ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1996. Том 3, № 3, 84–110

УДК 519.1

О РАНГОВЫХ НЕРАВЕНСТВАХ, ПОРОЖДАЮЩИХ ФАСЕТЫ МНОГОГРАННИКА СВЯЗНЫХ k-ФАКТОРОВ

Р. Ю. Симанчёв

Любая система линейных уравнений и неравенств, описывающая выпуклую оболочку конечного множества точек, содержит неравенства, порождающие собственные грани максимальной размерности (фасеты). В данной статье рассматриваются неравенства с коэффициентами 0 и 1, порождающие грани выпуклой оболочки векторов инциденций связных остовных однородных степени k подграфов полного графа. Получены достаточное условие и ряд необходимых условий, при которых неравенство порождает фасету указанного многогранника. На основании этих условий найдены три класса фасет — ограничения единичного куба, неравенства, порожденные кликами, и неравенства, порожденные графами, введенными Эдмондсом при описании выпуклой оболочки 2-сочетаний.

Введение

В статье рассматриваются обыкновенные графы. Остовный подграф произвольного графа называется k-фактором, если степень каждой вершины подграфа равна k. Мы изучаем выпуклую оболочку векторов инциденций связных k-факторов. При $k = 2$ такой многогранник является многогранником симметричной задачи коммивояжера, для которого в [1–3] приведены классы линейных неравенств, каждое из которых порождает собственную грань максимальной размерности (фасету) и, следовательно, входит в любую описывающую данный многогранник линейную систему.

Мы исследуем линейные неравенства, порождающие фасеты многогранника связных k-факторов полного графа при любом k таком, что kn четно. В § 2 описывается его аффинная оболочка. В § 3 доказываются достаточное условие и ряд необходимых условий на подграфы, при которых индуцируемые ими неравенства порождают фасеты многогранника связных k-факторов. В § 4–6 на основе этих условий находятся следующие три класса неравенств, порождающих фасеты: ограничения единичного куба; неравенства, индуцированные кликами; неравенства, которые индуцированы графами, использованными в [4] при описании выпуклой оболочки 2-сочетаний.

§ 1. Основные понятия и факты

Пусть $K_n = (V, E)$ — полный неориентированный n-вершинный граф без петель и кратных ребер. Для любого графа G, отличного от K_n, через VG и EG будем соответственно обозначать множества его вершин и ребер. Граф G_1 называется *подграфом* графа G_2 (обозначение $G_1 \subseteq G_2$), если $VG_1 \subseteq VG_2$ и $EG_1 \subseteq EG_2$. Для ребра $e \in E$ будем также использовать запись uv, где u, v — вершины из V, инцидентные ребру e. Каждое множество $R \subset E$ индуцирует некоторый подграф T, в котором $ET = R$ и VT — совокупность вершин из V, инцидентных ребрам из R. Граф, индуцированный множеством ребер R, иногда будем обозначать через R. Для подграфов G, F из K_n положим $G \cup F = (VG \cup VF, EG \cup EF)$, $G \cap F = EG \cap EF$, и если $F \subseteq G$, то $G \setminus F = (VG, EG \setminus EF)$. *Циклом* (*простым циклом*) в K_n называется связный однородный степени 2 подграф. Циклы будем задавать последовательным списком либо вершин, либо ребер. Цикл длины l будем называть *l-циклом*.

Для $G \subseteq K_n$ и $W \subset V$ положим $\delta_G(W) = \{uv \in EG \mid u \in W,\ v \notin W\}$. Степень вершины $u \in V$ в графе $G \subset K_n$, т. е. количество ребер графа G, инцидентных вершине u, будем обозначать через $d_G(u)$. Если $G = K_n$, то в обозначениях $\delta_G(W)$ и $d_G(u)$ символ G будем опускать.

Нам понадобится следующее свойство графа K_n, основанное на его полноте.

Пусть $V = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\mathscr{G}(K_n)$ — множество всех подграфов графа K_n и $\sigma = (\sigma(1), \dots \sigma(n))$ — перестановка на множестве $\{1, \dots, n\}$. Так как K_n — полный граф, то перестановка σ индуцирует автоморфизм φ_σ графа K_n, который действует на $\mathscr{G}(K_n)$ так, что если $G \in \mathscr{G}(K_n)$, то $G_1 = \varphi_\sigma(G)$ тогда и только тогда, когда $VG_1 = \{u_{\sigma(i)}$ для всех $u_i \in VG\}$ и $EG_1 = \{u_{\sigma(i)}u_{\sigma(j)}$ для всех $u_iu_j \in GE,\ i \neq j\}$. Очевидно, что графы G и $\varphi_\sigma(G)$ изоморфны.

С графом K_n свяжем евклидово пространство R^E размерности $(n^2 - n)/2$, поставив в соответствие каждому ребру ось координат в R^E. Это пространство может рассматриваться как множество вектор-столбцов x, компоненты которых индексируются элементами из E. Если $x \in R^E$ и $R \subset E$, то через $x(R)$ обозначим линейную форму $\sum\limits_{e \in R} x_e$. *Вектором инциденций* произвольного подграфа $G \subseteq K_n$ называется вектор $x^G \in R^E$ с компонентами $x^G_e = 1$ при $e \in EG$, $x^G_e = 0$ при $e \notin EG$. Последнее правило, очевидно, задает взаимно однозначное соответствие между множеством подграфов графа K_n и множеством вершин единичного куба в пространстве R^E. На основании этого соответствия там, где это не вызовет недоразумений, $(0,1)$-вектор x мы будем также называть *подграфом* графа K_n.

Множество $P \subset R^E$ называется *многогранником*, если P является выпуклой оболочкой конечного числа точек. Под *размерностью* $\dim P$ многогранника P будем понимать уменьшенную на 1 мощность максимального аффинно независимого семейства его точек. Линейное неравенство $a^T x \leqslant a_0$ $(a, x \in R^E,\ a \neq 0,\ a_0 \in R^1)$ называется *правильным* относительно многогранника P, если $a^T x \leqslant a_0$ для любого $x \in P$. Правильное неравенство $a^T x \leqslant a_0$ называется *опорным* к P, если существуют такие $x', x'' \in P$, что $a^T x' = a_0$ и $a^T x'' < a_0$. Всякое опорное к P неравенство порождает множество $\{x \in P \mid a^T x = a_0\}$, которое называется *гранью* многогранника P. Грани размерности 0 будем называть *вершинами*, грани размерности $\dim P - 1$ — *фасетами* многогранника P. Опорное к P неравенство называется *фасетным*, если оно порождает фасету многогранника P. Множество всех вершин многогранника P будем обозначать через $\mathrm{vert} P$. Наконец, опорные к P неравенства $a^T x \leqslant a_0$ и $c^T x \leqslant c_0$ называются *эквивалентными* (относительно P), если они порождают одну и ту же грань.

