ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1996. Том 3, № 3, 71–83

УДК 519.14

О РАСШИРЕНИЯХ ЧАСТИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЫЕ μ-ПОДГРАФЫ*)

А. А. Махнёв

Получено описание φ-однородных расширений частичных геометрий $EpG_\alpha(s,t)$, содержащих такой антифлаг (a,B), что $\mu(a,b) = \mu(a,c) = \varphi\left(1+\frac{t(\varphi-1)}{\alpha}\right)$ для двух вершин $b,c \in B$. Оказалось, что геометрия является треугольным расширением обобщенного четырехугольника, 6-однородным расширением обобщенного четырехугольника $GQ(25,5)$, расширением сети или дуальной 2-схемы. Классифицированы сильно регулярные однородные геометрии $EpG_\alpha\ (s,t)$ с указанным выше значением μ.

Введение

Геометрия G ранга 2 — это множество точек $\mathscr{P}$ и некоторая совокупность $\mathscr{B}$ подмножеств (блоков) из $\mathscr{P}$. Любые две точки, принадлежащие одному блоку, называются *коллинеарными*. *Вычетом* G_a геометрии G в точке a называется геометрия с множеством точек $\mathscr{P}_a$, коллинеарных с a, и множеством блоков $\mathscr{B}_a = \{B - \{a\} \mid a \in B \in \mathscr{B}\}$. Геометрия G называется *t-схемой* с параметрами (v,k,λ), если она содержит v точек, каждый блок содержит точно k точек и любые t точек лежат точно в λ блоках.

Точечный граф $\Gamma = \Gamma(G)$ — это граф с множеством вершин $\mathscr{P}$, в котором две различные вершины смежны тогда и только тогда, когда они коллинеарны. Диаметр, связность, расстояние между двумя точками и т. п. в G соответствуют этим понятиям в графе $\Gamma(G)$.

Если $a \in \mathscr{P}, B \in \mathscr{B}$ и $a \notin B$, то пара (a,B) называется *антифлагом*. Число точек из B, коллинеарных с a, обозначается через $f(a,B)$. Геометрия G называется *φ-однородной*, если $f(a,B) = 0$ или $f(a,B) = \varphi$ для любого антифлага (a,B); G называется *сильно φ-однородной*, если $f(a,B) = \varphi$ для любого антифлага (a,B). Ниже мы будем рассматривать только такие геометрии, в которых любые два блока пересекаются не более чем по одной точке, при этом блоки будем называть *прямыми*.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–00488).

Геометрия называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой и геометрия является сильно α-однородной (обозначение $pG_\alpha(s,t)$).

Геометрия $pG_1(s,t)$ называется *обобщенным четырехугольником* порядка (s,t) и обозначается $GQ(s,t)$. Далее, геометрия $pG_{s+1}(s,t)$ называется *схемой Штейнера*, а $pG_t(s,t)$ — *сетью*.

Геометрия EpG_α называется *расширением* α-частичных геометрий, если EpG_α связна и существуют s, t такие, что каждый вычет EpG_α есть геометрия $pG_\alpha(s,t)$. Если мы указываем параметры s, t, то в этом случае геометрия обозначается через $EpG_\alpha(s,t)$. Геометрия EpG_α называется *треугольной*, если она $(\alpha+1)$-однородна. Если $\alpha = 1$, то геометрию EpG_1 будем обозначать через EGQ.

Прямоугольной решеткой ($m \times n$-графом) называется граф с множеством вершин $X \times Y$, где $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины (x_1, y_1), (x_2, y_2) смежны, только если $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Если $m = n$, то граф называется *решетчатым графом* и совпадает с точечным графом обобщенного четырехугольника $GQ(n-1,1)$.

Треугольным графом $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$, и пары $\{a,b\}$, $\{c,d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют общий элемент.

Пример 1. Пусть Γ является графом Джонсона $J(n,m)$, т. е. графом, вершинами которого являются m-элементные подмножества n-элементного множества X, причем две вершины смежны тогда и только тогда, когда они пересекаются по $(m-1)$-элементному подмножеству. Окрестность любой вершины такого графа является прямоугольной $m \times (n-m)$ решеткой. Если $n = 2m$, $m \geqslant 3$, то окрестности вершин являются точечными графами для обобщенных четырехугольников $GQ(m-1,1)$. Более того, можно определить частное графа Джонсона, т. е. фактор-граф $J(2m,m)$, полученный отождествлением m-элементных подмножеств с их дополнениями.

Пусть $n = 2m$ и G — геометрия вершин и максимальных клик графа Джонсона или его частного. Тогда эта геометрия является 2-однородной (треугольной) геометрией $EGQ(m-1,1)$.

Пример 2. Нетрудно понять, что $EpG_2(s,1)$ является полубиплоскостью и наоборот. Если $\mathscr{B}$ — множество прямых треугольной полубиплоскости с матрицей инцидентности B, то полубиплоскость с множеством прямых $\mathscr{B}_1$, отвечающих матрице инцидентности

$$\begin{pmatrix} B & I \\ I & B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

где I — единичная матрица, также будет треугольной. При этом новая полубиплоскость называется удвоением исходной (см. [1]).

Пусть $\mathscr{C}$ — 2-схема с параметрами (4,3,2), $\mathscr{C}_{i+1}$ — удвоение $\mathscr{C}_i$ при $i \geqslant 1$. Тогда $\mathscr{C}_i$ — треугольная полубиплоскость с $v = 2^{i+2}$ точками такая, что каждый блок содержит $3 + i$ точек.

