторных алгоритмах, реализующих функции k-значной логики // Вероятностные методы и кибернетика. Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1980. Вып. 17. С. 23–34.
15. **Тайманов В. А.** О функциональных системах k-значной логики с операциями замыкания программного типа // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 6. С. 1307–1310.
16. **Нгуен Ван Хоа.** Об L-эквивалентности систем функций в многозначных логиках // Алгебра и логика. 1988. Т. 27, № 1. С. 37–47.
17. **Нгуен Ван Хоа.** Об одном достаточном условии групповой полноты систем функций в k-значной логике // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32, № 1. С. 968–971.
18. **Нгуен Ван Хоа.** К описанию семейства G-полных замкнутых классов k-значной логики // Кибернетика. 1990. № 5. С. 9–12.
19. **Нгуен Ван Хоа.** О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики P_3 // Дискрет. математика. 1992. Т. 4, № 4. С. 82–95.
20. **Нгуен Ван Хоа.** О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискрет. математика. 1993. Т. 5, № 4. С. 87–108.

21. **Нгуен Ван Хоа.** Описание замкнутых классов, сохраняемых всеми внутренними автоморфизмами k-значной логики // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 3. С. 16–19.
22. **Нгуен Ван Хоа.** О структуре замкнутых классов k-значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 6. С. 17–20.
23. **Марченков С. С.** S-Классификация идемпотентных алгебр с конечным носителем // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 5. С. 587–589.
24. **Марченков С. С.** Основные отношения S-классификации функций многозначной логики // Дискрет. математика. 1996. Т. 8, № 1. С. 99–128.
25. **Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.** Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1–10; № 5. С. 1–9.
26. **Риге Ж.** Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа // Кибернетический сб. М.: Мир, 1963. Вып. 7. С. 129–185.
27. **Оре О.** Теория графов. М.: Наука, 1968.
28. **Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1972.
29. **Csákány B., Gavalcová T.** Finite homogeneous algebras I // Acta Sci. Math. 1980. V. 42, N 1–2. P. 57–65.
30. **Марченков С. С.** Однородные алгебры // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1982. Вып. 39. С. 85–106.

Адрес автора:

Россия,
125047 Москва,
Миусская площадь, 4,
Институт прикладной
математики
им. М. В. Келдыша РАН.
E-mail:
marchen@applmat.msk.ru

Статья поступила

29 апреля 1995 г.