Фасетные неравенства играют особую роль для многогранника, так как каждое из них (с точностью до эквивалентности) присутствует в любой системе линейных уравнений и неравенств, описывающей этот многогранник. Помимо непосредственно вытекающих из определения критериев фасетности опорных неравенств мы будем опираться на следующий известный в выпуклом анализе факт.

Теорема 1.1 [5]. *Пусть R^d — d-мерное вещественное пространство, $P \subset R^d$ — многогранник, $\mathrm{aff} P = \{x \in R^d \mid Ax = \alpha\}$ — аффинная оболочка многогранника P, причем A — матрица полного ранга. Тогда опорное к P неравенство $a^T x \leqslant a_0$ является фасетным, если и только если для любого опорного к P неравенства $c^T x \leqslant c_0$, удовлетворяющего условию*

$$\{x \in P \mid a^T x = a_0\} \subseteq \{x \in P \mid c^T x = c_0\},$$

справедливо разложение $c = \mu a + A^T \lambda$, $c_0 = \mu a_0 + \alpha^T \lambda$, где μ — неотрицательное число и $\lambda \in P^{d - \dim P}$.

Обозначим через $\tau_{k,n}$ множество всех связных k-факторов в K_n. *Многогранником связных k-факторов* является множество

$$P_{k,n} = \mathrm{conv}\, \{x^H \in R^E \mid H \in \tau_{k,n}\}.$$

Так как $\tau_{1,n} = \varnothing$, $\tau_{n-1,n} = \{K_n\}$ и случаи $n \leqslant 4$ тривиальны с точки зрения построения линейного описания многогранника $P_{k,n}$, ниже мы будем всюду полагать, что $2 \leqslant k \leqslant n-2$ и $n \geqslant 5$.

§ 2. Аффинная оболочка

Начнем с вспомогательной леммы.

Лемма 2.1. *Для любого 4-цикла $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ существует такой граф $H \in \tau_{k,n}$, что $e_1, e_3 \in EH$, $e_2, e_4 \notin EH$ и $H' = H \setminus \{e_1, e_3\} \cup \{e_2, e_4\} \in \tau_{k,n}$.*

Доказательство. При $k = 2$ утверждение очевидно. Рассмотрим случай $k \geqslant 3$.

Предположим, что $|V|$ четно. Разобьем V на две равные части $V_1 = \{u_1, \ldots, u_t\}$ и $V_2 = \{v_1, \ldots, v_t\}$, $t = n/2$. Так как $3 \leqslant k \leqslant n-2$, то k можно представить в виде $k = k_1 + k_2$, где $2 \leqslant k_1 < t$, $1 \leqslant k_2 < t$ и $k_1 t$ четно. Построим связные k_1-однородные графы H_1 и H_2 такие, что $VH_i = V_i$, $i = 1, 2$. Пусть T_j, $1 \leqslant j \leqslant k_2$, — совершенное паросочетание на V, индуцированное множеством ребер $\{u_i v_{i+j} \mid 1 \leqslant i \leqslant t\}$, где $v_{t+m} \equiv v_m$ при $m > 0$. Очевидно, что граф $H = H_1 \cup H_2 \cup T_1 \cup \ldots \cup T_{k_2}$ является связным k-фактором в K_n. Рассмотрим 4-цикл $C = \{u_1 v_2, v_2 u_2, u_2 v_{k_2+2}, v_{k_2+2} u_1\}$. Так как $u_1 v_2 \in ET_1$, $u_2 v_{k_2+2} \in ET_{k_2}$, то эти ребра принадлежат H. Оставшиеся два ребра $v_2 u_2$ и $v_{k_2+2} u_1$ не принадлежат H, ибо не принадлежат ни одному из T_j, $1 \leqslant j \leqslant k_2$. Ясно, что граф $H' = H \setminus \{u_1 v_2, u_2 v_{k_2+2}\} \cup \{v_2 u_2, v_{k_2+2} u_1\}$ является связным k-фактором в K_n (связность следует из связности графов H_1 и H_2).

Теперь легко построить автоморфизм графа K_n, переводящий цикл C (и граф H) в любой заданный цикл $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Таким образом, при четном $|V|$ лемма справедлива.

Пусть $|V|$ нечетно. Тогда отбросим из V одну вершину и на оставшихся вершинах проделаем те же построения, что и выше. Пусть, как и прежде, $H = H_1 \cup H_2 \cup T_1 \cup \ldots \cup T_{k_2}$ — полученный граф, w — отброшенная вершина. Так как $|V|$ нечетно, то k четно. Выбросив $k/2$ произвольных ребер из графов H_1 и H_2 и соединив «освободившиеся» при этом вершины с вершиной w, получим новый граф $\widetilde{H}$, который является связным k-фактором в K_n. Так как ребра множества $\{uv \mid u \in V_1, v \in V_2\}$ не отбрасывались, то граф $\widetilde{H}' = \widetilde{H} \setminus \{u_1 v_2, u_2 v_{k_2+2}\} \cup \{v_2 u_2, v_{k_2+2} u_1\}$ также является связным k-фактором в K_n. Теперь из полноты K_n следует справедливость леммы и при нечетном $|V|$. Лемма 2.1 доказана.

Пусть A — реберно-вершинная матрица инциденций графа K_n (т. е. каждая строка матрицы A соответствует ребру, а каждый столбец — вершине графа K_n, при этом в клетке (e, u) находится 1, если и только если e и u инцидентны, в остальных клетках находится 0).

Теорема 2.1. *Аффинной оболочкой многогранника $P_{k,n}$ является множество решений системы линейных уравнений $A^T x = \bar{k}$, где $\bar{k}$ — вектор-столбец с n одинаковыми компонентами, равными k.*

Доказательство. Очевидно, что всякий k-фактор x удовлетворяет системе $A^T x = \bar{k}$. Ранг этой системы равен n. Нужно показать, что любое линейное уравнение, задающее гиперплоскость, содержащую $P_{k,n}$, является линейной комбинацией уравнений системы $A^T x = \bar{k}$.

Пусть $P_{k,n} \subset \{x \in R^E \mid d^T x = d_0\}$, $d \neq 0$. Уравнение $d^T x = d_0$ является требуемой линейной комбинацией тогда и только тогда, когда совместна система

$$A\lambda = d, \quad \lambda \in R^n \tag{2.1}$$

и $\bar{\lambda}^T \bar{k} = d_0$, где $\bar{\lambda}$ — решение системы (2.1). Каждое уравнение системы (2.1) соответствует некоторому ребру $uv \in E$ и имеет вид

$$\lambda_u + \lambda_v = d_{uv}, \quad uv \in E.$$

Обозначим это уравнение через $\overline{\gamma}(uv)$.