Если $a, b \in \mathscr{P}$ и расстояние между a, b равно 2 (1), то число точек в $\mathscr{P}_a \cap \mathscr{P}_b$ обозначается через $\mu(a,b)$ ($\lambda(a,b)$). Для φ-однородной геометрии $EpG_\alpha(s,t)$ положим

$$\beta_1 = \varphi(1 + \frac{t(\varphi - 1)}{\alpha}), \ \beta_2 = \frac{(s+1)(\varphi(t+1) - s - t - 1 + \alpha)}{\alpha}.$$

В [2] доказано, что $\mu(a,b) \geqslant \max\{\beta_1, \beta_2\}$, причем $\beta_1 = \beta_2$ только когда $\varphi = s+1$ или $\varphi = (s+t+1-\alpha)/t$. Кроме того, в [2] установлено, что если геометрия $EpG_\alpha(s,t)$ является $(s+t+1-\alpha)/t$-однородной и $\mu(a,b) = \beta_1$ для любых вершин a, b, находящихся на расстоянии 2, то граф Γ сильно регулярен.

В данной работе рассматриваются геометрии, содержащие малые μ-подграфы. Если расстояние между точками a, b геометрии $EpG_\alpha(s,t)$ равно 2 и $\mu(a,b) = \beta_1$, то μ-подграф $\mathscr{P}_a \cap \mathscr{P}_b$ назовем ***малым***. Мы будем рассматривать однородные геометрии $EpG_\alpha(s,t)$ с $\varphi \leqslant s$, так как если $\varphi = s + 2$, то $\Gamma(G)$ является полным графом; если $\varphi = s + 1$, то $\beta_1 = \beta_2 = (s+1)(1 + st/\alpha)$ совпадает с валентностью Γ и Γ является полным многодольным графом с $s + 2$ долями порядка $1 + st/\alpha$.

Следующие результаты обобщают теоремы из [1, 2].

Теорема. *Пусть геометрия G является φ-однородной геометрией $EpG_\alpha(s,t)$, $\varphi \leqslant s$, (a, B) — антифлаг с $f(a,B) = \varphi$ и b, c — различные точки из $B - \mathscr{P}_a$ такие, что $\mu(a,b) = \mu(a,c) = \beta_1$. Тогда G может быть только одной из следующих геометрий:*

(1) *треугольной геометрией EGQ с $s \geqslant t$;*

(2) *геометрией $EGQ(25,5)$ с $\varphi = 6$;*

(3) *расширенной сетью $EpG_t(s,t)$, $t \leqslant 2$;*

(4) *расширенной дуальной 2-схемой $EpG_2(s,1)$.*

Геометрии графа Джонсона и его частного (при $m > 4$) являются геометриями из п. (3) заключения теоремы с $t = 1$, $\varphi = 2$ и $\mu = 4$. Геометрия $\mathscr{C}_2$ из примера 2 удовлетворяет п. (4) заключения теоремы с $\varphi = 3$ и $\mu = 6$. Существование геометрий из п. (2) неизвестно.

Следствие 1. *Пусть G является φ-однородной геометрией $EpG_\alpha(s,t)$, $\varphi \leqslant s$, с сильно регулярным точечным графом, в котором $\mu = \beta_1$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *G — треугольное расширение геометрии $GQ(t,t), t = 2, 3, 4, 8, 13$;*

(2) *$\alpha = t = 1$, $\varphi = 2$ и точечный граф $\Gamma(G)$ либо совпадает с частным графа Джонсона $J(10,5)$, либо является дополнительным к квадратной решетке на 16 вершинах;*

(3) G — *геометрия вершин и максимальных клик графа, дополнительного к графу с* $\lambda = 0$ *и* $\mu = 2$.

В случае (1) имеются единственные геометрии при $t = 2$ и $t = 3$. Для $t \geqslant 4$ примеры не известны. В случае (3) имеются единственные графы для $k = 5$ и $k = 10$ (дополнительный граф к графу Клебша и граф Гевиртца с параметрами (56,10,0,2)). Для $k > 10$ примеры не известны. Проблема о существовании сильно регулярных графов с $\lambda = 0$ и $\mu = 2$ валентности, большей 10, сформулирована в Коуровской тетради (проблема 8.77).

Следствие 2. *Пусть* G *является* φ*-однородной геометрией* $EpG_\alpha(s,t)$, $\varphi = (s+t+1-\alpha)/t \leqslant s$, *содержащей такую точку* a, *что* $\mu(a,b) = \beta_1$ *для любой точки* b, *находящейся на расстоянии 2 от* a. *Тогда* G *является либо треугольной геометрией* $EGQ(t,t)$, *где* $t = 2,3,4,8,13$, *либо 6-однородной геометрией* $EGQ(25,5)$, *либо геометрией вершин и максимальных клик сильно регулярного графа, дополнительного к графу с* $\lambda = 0$ *и* $\mu = 2$.

Зафиксируем следующие обозначения: если a, b — различные точки, то $\mathscr{P}_{ab} = \mathscr{P}_a \cap \mathscr{P}_b$; если расстояние между a, b равно 2, то G_{ab} — геометрия с множеством точек $\mathscr{P}_{ab}$ и множеством блоков $\mathscr{B}_{ab} = \{B \in \mathscr{B}_a \mid f(b,B) \neq 0\}$. Для натуральных чисел m, n через (m,n) обозначим наибольший общий делитель m и n.