На основании леммы 2.1 для произвольного цикла $\{u_1, v_1, v_2, u_2\}$ выберем такой граф $H \in \tau_{k,n}$, что $u_1v_1, u_2v_2 \in EH$, $u_1u_2, v_1v_2 \notin EH$ и $H' = H \setminus \{u_1v_1, u_2v_2\} \cup \{u_1u_2, v_1v_2\} \in \tau_{k,n}$. Так как $H, H' \in \tau_{k,n}$, то $d^T x^H = d^T x^{H'} = d_0$. Поэтому

$$d^T x^H - d^T x^{H'} = d_{u_1v_1} + d_{u_2v_2} - d_{u_1u_2} - d_{v_1v_2} = 0.$$

Величины d_{uv} суть правые части уравнений системы (2.1). Легко заметить, что аналогичная комбинация левых частей уравнений $\overline{\gamma}(u_1v_1)$, $\overline{\gamma}(u_2v_2)$, $\overline{\gamma}(u_1u_2)$ и $\overline{\gamma}(v_1v_2)$ дает уравнение с нулевыми коэффициентами. Таким образом, для цикла $\{u_1, v_1, v_2, u_2\}$ справедливо равенство

$$\overline{\gamma}(u_1v_1) + \overline{\gamma}(u_2v_2) - \overline{\gamma}(u_1u_2) - \overline{\gamma}(v_1v_2) = \bar{0},$$

т. е. одно (любое) из этих уравнений является линейной комбинацией трех остальных и поэтому может быть отброшено из системы (2.1) без изменения ее совместности.

Таким образом, если найти такое $E' \subset E$, что для любого $e \in E \setminus E'$ существует упорядоченная последовательность ребер $e_1, e_2, \dots e_t = e$ такая, что каждое e_i является ребром некоторого 4-цикла, остальные три ребра которого принадлежат множеству $E' \cup \{e_1, e_2, \dots e_{i-1}\}$, то множество решений системы (2.1) совпадает с множеством решений ее подсистемы, состоящей из уравнений $\overline{\gamma}(e)$, $e \in E'$.

Покажем, что таким E' может являться множество, состоящее из ребер произвольной $(n-1)$-звезды и ребра, соединяющего любые две концевые вершины звезды. Действительно, пусть $E' = v_1v_2 \cup \{uv_i \mid i = 1, \dots, n-1\}$, где $\{u, v_1, v_2, \dots v_{n-1}\} = V$. Ясно, что ребро v_iv_{i+1}, $2 \leqslant i \leqslant n-2$, является ребром 4-цикла $\{u, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\}$. Поэтому всякое ребро v_iv_j, $|i-j| \neq 1$, является ребром 4-цикла $\{u, v_i, v_j, v_{j+1}\}$, $i, j \in \{1, 2, \dots n-1\}$, $v_n = v_1$.

Подсистема системы (2.1), соответствующая указанному множеству E', является квадратной и невырожденной. Последнее легко проверить непосредственными вычислениями. Кроме того, в силу $d \neq 0$ и произвольности $(n-1)$-звезды, можно считать, что выбранная квадратная подсистема не является однородной. Следовательно, она (а вместе с ней и система (2.1)) имеет ненулевое решение. Пусть $\bar{\lambda} \in R^n$ — ее решение. Тогда для любого связного k-фактора $\overline{x}$ имеем $d_0 = d^T\overline{x} = \bar{\lambda}^T A^T \overline{x} = \bar{\lambda}^T \bar{k}$. Теорема 2.1 доказана.

Следствие 2.1. *При любых n и k таких, что $2 \leqslant k \leqslant n-2$ и kn четно, справедливо равенство*

$$\dim P_{k,n} = \frac{n^2 - n}{2} - n.$$

§ 3. Ранговые неравенства. Условия фасетности

Пусть $G \subset K_n$. *Ранг* $r_k(G)$ подграфа G относительно $\tau_{k,n}$ определим так:

$$r_k(G) = \max\{|EG \cap EH| \text{ при условии, что } H \in \tau_{k,n}\}.$$

Ранговым неравенством, индуцированным графом G, называется линейное неравенство вида

$$x(EG) \leqslant r_k(G). \tag{3.1}$$

Характерной особенностью ранговых неравенств является то, что в силу определения величины $r_k(G)$ они образуют класс всех опорных к $P_{k,n}$ неравенств с коэффициентами 0 и 1 в левой части. Кроме того, нормаль порождаемой неравенством (3.1) гиперплоскости в R^E определяется подграфом G (является его вектором инциденций). Поэтому представляет интерес следующий вопрос: существуют ли среди ранговых неравенств фасетные неравенства и если существуют, то какими графами они индуцируются? Для случая $k = 2$ в [2] установлено, что связный подграф без вершин степени $n-1$, каждый блок которого является кликой, индуцирует фасетное ранговое неравенство для $P_{k,n}$ тогда и только тогда, когда этот подграф — простое дерево клик. (Мы не приводим здесь строгого определения простого дерева клик в силу его громоздкости.) Таким образом, выделен широкий класс подграфов, в котором найдены все ранговые неравенства, порождающие фасеты многогранника симметричной задачи коммивояжера.

В настоящем параграфе мы докажем ряд необходимых условий фасетности рангового неравенства относительно $P_{k,n}$ при $k \geqslant 2$.

Утверждение 3.1. *Для любых $e_1, e_2 \in E$ существует такой граф $H \in \tau_{k,n}$, что $e_1 \in EH$ и $e_2 \notin EH$.*

Доказательство. Положим $V = \{u_1, \dots, u_n\}$.

Случай 1: e_1 и e_2 смежны. Пусть $H_1 \in \tau_{k,n}$. Так как $k \leqslant n-2$, то каждая вершина графа H_1 инцидентна по крайней мере одному ребру, не принадлежащему EH_1. Пусть $u_\alpha \in VH_1$, $u_\alpha u_\beta \in EH_1$, $u_\alpha u_\gamma \notin EH_1$. Будем полагать, что $e_1 = u_i u_j$, $e_2 = u_i u_s$. Пусть σ — перестановка на V, удовлетворяющая условиям $\sigma(\alpha) = i$, $\sigma(\beta) = j$, $\sigma(\gamma) = s$; φ_σ — индуцируемая ею перестановка на E. Тогда граф $H = \varphi_\sigma(H_1)$ является связным k-фактором, причем $u_i u_j = u_{\sigma(\alpha)} u_{\sigma(\beta)} \in EH$ и $u_i u_s = u_{\sigma(\alpha)} u_{\sigma(\gamma)} \notin EH$, т. е. утверждение справедливо.

Случай 2: e_1 и e_2 не смежны. Как и в случае 1, в силу полноты графа K_n достаточно показать, что для произвольного $H \in \tau_{k,n}$ найдется пара несмежных ребер, из которых только одно ребро лежит в EH. Пусть $H \in \tau_{k,n}$, $e_1 \in EH$. Покажем, что среди ребер графа K_n, не смежных с e_1, найдется ребро, не принадлежащее EH. Действительно, предположим, что каждое ребро графа K_n, не смежное с e_1, принадлежит EH. Поскольку в K_n имеется ровно $(n-2)(n-3)/2$ ребер, не смежных с e_1, а по предположению они принадлежат EH, то $kn/2 = |EH| = (n-2)(n-3)/2 + 2(k-1) + 1$, т. е. $k(n-4) = (n-4)(n-1)$. Последнее равенство противоречит условиям $k \leqslant n-2$ и $n \geqslant 5$. Таким образом, среди ребер, не смежных с e_1, существует $e_2 \notin EH$. Утверждение 3.1 доказано.

Первое из необходимых условий фасетности (теорема 3.1) имеет место не только для ранговых неравенств, но и для любого опорного к $P_{k,n}$ неравенства.

Теорема 3.1. *Пусть неравенство $a^T x \leqslant a_0$, $a \neq 0$, опорно к $P_{k,n}$, $\{x^1, \dots, x^t\}$ — множество вершин порождаемой им грани. Если $\left|\bigcap_{i=1}^t Ex^i\right| \geqslant 2$ или $\left|E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^t Ex^i\right)\right| \geqslant 2$, то неравенство $a^T x \leqslant a_0$ не является фасетным.*

Доказательство. Пусть $\left|\bigcap_{i=1}^t Ex^i\right| \geqslant 2$ и $e_1, e_2 \in \bigcap_{i=1}^t Ex^i$. Это значит, что для всех x^i, $1 \leqslant i \leqslant t$ (и для любой их выпуклой комбинации), выполняются равенства $x^i_{e_1} = x^i_{e_2} = 1$. Пусть F_a — грань, порождаемая неравенством $a^T x \leqslant a_0$, а F_j, $j = 1, 2$, — грани, порождаемые неравенствами $x_{e_j} \leqslant 1$. Очевидно, что $F_a \subseteq F_1 \cap F_2$. Заметим, что F_1 и F_2 — две различные грани, ибо в противном случае каждый связный k-фактор, содержащий ребро e_1, должен содержать ребро e_2, что противоречит утверждению 3.1. Значит,

$$\dim F_a \leqslant \dim(F_1 \cap F_2) < \max\{\dim F_1, \dim F_2\} \leqslant \dim P_{k,n} - 1.$$

При $\left|E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^t Ex^i\right)\right| \geqslant 2$ рассуждения совершенно аналогичны, если взять $e_1, e_2 \in E \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{t} Ex^i \right)$ и принять F_j, $j = 1, 2$, за грани, порождаемые неравенствами $x_{e_j} \geqslant 0$. Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. *Пусть* $G \subset K_n$, $F = \{x \in P_{k,n} \mid x(EG) = r_k(G)\}$, $|EG| \geqslant 2$, $\{x^1, x^2, \dots, x^t\} = \mathrm{vert} F$ *и* $\bigcap_{i=1}^{t} Ex^i = \{e_0\}$ *или* $E \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{t} Ex^i \right) = \{e_0\}$. *Если существует граф* $\overline{x} \in \tau_{k,n}$ *такой, что* $e_0 \in E\overline{x}$ *и* $\overline{x}(EG) < r_k(G)$ *(или* $e_0 \notin E\overline{x}$ *и* $\overline{x}(EG) < r_k(G)$*), то* F *не является фасетой многогранника* $P_{k,n}$.

Действительно, пусть $F_0 = \{x \in P_{k,n} \mid x_{e_0} = 1\}$ (или $F_0 = \{x \in P_{k,n} \mid x_{e_0} = 0\}$). Из условия теоремы следует, что $F \subset F_0$. Так как F и F_0 — грани многогранника, то $\dim F < \dim F_0 \leqslant \dim P_{k,n} - 1$.

• Будем говорить, что граф $G \subset K_n$ *достраивается до связного* k*-фактора*, если существует такой $H \in \tau_{k,n}$, что $G \subseteq H$.

Теорема 3.3. *Если* $G \subset K_n$ *достраивается до связного* k*-фактора и* $|EG| \geqslant 2$*, то неравенство* $x(EG) \leqslant r_k(G)$ *не является фасетным к* $P_{k,n}$.

В самом деле, так как G достраивается до связного k-фактора, то $r_k(G) = |EG|$. Следовательно, EG является подмножеством ребер любого k-фактора, лежащего на грани, порождаемой неравенством $x(EG) \leqslant r_k(G)$. Теперь утверждение теоремы очевидно вытекает из теоремы 3.1.

Для формулировки достаточных условий понадобятся следующие определения:

• Простой четный цикл $C = \{e_1, \dots, e_t\}$ назовем *чередующимся относительно* $G \subset K_n$, если $e_{2i-1} \notin EG$, $e_{2i} \in EG$, $1 \leqslant i \leqslant t/2$.

• Если цикл C чередуется относительно G, то для графа G', полученного из G удалением ребер цикла C с четными номерами и добавлением ребер с нечетными номерами, справедливо равенство $d_G(u) = d_{G'}(u)$ для всех $u \in VG$. Эту процедуру перехода от G к G' назовем *переключением* по циклу C и обозначим через $G' = G \triangle C$.

• Пусть $F \subset K_n$. Простой четный цикл C называется kF*-допустимым*, если существует такой $\overline{x} \in \tau_{k,n}$, что C чередуется относительно $\overline{x}$, $\widetilde{x} = \overline{x} \triangle C \in \tau_{k,n}$ и $\overline{x}(EF) = \widetilde{x}(EF) = r_k(F)$.

• Пусть $R \subset E$. R*-последовательностью* назовем упорядоченную последовательность ребер $e_1, e_2, \dots, e_t$ такую, что что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant t$, ребро e_i является ребром некоторого цикла $C \subseteq R \cup \{e_1, \dots e_i\}$. Если все эти циклы kF-допустимы, то R-последовательность называется kF*-допустимой.* При этом число t будем называть *длиной*, а ребро e_t — *концом* R-последовательности.

Наконец, для данного графа $F \subset K_n$ и множества $\widetilde{E} \subset E$ обозначим через $D(F, \widetilde{E})$ подматрицу матрицы $(x^F \mid A)$ (матрицы, полученной из реберно-вершинной матрицы инциденций графа K_n присоединением слева столбца x^F), образованную строками, которые соответствуют ребрам множества $\widetilde{E}$.

Теорема 3.4 (достаточные условия фасетности рангового неравенства). *Пусть $F \subset K_n$ и $\widetilde{E} \subset E$ таковы, что*

1) $|\widetilde{E}| \leqslant n + 1$;

2) *каждое ребро из $E \setminus \widetilde{E}$ является концом некоторой kF-допустимой $\widetilde{E}$-последовательности;*

3) *матрица $D(F, \widetilde{E})$ имеет полный ранг.*

Тогда неравенство $x(EF) \leqslant r_k(F)$ порождает фасету многогранника $P_{k,n}$.