§ 1. Вспомогательные результаты

Лемма 1.1. *Пусть* G — *частичная геометрия* $pG_\alpha(s,t)$. *Тогда* $\alpha \leqslant \min\{s+1, t+1\}$ *и справедливы следующие утверждения*:

(1) G *содержит* $(s+1)(1+st/\alpha)$ *точек и* $(t+1)(1+st/\alpha)$ *прямых*;

(2) *точечный граф* Γ *сильно регулярен с* $k = s(t+1)$, $\lambda = s-1+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$;

(3) $\alpha(s+t+1-\alpha)$ *делит* $st(s+1)(t+1)$ *и* $(s+1-2\alpha)t \leqslant (s-1)(s+1-\alpha)^2$;

(4) *если* G *содержит подгеометрию* $G' = pG_\alpha(s',t')$, *то* $s = s'$ *или* $s't'+\alpha-1 \leqslant s$, *причем* $s't'+\alpha-1 = s$ *только в том случае, когда каждая точка из* $G - G'$ *коллинеарна с* $s'+1$ *точкой из* G'.

Доказательство. Это есть теорема 1.1 из [3] (в формулировке последнего утверждения теоремы опечатка: надо заменить s на s').

Лемма 1.2. *Пусть геометрия* G *является* φ*-однородной геометрией* $EpG_\alpha(s,t)$, a, b — *точки, находящиеся на расстоянии 2 друг от друга, и* $\mu(a,b) = \beta_i$. *Тогда*

(1) *если* $i = 1$, *то* G_{ab} — *частичная геометрия* $pG_\alpha(\varphi-1,t)$;

(2) *если* $i = 2$, *то* $\varphi \geqslant (s+t+1-\alpha)/t$ *и каждая точка из* $\mathscr{P}_a - \mathscr{P}_b$ *лежит на* $(s+t+1-\alpha)/\varphi$ *прямых из* $\mathscr{B}_a$, *не пересекающих* $\mathscr{P}_{ab}$.

Утверждения леммы вытекают из следствия 2.4 и лемм 2.5 и 4.1 из [2].

Лемма 1.3. *Пусть G является геометрией $EpG_\alpha(s,t)$. Тогда если G φ-однородна, то $\lambda(a,b) = s + st(\varphi - 1)/\alpha$ и $\alpha\varphi$ делит $st(s+1)(s+2)$, а если $f(a,B) = \alpha + 2$ для некоторого антифлага (a,B), то α четно.*

Доказательство. Первое утверждение следует из лемм 2.1, 2.2 [3]. Пусть (a,B) — антифлаг с $f(a,B) = \alpha+2$. Из структуры геометрии G_b следует, что если $b \in B \cap \mathscr{P}_a$, то точно α прямых из $\mathscr{B}_b$, пересекающих $B \cap \mathscr{P}_a$, содержат a. Поэтому $B \cap \mathscr{P}_a$ содержит единственную точку b^* такую, что тройка a, b, b^* не лежит в блоке из $\mathscr{B}$. Возникающее таким образом отображение $*$ осуществляет спаривание на $B \cap \mathscr{P}_a$, и $f(a,B) = |B \cap \mathscr{P}_a|$ четно.

Лемма 1.4. *Пусть G является геометрией $pG_\alpha(s,t)$, где $\alpha < t < 2\alpha$. Тогда $s < 2\alpha(t-\alpha)^2 + 3\alpha(t-\alpha)$.*

Доказательство. Пользуясь теоремой 4.5 [4] (см. формулу (14) из [4]), получаем $(t-\alpha)s \leqslant \alpha(t-\alpha+1)^2(2t-2\alpha-1)$, т. е. $s \leqslant 2\alpha(t-\alpha+1)^2 - \alpha(t-\alpha+1)^2/(t-\alpha) < 2\alpha(t-\alpha)^2 + 3\alpha(t-\alpha)$. Лемма 1.4 доказана.

Лемма 1.5. *Если G есть $pG_2(s,3)$, то $s = 1$ или $s = 2$.*

Доказательство. По лемме 1.1 число $2(s+2)$ делит $12s(s+1)$. Поэтому $s+2$ делит 12 и $s = 1, 2, 4, 10$. Однако известно, что $pG_2(3,4)$ не существует [5], а по лемме 1.4 имеем $s < 10$.

Лемма 1.6. *Геометрии $pG_2(32,5)$ и $pG_2(27,4)$ не существуют.*

Доказательство. В условии Крейна для точечного графа Γ любой из указанных геометрий достигается равенство $(t+1-2\alpha)s \leqslant (t-1)(t+1-\alpha)^2$. По теореме 5 [5] граф соседей любой вершины из Γ сильно регулярен. Этот граф содержит $s(t+1)$ вершин, имеет валентность $k = (s-1)+t$, и для любых двух смежных вершин a, b из одной клики имеем $\lambda(a,b) = s-2$, а для разных клик $\lambda(a,b) \leqslant t-1$. Противоречие. Лемма 1.6 доказана.

Замечание. В теореме 4.3 [3] из заключения можно убрать п. (ii).