Доказательство. Неравенство $x(EF) \leqslant r_k(F)$ обозначим через $a^T x \leqslant a_0$. Пусть $d^T x \leqslant d_0$, $d \neq 0$, — опорное к $P_{k,n}$ неравенство, удовлетворяющее условию

$$\{x \in P_{k,n} \mid a^T x = a_0\} \subseteq \{x \in P_{k,n} \mid d^T x = d_0\}. \tag{3.2}$$

Покажем, что тогда существуют $\mu \geqslant 0$ и $\lambda \in R^n$ такие , что $d = \mu a + A\lambda = (a \mid A)\bar{\lambda}$ и $d_0 = \mu a_0 + \bar{k}^T \lambda$, где $\bar{\lambda} = (\mu, \lambda^T)^T \in R^{n+1}$, т. е. система линейных уравнений

$$(a \mid A)\bar{\lambda} = d \tag{3.3}$$

совместна, причем $\mu \geqslant 0$ и $d_0 = \mu a_0 + \bar{k}^T \lambda$.

Поскольку уравнения системы (3.3) взаимно однозначно соответствуют ребрам e из множества E, будем обозначать их через $\gamma(e)$, т. е. для каждого $e = uv \in E$ уравнение $\gamma(e)$ имеет вид

$$a_e \mu + \lambda_u + \lambda_v = d_e. \tag{3.4}$$

Пусть $C = \{e_1, e_2, \ldots, e_t\}$ такой kF-допустимый цикл, что $e_1, \ldots e_{t-1} \in \widetilde{E}$. Тогда существует такой граф $H \in \tau_{k,n}$, что C является чередующимся циклом относительно H и $a^T x^H = a^T x^{H'} = a_0$, где $H' = H \triangle C \in \tau_{k,n}$. В силу (3.2) имеем $d^T x^H = d^T x^{H'} = d_0$. Поэтому

$$0 = d^T(x^H - x^{H'}) = \sum_{i=1}^{t/2} (d_{e_{2i-1}} - d_{e_{2i}}),$$

$$d_{e_t} = d_{e_1} + d_{e_3} + \ldots + d_{e_{t-1}} - d_{e_2} - d_{e_4} - \ldots - d_{e_{t-2}}. \tag{3.5}$$

Используя аналогичные рассуждения, убеждаемся в том, что

$$a_{e_t} = a_{e_1} + a_{e_3} + \ldots + a_{e_{t-1}} - a_{e_2} - a_{e_4} - \ldots - a_{e_{t-2}}. \tag{3.6}$$

Пусть $e_i = u_i u_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant t-1$, $e_t = u_t u_1$. Очевидно, что

$$(\lambda_{u_1} + \lambda_{u_2}) + (\lambda_{u_3} + \lambda_{u_4}) + \ldots + (\lambda_{u_{t-1}} + \lambda_{u_t}) - (\lambda_{u_2} + \lambda_{u_3}) - (\lambda_{u_4} + \lambda_{u_5}) - \ldots - (\lambda_{u_{t-2}} + \lambda_{u_{t-1}}) = (\lambda_{u_1} + \lambda_{u_t}). \quad (3.7)$$

Из (3.5)–(3.7) следует, что уравнение $\gamma(e_t)$ является линейной комбинацией уравнений $\gamma(e_i)$, $1 \leqslant i \leqslant t-1$, вида

$$\gamma(e_t) = \sum_{i=1}^{t/2} \gamma(e_{2i-1}) - \sum_{i=1}^{t/2-1} \gamma(e_{2i}). \quad (3.8)$$

Это означает, что уравнение $\gamma(e_t)$ может быть отброшено из системы (3.3) без изменения ее совместности.

Теперь, используя индукцию, покажем, что отброшенным может быть каждое уравнение $\gamma(e)$ при $e \notin \widetilde{E}$. Индукцию проведем по длине $\widetilde{E}$-последовательности.

База индукции установлена выше. Предположим, что если $e \notin \widetilde{E}$ является концом некоторой kF-допустимой $\widetilde{E}$-последовательности длины p, то $\gamma(e)$ можно исключить из системы (3.3). Обозначим через $E' \subset E \setminus \widetilde{E}$ множество таких ребер, которые являются концами kF-допустимых $\widetilde{E}$-последовательностей длины не более p. Пусть ребро $e \in E \setminus (\widetilde{E} \cup E')$ является концом $\widetilde{E}$-последовательности длины $p+1$. Следовательно, существует такой kF-допустимый цикл $C = \{e_1, \ldots, e_t\}$, что $e = e_t$ и $e_i \in \widetilde{E} \cup E'$, $1 \leqslant i \leqslant t-1$. Тогда для ребер этого цикла справедливо (3.8). Так как по индукционному предположению все уравнения $\gamma(e_i)$, $1 \leqslant i < t-1$, являются линейными комбинациями уравнений множества $\{\gamma(e') \mid e' \in \widetilde{E}\}$, то это же справедливо и для уравнения $\gamma(e_t)$.

Таким образом, множество решений системы (3.3) совпадает с множеством решений ее подсистемы

$$D(F, \widetilde{E})\bar{\lambda} = \tilde{d}, \quad (3.9)$$

где $\tilde{d} = (d_e, e \in \widetilde{E})$. По условию теоремы $\operatorname{rank} D(F, \widetilde{E}) = |\widetilde{E}| \leqslant n+1$. Поэтому ранг расширенной матрицы системы (3.9) равен рангу матрицы $D(F, \widetilde{E})$. Значит, система (3.9) совместна, что влечет совместность исходной системы (3.3) и равенство $d_0 = \mu a_0 + \bar{k}^T \lambda$.

Остается показать, что $\mu \geqslant 0$. Пусть $\bar{\lambda} = (\mu, \lambda^T)^T$ — решение системы (3.3). Тогда для любого связного k-фактора H имеем

$$d^T x^H = \mu a^T x^H + \lambda^T A^T x^H = \mu a^T x^H + \lambda^T \bar{k}. \quad (3.10)$$

Так как неравенство $a^T x \leqslant a_0$ опорно к $P_{k,n}$, то существуют такие $H, H' \in \tau_{k,n}$, что $a^T x^H = a_0$ и $a^T x^{H'} < a_0$. Следовательно, в силу (3.2) имеем $d^T x^H = d_0$ и $d^T x^{H'} \leqslant d_0$. Отсюда и из (3.10) получаем

$$0 \leqslant d^T x^H - d^T x^{H'} = \mu(a^T x^H - a^T x^{H'}).$$

Так как $a^T x^H - a^T x^{H'} > 0$, то $\mu \geqslant 0$. Теорема 3.4 доказана.

Теоремы (3.1)–(3.4) используются в § 4–6 при получении следующих трех классов неравенств, определяющих фасеты многогранника связных k-факторов: ограничения единичного куба; неравенства, индуцированные полными подграфами графа K_n; неравенства, индуцированные подграфами вида $F = K \cup R$, где K — полный подграф, а R — такое паросочетание в K_n, что $|VK \cap \{u, v\}| = 1$ для всякого $uv \in ER$. Для случая $k = 2$ аналогичные классы описаны в [1, 2, 4].

Напомним несколько известных понятий, которые нам понадобятся в дальнейшем (см., например, [6]). Последовательность $d = (d_1, d_2, \dots, d_q)$ целых неотрицательных чисел называется *правильной*, если $\sum_{j=1}^{q} d_j$ четно. Числа d_j называются *компонентами*, а число q — *длиной* последовательности d. Правильная последовательность d называется *графической*, если существует граф G, последовательность степеней которого совпадает с d. При этом граф G называется *реализацией* последовательности d.

Простыми следствиями теорем Эрдеша — Галлаи и Уэнга (см. [6]) являются следующие утверждения.

Лемма 3.1. 1) *Правильная последовательность d с компонентами $d_1 = \dots = d_p = s$, $d_{p+1} = \dots = d_q = s - 1$, $3 \leqslant s < q$, допускает реализацию с числом реберной связности $s - 1$.*

2) *Правильная последовательность d с компонентами $d_1 = \dots = d_p = s$, $d_{p+1} = \dots = d_{q-1} = s - 1$, $d_q = s - 2$, $3 \leqslant s < q$, допускает связную реализацию.*

§ 4. Тривиальные фасеты

Докажем фасетность неравенств $x_e \leqslant 1$ и $x_e \geqslant 0$ относительно $P_{k,n}$.

Утверждение 4.1. *Пусть $F = (\{u_1, u_2\}, u_1u_2)$ — однореберный граф. Всякий 4-цикл, не содержащий графа F, является kF-допустимым.*

Доказательство. Пусть $V = \{u_1, \dots, u_n\}$, $C = \{u_i, u_j, u_s, u_t\}$ — 4-цикл и $u_1u_2 \notin EC$. Пользуясь леммой 2.1, возьмем $\overline{x} \in \tau_{k,n}$ и 4-цикл $\overline{C} = \{u_\alpha, u_\beta, u_\gamma, u_\delta\}$ такие, что $\overline{C}$ чередуется относительно $\overline{x}$ и $\widetilde{x} = \overline{x} \triangle \overline{C} \in \tau_{k,n}$. В графе $\overline{x}$ выберем ребро u_pu_q такое, что u_pu_q имеет общую вершину с циклом $\overline{C}$, если и только если u_1u_2 имеет общую вершину с циклом C. Очевидно, что $u_pu_q \in E\widetilde{x}$. Рассмотрим перестановку σ, удовлетворяющую следующим условиям: $\sigma(p) = 1$, $\sigma(q) = 2$, $\sigma(\alpha) = i$, $\sigma(\beta) = j$, $\sigma(\gamma) = s$, $\sigma(\delta) = t$. Пусть φ_σ — соответствующий автоморфизм графа K_n. Теперь получаем, что $\varphi_\sigma(\overline{C}) = C$, $\varphi_\sigma(u_p u_q) = u_1 u_2$ и необходимым для kF-допустимости цикла C является граф $\varphi_\sigma(\overline{x})$. Утверждение 4.1 доказано.

Теорема 4.1. *Для всех $k \leqslant n-2$ линейное неравенство $x_e \leqslant 1$, $e \in E$, порождает фасету многогранника $P_{k,n}$.*

Доказательство. Рассмотрим граф $F \subset K_n$ с множеством вершин $VF = \{u, v\}$ и ребром $EF = \{e\}$, $e = uv$. Вершины множества $V \setminus \{u, v\}$ обозначим через $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ и положим

$$\widetilde{E} = \delta(w_1) \cup \{uv, w_2 w_3\}.$$

Покажем, что каждое ребро графа K_n является концом некоторой kF-допустимой $\widetilde{E}$-последовательности. Действительно, для каждого i, $4 \leqslant i \leqslant n-2$, цикл $\{w_2 w_i, w_2 w_3, w_3 w_1, w_1 w_i\}$ kF-допустим и, следовательно, ребра $w_2 w_i$ являются концами $\widetilde{E}$-последовательностей длины 1. При $i \neq j$ и $i, j \geqslant 4$ ребра $w_i w_j$ входят в kF-допустимые циклы $\{w_i w_j$, $w_i w_2$, $w_2 w_1, w_1 w_j\}$. Далее, ребро $u w_2$ принадлежит циклу $\{u w_2, u w_1$, $w_1 w_3, w_3 w_2\}$; ребро $u w_i$, $i > 2$, — циклам $\{u w_i, u w_1$, $w_1 w_2, w_2 w_i\}$; ребро $v w_2$ — циклу $\{v w_2, v w_1$, $w_1 w_3, w_3 w_2\}$; ребро $v w_i$, $i > 2$, — циклам $\{v w_i$, $v w_1$, $w_1 w_2, w_2 w_i\}$. В силу утверждения 4.1 все эти циклы kF-допустимы.

Для проверки третьего условия теоремы 3.4 вычислим определитель матрицы $D(F, \widetilde{E})$. Раскрывая его по столбцам $x^F, w_4, w_5, \dots, w_{n-2}$, содержащим только по одной единице, получим ненулевой определитель пятого порядка. Теорема 4.1 доказана.

Прежде чем перейти к вопросу о фасетности неравенства $x_e \geqslant 0$, которое не является ранговым, сформулируем очевидное утверждение.

Утверждение 4.2. *Пусть $u, v \in V$, $u \neq v$, и T — граф, индуцированный множеством ребер $\delta(u) \setminus \{uv\}$. Тогда при $k < n-1$ неравенства $x(ET) \leqslant k$ и $x_{uv} \geqslant 0$ эквивалентны относительно $P_{k,n}$.*

Заметим, что неравенство $x(ET) \leqslant k$, фигурирующее в утверждении 4.2, является ранговым.

Утверждение 4.3. *Пусть T — граф из утверждения 4.2. Всякий 4-цикл, не содержащий ребра uv, является kT-допустимым.*

Доказательство аналогично доказательству утверждения 4.1.

Теорема 4.2. *Линейное неравенство $x_e \geqslant 0$, $e \in E$, порождает фасету многогранника $P_{k,n}$ тогда и только тогда, когда $k < n-2$.*

Доказательство. Если $k = n-2$, то для любого $\overline{x} \in \tau_{n-2,n}$, удовлетворяющего условию $\overline{x}_e = 0$, справедливо равенство $\overline{x}_f = 1$, где f —

произвольное смежное с e ребро, причем обратная импликация не выполняется. Это значит, что грань $\{x \in P_{n-2,n} \mid x_e = 0\}$ является собственной гранью грани $\{x \in P_{n-2,n} \mid x_f = 1\}$ и, следовательно, не может являться фасетой для многогранника $P_{n-2,n}$.