Лемма 1.7. *Пусть геометрия G является φ-однородной геометрией $EpG_\alpha(s,t)$. Если $t = \alpha$, то φ делит $s(s+1)(t+1, s+2)$, а если $\alpha = t+1$, то $(t+1)\varphi$ делит $st(s+1)(t-1, s+2)$.*

Доказательство. Это простая подстановка выражения для α в утверждение леммы 2.2 [3].

§ 2. Доказательство теоремы

Пусть геометрия G является контрпримером к теореме. Зафиксируем обозначения: геометрия G_{abc} имеет множество точек $\mathscr{P}_{ab} \cap \mathscr{P}_{ac}$ и множество блоков $\{D \in \mathscr{B}_a \mid D$ содержит не менее 2 точек из $\mathscr{P}_{ab} \cap \mathscr{P}_{ac}\}$.

Лемма 2.1. *Для геометрии G верны неравенства $\varphi > 2$, $t < 2\alpha$. Далее, геометрия G_{abc} есть $pG_\alpha(x,t)$ для некоторого $x < \varphi - 1$.*

Доказательство. Если $\varphi = 2$, то $\alpha = 1$ и $2t \leqslant s + t$ ввиду следствия 3.4 [3]. В этом случае G — треугольная геометрия EGQ с $s \geqslant t$, что противоречит выбору G.

Предположим, что $2 < \varphi < s + 1$. Из доказательства леммы 3.5 [3] следует, что $\mathscr{P}_{ab} \neq \mathscr{P}_{ac}$ и G_{abc} содержит по крайней мере две прямые D_1, D_2 и по крайней мере 4 различных точки, за исключением, возможно, случая $\alpha = 2$, $\varphi = 3$, когда имеется по крайней мере 3 различных точки (по две на D_1, D_2, одна из которых общая). По теореме 4.1 [3] (с учетом следствия 4.2 [3]) G_{abc} есть $pG_\alpha(x,t)$ для некоторого x, где $x < \varphi - 1$.

Если $t \geqslant 2\alpha$, то из теоремы 4.3 [3] следует, что либо $\alpha = 1$, $s = t^2, \varphi - 1 = t$ и $x = 1$, либо $\alpha = 2$, $t = 5$, $s = 32$, $\varphi - 1 = 6$ и $x = 1$. Но в первом случае по лемме 1.3 число $\varphi = t + 1$ делит $t^2(t^2+1)(t^2+2)$, поэтому $t = 2$ или $t = 5$. Однако в EGQ $f(a,B)$ четно для любого антифлага (a,B). Следовательно, $t = 5$.

Ввиду замечания из § 1 случай $\alpha = 2$ невозможен. Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Для геометрии G верны неравенства*

$$\varphi \geqslant (\alpha-1)t + \alpha, t \leqslant \alpha, s \geqslant (\alpha-1)(t^2+t+1).$$

Доказательство. Пользуясь неравенством $x + 1 \geqslant \alpha$ и п. (4) леммы 1.1, получаем $\varphi - 1 \geqslant xt + \alpha - 1$. Поэтому $\varphi \geqslant (\alpha-1)t + \alpha$. Применив лемму 1.1 к вложению G_{ab} в G_a, имеем

$$s \geqslant t(\varphi - 1) + \alpha - 1 \geqslant (\alpha-1)(t^2+t+1).$$

Допустим, что $\alpha < t < 2\alpha$. Пользуясь только что установленным неравенством и неравенством $s < 2\alpha(t-\alpha)^2 + 3\alpha(t-\alpha)$ из леммы 1.4, получаем

$$(\alpha-1)(t^2+t+1) \leqslant 2\alpha(t-\alpha)^2 + 3\alpha(t-\alpha).$$

Поэтому $\alpha = 2$ и $t = 3$, а по лемме 2.5 имеем $s = 1$ или $s = 2$. Противоречие с тем, что $s \geqslant (\alpha-1)(t^2+t+1)$.

Лемма 2.3. *Пусть геометрия G такова, что $\alpha = t + 1$. Тогда $t = 1$ и $\varphi = x + 2$. Если же $\alpha = t$, то либо $t = 1$, либо $t = 2$ и $\varphi = 2(x+1)$.*

Доказательство. Положим $\Delta = \mathscr{P}_a \cap B$. При $\alpha = t+1$ подсчитаем число блоков из $\mathscr{B}_{abc}$, пересекающихся с Δ по двум точкам. Если $d \in \Delta$, то d лежит в $t+1$ блоках из $\mathscr{B}_{abc}$, причем каждый такой блок пересекается с Δ по двум точкам. Таким образом, искомое число блоков равно $\varphi(t+1)/2$. Далее, поскольку $\mathscr{B}_{abc}$ содержит $xt+t+1$ блок, то $\varphi(t+1)/2 \leqslant xt+t+1$. С другой стороны, $\varphi \geqslant xt+t+1$, следовательно, $t = 1$ и $\varphi = x+2$.

Пусть $t = \alpha$. Тогда сеть $\mathscr{B}_{abc}$ содержит такое множество из $x+1$ блоков, что каждая точка из $\mathscr{P}_{abc}$ лежит точно в одном из этих блоков, причем Δ пересекается с каждым таким блоком не более чем по 2 точкам. Поэтому $\varphi \leqslant 2(x+1)$. С другой стороны, $\varphi \geqslant t(x+1)$ и $t \leqslant 2$. Более того, если $t = 2$, то $\varphi = 2(x+1)$ и Δ пересекается с каждым блоком из $\mathscr{B}_{abc}$ по двум точкам.