Пусть $k < n-2$. Положим $e = uv$, $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-2}\} = V \setminus \{u, v\}$ и T — граф, индуцированный множеством ребер $\delta(u) \setminus \{uv\}$. Пусть $\widetilde{E} = \delta(w_1) \cup \{uv, w_2w_3\}$. Доказательство того, что ребра графа K_n являются концами $\widetilde{E}$-последовательностей, проводится в том же порядке, что и в теореме 4.1. При этом используются kF-допустимые циклы, описанные в утверждении 4.1. Вычисление ранга матрицы $D(T, \widetilde{E})$ также не представляет труда. Таким образом, неравенство $x(ET) \leqslant k$ является фасетным для многогранника $P_{k,n}$. Отсюда с использованием утверждения 4.2 и теоремы 3.4 получаем фасетность неравенства $x_e \geqslant 0$. Теорема 4.2 доказана.

Фасеты, порождаемые неравенствами $x_e \geqslant 0$ и $x_e \leqslant 1$, $e \in E$, по традиции будем называть *тривиальными.*

§ 5. Кликовые неравенства

Кликой в K_n называется любой подграф, все вершины которого попарно смежны.

Пусть K — клика в K_n, содержащая не менее трех вершин. Линейное неравенство

$$x(EK) \leqslant r_k(K) \tag{5.1}$$

называется *кликовым.*

Лемма 5.1. *Пусть клики K и $\overline{K}$ в K_n удовлетворяют условию $V\overline{K} = V \setminus VK$. Тогда неравенства $x(EK) \leqslant r_k(K)$ и $x(E\overline{K}) \leqslant r_k(\overline{K})$ эквивалентны относительно $P_{k,n}$.*

Доказательство. Для всякого $x \in \mathcal{T}_{k,n}$ и всякой клики $K \subset K_n$ справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} k|VK| = \sum_{u \in VK} d_x(u) &= \sum_{u \in VK} (d_{x \cap K}(u) + d_{x \cap \delta(VK)}(u)) \\ &= 2|E(x \cap K)| + |Ex \cap \delta(VK)|. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Пусть $x^1, x^2 \in \mathcal{T}_{k,n}$. Покажем, что если $|E(x^1 \cap K)| < |E(x^2 \cap K)|$, то $|E(x^1 \cap \overline{K})| < |E(x^2 \cap \overline{K})|$. Действительно, в силу (5.2) и равенства $\delta(VK) = \delta(V\overline{K})$ имеем

$$\begin{aligned} &2|E(x^2 \cap \overline{K})| - 2|E(x^1 \cap \overline{K})| \\ &\quad = k|V\overline{K}| - |Ex^2 \cap \delta(V\overline{K})| - k|V\overline{K}| + |Ex^1 \cap \delta(V\overline{K})| \\ &\quad = 2|E(x^2 \cap K)| - k|VK| + k|VK| - 2|E(x^1 \cap K)| \\ &\quad = 2|E(x^2 \cap K)| - 2|E(x^1 \cap K)| > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при $x \in \tau_{k,n}$ равенства $|E(x \cap K)| = r_k(K)$ и $|E(x \cap \overline{K})| = r_k(\overline{K})$ выполняются одновременно. Отсюда следует справедливость леммы 5.1.

Лемма 5.2. *Если кликовое неравенство $x(EK) \leqslant r_k(K)$ порождает фасету многогранника $P_{k,n}$, то $k < |VK| < n - k$.*

Доказательство. Пусть по-прежнему $\overline{K}$ — клика на множестве вершин $V \setminus VK$. Предположим, что $k \geqslant |VK|$. Покажем, что в этом случае та из клик K и $\overline{K}$, в которой число вершин не превосходит $n/2$, достраивается до связного k-фактора. Тем самым в силу леммы 5.1 и теоремы 3.3 будет получено противоречие с фасетностью неравенства $x(EK) \leqslant r_k(K)$.

Пусть $p = |VK| - 1$, $VK = \{u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}\}$, $V\overline{K} = \{v_1, \ldots, v_q\}$, $p+1+q = n$, $p+1 \leqslant q$. Добавим к клике K следующие ребра: каждую вершину u_i, $1 \leqslant i \leqslant p+1$, соединим ребрами с вершинами $v_{(i-1)(k-p)+1}, \ldots, v_{i(k-p)}$, полагая $v_{mq+l} = v_l$ для $m = 0, 1, 2, \ldots$ и $l = 1, 2, \ldots, q$. Это возможно, ибо $k - p \leqslant q - 1$, что легко доказать, опираясь на равенство $p + 1 + q = n$. Эти ребра вместе с кликой K дают некоторый граф H, обладающий свойствами

$$\begin{aligned} &d_H(u_i) = k, \ i = 1, \ldots, p+1, \\ &d_H(v_i) = t, \ i = 1, \ldots, r, \\ &d_H(v_i) = t - 1, \ i = r+1, \ldots, q, \end{aligned}$$

где $t \in \{1, \ldots, k\}$, $r \in \{1, \ldots, q-1\}$ — подходящие числа. При этом справедливо равенство

$$(p+1)(k-p) = (t-1)q + r, \quad r < q. \tag{5.3}$$

Рассмотрим последовательность $d = (d_{v_1}, \ldots, d_{v_q})$ с компонентами

$$d_{v_j} = \begin{cases} k - t + 1, & \text{если } j = 1, \ldots, q - r; \\ k - t, & \text{если } j = q - r + 1, \ldots, q. \end{cases}$$

Очевидно, что если последовательность d является графической и G — ее реализация на множестве вершин $V\overline{K}$, то граф $H \cup G$ будет k-фактором, содержащим клику K. При этом в случае, когда $t > 1$ (см. (5.3)), мы можем не требовать связности реализации G, ибо при $t > 1$ каждая вершина из $V\overline{K}$ смежна с некоторой вершиной из VK посредством ребер из $EH \setminus EK$ и, следовательно, граф $H \cup G$ будет связен. Если же $t = 1$, то $k - t \geqslant |VK| - 1 > 1$ и, значит, по лемме 3.1 последовательность d может быть реализована связным графом G, что вновь дает связность графа $H \cup G$.

В силу леммы 3.1 для доказательства графичности последовательности d достаточно установить ее правильность и доказать неравенство

$$q > k - t + 1. \tag{5.4}$$

Используя (5.3), получаем

$$\sum_{j=1}^{q} d_{v_j} = \sum_{j=1}^{q-r}(k-t+1) + \sum_{j=q-r+1}^{q}(k-t)$$
$$= (q-r)(k-t+1) + r(k-t) = kq - (p+1)(k-p).$$

Рассмотрев все возможные соотношения по модулю 2 чисел k и p и учитывая, что kn четно по условию, видим, что число $\sum_{j=1}^{q} d_{v_j}$ всегда четно. Для доказательства неравенства (5.4) заметим, что в силу (5.3) $t-1 = \{(p+1)(k-p)-r\}/q$. Следовательно,

$$q - k + (t-1) = q - k + \frac{1}{q}\{(p+1)(k-p) - r\}$$
$$= \frac{1}{q}\{q^2 - p^2 - k(q-p) + k - p - r\}$$
$$= \frac{1}{q}\{(q-p)(q+p-k) + k - n + q + 1 - r\}$$
$$= \frac{1}{q}\{(q-p)(n-1-k) - (n-1-k) + q - r\}$$
$$= \frac{1}{q}\{(q-p-1)(n-1-k) + q - r\} \geqslant \frac{1}{q}(q-r) > 0.$$

Неравенство (5.4) доказано. Таким образом, последовательность d графическая. Лемма 5.2 доказана.