Лемма 2.3, а вместе с ней и теорема доказаны.

§ 3. Сильно регулярные геометрии с минимальным μ

В этом параграфе предполагается, что геометрия G является φ-однородной геометрией $EpG_\alpha(s,t)$ с $\varphi \leqslant s$ и сильно регулярным точечным графом Γ, в котором $\mu = \varphi(1 + t(\varphi - 1)/\alpha)$. Ясно, что G удовлетворяет условиям доказанной теоремы. Поэтому G — одна из геометрий, о которых говорится в теореме.

Лемма 3.1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ). Тогда либо $k = 2\mu$ и $\lambda = \mu - 1$ (так называемый половинный случай), либо собственные значения k, $n-m$, $-m$ матрицы смежности графа Γ — целые числа, где $n^2 = (\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)$, $n - \lambda + \mu = 2m$ и кратность m равна $\frac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. Далее, если $m > 1$, то $m-1$ делит $k-\lambda-1$ и*

$$\mu = \lambda + 2 + (m-1) - \frac{k-\lambda-1}{m-1}, \quad n = m - 1 + \frac{k-\lambda-1}{m-1}.$$

Доказательство. Справедливость первого утверждения установлена в [5]. Далее, из равенства $-m = (\lambda - \mu - n)/2$ следует, что

$$n^2 = (\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu) = (\lambda-\mu-2)^2 + 4(k-\lambda-1),$$

т. е. $n^2 - (\lambda-\mu+2)^2 = 4(k-\lambda-1)$, $n - \lambda + \mu - 2 = 2(m-1)$ и $n + \lambda - \mu + 2 = 2(k-\lambda-1)/(m-1)$. Сложив последние два равенства, получаем выражение для $2n$, а вычитая из первого равенства второе, получаем выражение для 2μ. Лемма 3.1 доказана.

В леммах 3.2–3.4 предполагается, что $t = \alpha$.

Лемма 3.2. *Для геометрии G справедливы утверждения:*
(1) $k = (s+1)^2$, $\lambda = s\varphi$ *и* $\mu = \varphi^2$ *делит* $s(s+1)^2(s+2-\varphi)$;
(2) $s+2$ *делит* $2(t+1)(\varphi+1)$.

Доказательство. Выражения для k, λ, μ получаются подстановкой $\alpha = t$ в выражения для параметров точечного графа частичной геометрии. Далее, имеем прямоугольное соотношение $(v-k-1)\mu = k(k-\lambda-1)$, поэтому μ делит $s(s+1)^2(s+2-\varphi)$.

Так как каждая точка лежит в $(t+1)(1+st/\alpha)$ блоках, а число точек равно $v = 1+(s+1)^2+(s+1)^2(s^2+2s-s\varphi)/\varphi^2$, то общее число блоков равно $v(t+1)(s+1)/(s+2)$. Отсюда следует, что $s+2$ делит $(t+1)(2+s(s+1)^2(s+2-\varphi)/\varphi^2)$. Поэтому $s+2$ делит $(t+1)(2+2\varphi+s(s+1)^2(s+2)/\varphi)$. По лемме 1.7 $(\varphi, s+2)$ делит $2(t+1)$, поэтому $s+2$ делит $2(t+1)(\varphi+1)$.

Лемма 3.3. *Пусть геометрия G такова, что $t = 1$. Тогда Γ — решетчатый граф на 16 вершинах или частное графа Джонсона $J(10,5)$.*

Доказательство. Пусть $t = 1$. Тогда по лемме 3.2 $s+2$ делит $4(\varphi+1)$. Положим $(s+2)y = 4(\varphi+1)$. Тогда $y \leqslant 3$ и по лемме 1.7 число φ делит $s(s+1)(2, s+2)$, где $s = 4(\varphi+1)/y-2$. Отсюда следует, что (φ, s) делит $2(y-2)$, а $(\varphi, s+1)$ делит $4-y$. Если $y = 3$, то φ делит 4, поэтому $\varphi = 2 = s$. Следовательно, Γ — локально решетчатый 3×3-граф и по [6] граф Γ является дополнительным графом к решетчатому 4×4-графу.

Если $y = 2$, то $s = 2\varphi$ и ввиду леммы 3.2 число φ делит 4. Если $\varphi = 2$, то $s = 4$ и ввиду [6] граф Γ является частным графа Джонсона $J(10,5)$. Если $\varphi = 4$, то $s = 8$ и $(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu) = 4\cdot 129$ — не квадрат.

Если $y = 1$, то $s = 4\varphi+2$ и по лемме 1.7 число φ делит 12. Для $\varphi = 2, 3, 4, 6, 12$ получаем $s = 10, 14, 18, 26, 50$ соответственно. Далее, имеем

$$(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu) = (3\varphi^2+2\varphi)2+4((4\varphi+3)2-\varphi^2) = n^2.$$

Так как $(3\varphi^2+2\varphi+10)^2 = n^2-56\varphi+64$, то $(3\varphi^2+2\varphi+11)^2 = n^2+6\varphi^2-52\varphi+85 \neq n^2$ и $\varphi < 12$. Поэтому $(3\varphi^2+2\varphi+12)^2 = n^2+12\varphi^2-48\varphi+108 > n^2$. Противоречие.

Лемма 3.4. *Если в геометрии G параметр t равен 2, то $(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)$ — не квадрат.*

Доказательство. Пусть $t = 2$. Тогда $(s+2)y = 6(\varphi+1)$ для некоторого натурального числа y и $\varphi+1$ делит $s+2$. Если $y = 3$, то $s = 2\varphi$ и по лемме 3.2 число φ делит 4. Поэтому $\varphi = 4$ (напомним, что $\varphi \geqslant \alpha+1$), $s = 8$, $k = 81$, $\lambda = 32$, $\mu = 16$ и $n^2 = 4\cdot 129$. Противоречие.

Если $y = 2$, то $s = 3\varphi+1$ и по п. (1) леммы 3.2 число φ делит 2. Противоречие. Значит, $y = 1$, $s = 2(3\varphi+2)$ и число φ делит 60. Поэтому согласно лемме 3.2 число φ не делится на 4, а φ^2 делит $60\cdot 10$. Следовательно, число φ равно 5 или 10.

Если $\varphi = 5$, то $s = 34$, а если $\varphi = 10$, то $s = 64$. В любом случае $(\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)$ — не квадрат. Лемма 3.4 доказана.

В леммах 3.5–3.7 предполагается, что $t=1$ и $\alpha = 2$.

Лемма 3.5. *Для геометрии G справедливы утверждения:*

(1) $k = (s+1)(s+2)/2$, $\lambda = s(\varphi+1)/2$, $\mu = \varphi(\varphi+1)/2$ *и* μ *делит* $s(s+1)(s+2)(s+2-\varphi)/4$;

(2) *если* $\varphi = s$, *то* G — *геометрия вершин и максимальных клик графа, дополнительного к графу с* $\lambda = 0$ *и* $\mu = 2$.

Доказательство. Первое утверждение получается подстановкой $t = 1$ и $\alpha = 2$ в выражения для параметров точечного графа частичной геометрии с учетом целочисленности v.

Если $\varphi = s$, то $\lambda = \mu$ и $4(s+1) = n^2$. В этом случае $n = 2m$ и $s+1 = m^2$. Условие целочисленности принимает вид

$$m^3(m-1) \quad \text{делит} \quad \frac{m^3(m^2+1)(m-1)(m^3+m+2)}{4},$$

и m не делится на 4.

Заметим, что $s = (\varphi-1)t + \alpha - 1$ и по утверждению (4) леммы 2.1 каждая точка из $\mathscr{P}_b - \mathscr{P}_a$ коллинеарна в G_b с φ точками из $\mathscr{P}_{ab}$ для любых точек a и b, находящихся на расстоянии 2 друг от друга.

Подсчитав параметры дополнительного графа $\overline{\Gamma}$, получаем $\lambda = 0$ и $\mu = 2$. Лемма 3.5 доказана.

В леммах 3.6 и 3.7 предполагается, что $s > \varphi$.

Лемма 3.6. *Для геометрии G выполняются утверждения:*

(1) $(s-\varphi)(\varphi+1-s/(m-1))/2 + (m+1) - s/(m-1) = 0$;

(2) $m > 4$ *и* $s/(m-1) - 2 < \varphi < s/(m-1)$.

Доказательство. По лемме 3.1 имеем $\mu = \lambda + (m+1) - (k-\lambda-1)/(m-1)$. Подставляя выражения для k, λ и μ из леммы 3.5, получаем первое утверждение леммы.

Если $m = 2$, то $(s-\varphi)(\varphi+1-s) + 6 - 2s = 0$, т. е. $s^2 - (2\varphi-1)s + \varphi^2 + \varphi - 6 = 0$. Поэтому $25 - 8\varphi$ является квадратом и $\varphi = 2$ или $\varphi = 3$. Так как $\varphi \geqslant \alpha + 1$, то $\varphi = s = 3$. Это противоречит тому, что $s > \varphi$.

Если $m = 3$, то $(s-\varphi)(\varphi+1-s/2) + 8 - s = 0$, т. е. $s^2 - 3\varphi s + 2\varphi^2 + 2\varphi - 16 = 0$ и $\varphi^2 - 8\varphi + 64 = (\varphi+y)^2$ для подходящего y. Следовательно, $y = 2, \varphi = 5$ или $y = 4$ и $\varphi = 3$. В случае $\varphi = 5$ получаем $s = 11$ и число φ не делит $s(s+1)(s+2)$. Значит, $\varphi = 3$, $s = 8$, $k = 45$, $\lambda = 16$ и $\mu = 6$. В этом случае Γ — локально треугольный граф, в котором μ-подграфы — треугольные графы на шести вершинах. Отсюда следует, что множество точек, находящихся на расстоянии 2 от данной точки a, можно отождествить с четверками точек из $\{1,\dots,10\}$, где

Γ_a — треугольный граф на $\{1,\dots 10\}$. Далее, если b, c — коллинеарные точки, находящиеся на расстоянии 2 от a, то из леммы 2.1 следует, что $\Gamma_a \cap \Gamma_b \cap \Gamma_c$ — треугольный граф на трех вершинах. Поэтому b коллинеарна с $4 \cdot 6 = 24$ точками, находящимися на расстоянии 2 от a. Противоречие с тем, что $k - \mu = 39$.

Если $m = 4$, то $(s-\varphi)(\varphi+1-s/3)+10-2s/3 = 0$, т. е. $s^2-(4\varphi+1)s+3\varphi^2+3\varphi-30 = 0$ и $4\varphi^2-4\varphi+121 = (2\varphi+x)^2$ для некоторого x. Значит, $4\varphi(x+1) = 121 - x^2$. Следовательно, $x = 1$, $\varphi = 15$, $x = 3$ и $\varphi = 7$ или $x = 5$ и $\varphi = 4$. Поэтому $s = 46, 23, 15$ соответственно. В первых двух случаях число φ не делит $s(s+1)(s+2)$, а в последнем случае значение параметра λ равно $75/2$.

Предположим, что $\varphi \geqslant s/(m-1)$. Тогда равенство (1) влечет неравенство $(s-\varphi)/2+(m+1)-s/(m-1) \leqslant 0$, т. е. $\varphi \geqslant 2m+2+s(m-3)/(m-1)$. Снова из (1) следует неравенство $(s-\varphi)(2m+3+s(m-4)(m-1)/2)+m+1 \leqslant s/(m-1)$. Поэтому $m \leqslant 5$, а в случае $m = 5$ имеем $s - \varphi = 1$ и (1) превращается в $3s/8 + 6 = s/4$. Противоречие.

Если $\varphi + 2 \leqslant s/(m-1)$, то $-(s-\varphi)/2 + (m+1) - s/(m-1) \geqslant 0$, т. е. $\varphi/2 + m + 1 \geqslant s(1/(m-1) + 1/2)$. Таким образом, $2s/(m-1) + s - 2m \leqslant \varphi + 2 \leqslant s/(m-1)$, т. е. $s \leqslant 2m-2$. Противоречие.

Лемма 3.7. *Параметр s равен $(m-1)\varphi + m + x$, и*

$$\varphi = \frac{2m^2 - mx - x^2 - 3m - 3x - 2}{mx - 2x + 3m - 4},$$

где $0 \leqslant x < m-2$.

Доказательство. Положим $s = (m-1)\varphi + y$. По лемме 3.6 выполняется неравенство $0 < y < 2(m-1)$. Подставив выражение для s в утверждение (1) леммы 4.6, получаем

$$(\varphi(m-2)+y)(1-y/(m-1)) + 2(m+1) - 2\varphi - 2y/(m-1) = 0.$$

Поэтому $\varphi = \frac{y^2+3y-ym-2(m^2-1)}{m^2-5m+4-ym+2y}$. Поскольку знаменатель не обращается в 0 при $m \geqslant 5$, дискриминант квадратного трехчлена относительно y равен $(3m-1)^2$ и $y < 2(m-1)$, то числитель в выражении для φ отрицателен и $y > \frac{(m-1)(m-4)}{m-2}$.

Положим $y = m + x$. Тогда $\varphi = \frac{2m^2-mx-x^2-3m-3x-2}{mx-2x+3m-4}$, причем $-3 < x < m-2$. Если $x = -2$, то $\varphi = (2m^2-m)/m = 2m-1$, поэтому $s = 2m^2-2m-1$. Ввиду леммы 1.3 число $2m-1$ делит $(m-2)(m-1)m$, следовательно, $m = 2$. Противоречие с тем, что $m > 4$.

Если $x = -1$, то $\varphi = (2m^2-2m)/(2m-2) = m$, $s = m^2-1$. Поэтому $k = m^2(m^2+1)/2$, $\lambda = (m^2-1)(m+1)/2$, $\mu = m(m+1)/2$ и $n = (m^3+2m-1)/2$. В силу целочисленности число $m(m+1)(m^3+2m-1)$ делит

$(m-1)m^3(m^2+1)(m^3+m+2)$. Поэтому m^3+2m-1 делит $(m-1)(m^3+m)(m^3-m^2+2m)$. Следовательно, $(m-1)^2(m^2-1)$ делится на m^3+2m-1, причем $(m-1, m^3+2m-1)$ делит 2. Следовательно, $m=3$. Противоречие с тем, что $m>4$. Лемма 3.7 доказана.

Завершим рассмотрение случая $\alpha=2$. По лемме 3.1 число $m-1$ делит $k-\lambda-1$, т. е. $m-1$ делит $s(s+2-\varphi)$ и $(x+1)(x+3-\varphi)$ делится на $m-1$. В свою очередь,

$$\varphi-x-3=\frac{(m-1)(2m-x^2-7x-12)}{mx-2x+3m-4}.$$

Следовательно,

$$\frac{(x+1)(\varphi-x-3)}{m-1}=2-\frac{x^3+8x^2+15x+4m+4}{mx-2x+3m-4}.$$

С другой стороны, по лемме 3.1 число m делит $k-\mu$, поэтому m делит $(s+1-\varphi)(s+2+\varphi)$. Отсюда следует, что $2\varphi-x-1=m(4m-x^6-6x-9)/(mx-2x+3m-4)$. Значит, $(2\varphi-x-1)(x+2)/m{=}4-(x^3+8x^2+13x+4m+2)/(mx-2x+3m-4)$.

Таким образом, $mx-2x+3m-4$ делит $2x+2$. Так как $(x+1, mx-2x+3m-4)=(x+1, 2m-2)$, то $m=1$ или $x=-1$. Противоречие.

Если G является 6-однородным расширением $GQ(25,5)$, то точечный граф Γ имеет параметры $(58402, 3276, 650, 156)$ и не выполнено условие целочисленности.

Итак, геометрия G должна быть треугольным расширением GQ (s,t), $s\geqslant t>1$. Ввиду утверждения (b) теоремы 3.7 [2] параметры s и t совпадают, причем $t=2,3,4,8,13$. Следствие 1 доказано.

§ 4. Доказательство следствия 2

Пусть геометрия G удовлетворяет условиям следствия 2. Тогда G — одна из геометрий в заключении теоремы, причем по п. (vi) леммы 3.3 [3] каждая точка из G находится на расстоянии, не большем 2 от a.

Лемма 4.1. *Если G — треугольная геометрия $EGQ(s,t)$, то $s=t=2,3,4,8,13$.*

Доказательство. Пусть G является треугольной геометрией EGQ (s,t). Тогда $\alpha=1$, $\varphi=2$, $s=\varphi t+\alpha-t-1=t$ и $t>1$. Далее, число точек, находящихся на расстоянии 2 от a, равно $\frac{(t+1)(t^2+1)t^3}{2t+2}$ и общее число точек v равно $1+(t+1)(t^2+1)+t^3(t^2+1)/2$. С другой стороны, каждая точка лежит в $(t+1)(t^2+1)$ блоках и общее число блоков b равно $v(t+1)(t^2+1)/(t+2)$. Отсюда следует, что $b\equiv(-24)(-5)\equiv 0\ (\mathrm{mod}(t+2))$ и 120 делится на $t+2$.

Покажем, что каждая точка c из G_a регулярна. Пусть d — точка из $\mathscr{P}_a$, неколлинеарная с точкой c. Тогда $\mathscr{P}_{cd}$ содержит $t+1$ точку из $\mathscr{P}_a$. Поэтому $\mathscr{P}_{cd}$ содержит некоторую точку b, находящуюся на расстоянии 2 от a. Из следствия 2 вытекает, что $|\mathscr{P}_{ab}| = 2t+2$ и пара (c,d) регулярна. Поэтому каждая точка из G_a регулярна и по теореме Бенсона [7] геометрия G_a является классическим четырехугольником $Q_4(t)$, где t — степень некоторого простого числа. Следовательно, $t = 2,3,4,8,13$.

Лемма 4.2. *Параметр α не равен t.*

Доказательство. Предположим, что $\alpha = t$. Тогда $\varphi = (s+t+1-\alpha)/t = (s+1)/t$, и поэтому $t > 1$. По нашей теореме $t = 2$ и $s = 2\varphi - 1$. Вместе с тем общее число вершин равно $1 + 4\varphi^2 + 4(\varphi+1)(2\varphi-1)$, каждая вершина лежит на $(t+1)(s+1) = 6\varphi$ блоках и общее число блоков сравнимо с 12 по модулю $2\varphi+1$. Противоречие с тем, что $\varphi \geqslant 3$.

Предложение 4.3. *Пусть G является s-однородной геометрией $EpG_2(s,1)$ и $\mu(a,b) = s(s+1)/2$ для некоторых точек a,b, расстояние между которыми равно 2. Тогда G — геометрия вершин и максимальных клик сильно регулярного графа, дополнительного к графу с $\lambda = 0$ и $\mu = 2$.*

Доказательство. Поскольку $\varphi = (s+t+1-\alpha)/t$, то расстояние между a и каждой точкой из G не больше 2. Число точек, находящихся на расстоянии 2 от a, равно $s(s+1)(s+2)/(s(s+1)) = s+2$. Далее, геометрия G не может быть сильно s-однородной, иначе $\mu(a,b) = s(s+1)$. Поэтому точки, находящиеся на расстоянии 2 от a, образуют блок B. Следовательно, $\mu(a,x) = s(s+1)/2$ для любой точки $x \in B$. Таким образом, a — геометрическая точка в смысле [3]. Аналогично любая точка из B — геометрическая. Но любая точка из G_a не коллинеарна с двумя точками из B и все точки из G — геометрические. Значит, точечный граф сильно регулярен и предложение 4.3 вытекает из следствия 1.

Предложение 4.3 завершает доказательство следствия 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hughes D. R.** Extended partial geometries: dual 2-designs // European J. Combin. 1990. V. 11, N 5. P. 459–471.
2. **Del Fra A., Ghinelli-Smit D., Hughes D. R.** Extended partial geometries with minimal μ // Geom. Dedicata. 1992. V. 42, N 2. P. 119–128.
3. **Hobart S. A., Hughes D. R.** EpGs with minimal μ. II // Geom. Dedicata. 1992. V. 42, N 2. P. 129–138.

4. **Neumaier A.** Strongly regular graphs with smallest eigenvalue–m // Arch. Math. 1980. V. 33, N 4. P. 392–400.
5. **Браувер А. Е., ван Линт Й. Х.** Сильно регулярные графы и частичные геометрии // Кибернетический сб. М.: Мир, 1987. Вып. 24. С. 186–229.
6. **Зюляркина Н. Д., Махнев А. А.** О сильно регулярных локально решетчатых графах // Дискрет. математика. 1993. Т. 5, № 4. С. 145–150.
7. **Pain S., Thas J. A.** Finite generalized quadrangles. Boston: Pitman, 1984.

Адрес автора:

Россия,
620219 Екатеринбург,
ул. Ковалевской, 16,
Институт математики
и механики УрО РАН.
E-mail: mak@top.imm.intec.ru

Статья поступила
30 марта 1995 г.,
переработанный вариант —
16 мая 1996 г.