Теорема 5.1. *Пусть $K \subset K_n$ — клика и $k < |VK| < n-k$. Тогда*

$$r_k(K) = \left\lceil \frac{k|VK|}{2} - 1 \right\rceil.$$

Доказательство. Согласно определению ранга подграфа мы должны доказать опорность неравенства

$$x(EK) \leqslant \left\lceil \frac{k|VK|}{2} - 1 \right\rceil$$

к многограннику $P_{k,n}$. При $k = 2$ требуемое доказано в [1]. Пусть $k \geqslant 3$. Выберем произвольно $\overline{x} \in \tau_{k,n}$. Тогда имеем

$$2\overline{x}(EK) = 2|E(\overline{x} \cap K)| = \sum_{u \in VK} d_{\overline{x}\cap K}(u).$$

Так как $\overline{x}$ связен и $VK \subset V$, то в графе $\overline{x} \cap K$ существует вершина $v \in VK$ такая, что $d_{\overline{x}\cap K}(v) < k$. Поэтому

$$\sum_{u\in VK} d_{\overline{x}\cap K}(u) = d_{\overline{x}\cap K}(v) + \sum_{u\in VK\subset\{v\}} d_{\overline{x}\cap K}(u)$$
$$< k + k|VK \setminus \{v\}| = k|VK|.$$

Отсюда видим, что $\overline{x}(EK) < k|VK|/2$. Тем самым правильность доказана.

Теперь нужно показать, что существует граф $\overline{x} \in \tau_{k,n}$ такой, что $\overline{x}(EK) = \lceil k|VK|/2 - 1\rceil$. Рассмотрим сначала случай, когда $k|VK|$ четно. Так как $k < |VK|$ и $|V\overline{K}| = n - |VK| > n - (n-k) = k$, то на VK и $V\overline{K}$ можно соответственно построить связные k-однородные графы H_1 и H_2 ($VH_1 = VK$ и $VH_2 = V\overline{K}$). Пусть $u_1v_1 \in EH_1$ — некоторое ребро, удаление которого не нарушает связности графа H_1, $u_2v_2 \in EH_2$ — аналогичное ребро в графе H_2. Очевидно, что $\overline{x} = (H_1 \cup H_2)\triangle\{u_1, u_2, v_2, v_1\}$ есть требуемый связный k-фактор в K_n.

Пусть теперь $k|VK|$ нечетно. Тогда числа k и $|VK|$ нечетны. Так как $k < |VK|$, то по лемме 3.1 можно построить такой связный граф H_1 с множеством вершин VK, что только одна его вершина, скажем v_1, будет иметь степень $k-1$, а остальные — степень k. Далее, так как k нечетно, то n четно. Следовательно, $|V\overline{K}|$ нечетно. Поскольку $|V\overline{K}| > k$, на множестве вершин $V\overline{K}$ аналогичным образом можно построить граф H_2. Пусть v_2 — вершина степени $k-1$ в H_2. Ясно, что $\overline{x} = H_1 \cup H_2 \cup \{v_1v_2\}$ — связный k-фактор в K_n и $2|E(\overline{x} \cap K)| = k - 1 + k(|VK| - 1) = k|VK| - 1$. Так как $k|VK|$ нечетно, то $|E(\overline{x} \cap K)| = \lceil k|VK|/2 - 1\rceil$. Теорема 5.1 доказана.

Ниже будет показано, что условие $k < |VK| < n - k$ из леммы 5.2 является также и достаточным условием фасетности кликового неравенства. Для доказательства этого факта выделим семейство kF-допустимых циклов для заданной клики F.

Утверждение 5.1. *Пусть $F \subset K_n$ — клика и $k < |VK| < n - k$. Циклы $C = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, определяемые любым из следующих двух условий:*

а) $u_1, u_2, u_3 \in VF$, $u_4 \in V \setminus VF$;

б) $u_1 \in VF$, $u_2, u_3, u_4 \in V \setminus VF$,

являются kF-допустимыми.

Доказательство. Нетрудно проверить, что графы, использованные при доказательстве теоремы 5.1, являются графами, необходимыми для kF-допустимости 4-циклов, указанных в утверждении.

Теорема 5.2 (кликовые фасеты). *Пусть $F \subset K_n$ — клика. Кликовое неравенство $x(EF) \leqslant \lceil k|VF|/2 - 1 \rceil$ порождает фасету многогранника $P_{k,n}$ тогда и только тогда, когда $k < |VF| < n - k$.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы 5.2. Докажем достаточность.

Пусть $VF = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$, $V \setminus VF = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$, $p + q = n$ и $k < p < n - k$. Положим

$$\widetilde{E} = \{u_1u_i,\ i = 2, 3, \dots, p;\ u_2u_3;\ v_1v_i,\ i = 2, 3, \dots, q;\ v_2v_3;\ u_1v_1\}.$$

Покажем, что каждое ребро графа K_n является концом некоторой kF-допустимой $\widetilde{E}$-последовательности, для построения которой будем использовать циклы вида а) и б) из утверждения 5.1. В самом деле, ребро v_1u_2 принадлежит циклу $\{v_1u_2, v_1u_1, u_1u_3, u_3u_2\}$; далее выпишем таблицу, в левой колонке которой указано ребро, а в правой — kF-допустимый цикл, которому ребро принадлежит (отметим, что в этой таблице важен порядок строк):

$$\begin{aligned}
v_1u_3 &- \{v_1u_3, v_1u_1, u_1u_2, u_2u_3\};\\
v_1u_i,\ i > 3, &- \{v_1u_i, v_1u_2, u_2u_1, u_1u_i\};\\
u_1v_2 &- \{u_1v_2, u_1v_1, v_1v_3, v_3v_2\};\\
u_1v_3 &- \{u_1v_3, u_1v_1, v_1v_2, v_2v_3\};\\
u_1v_i,\ i > 3, &- \{u_1v_i, u_1v_2, v_2v_1, v_1v_i\};\\
u_2v_2 &- \{u_2v_2, v_2u_1, u_1u_3, u_3u_2\};\\
u_2v_3 &- \{u_2v_3, u_2v_1, v_1v_2, v_2v_3\};\\
u_3v_2 &- \{u_3v_2, u_3u_2, u_2u_1, u_1v_2\};\\
u_2v_i,\ i > 3, &- \{u_2v_i, u_2v_2, v_2v_1, v_1v_i\};\\
v_2u_i,\ i > 3, &- \{v_2u_i, v_2u_2, u_2u_1, u_1u_i\};\\
u_iv_j,\ i \geqslant 3,\ j \geqslant 3, &- \{u_iv_j, u_iv_2, v_2v_1, v_1v_j\}.
\end{aligned}$$

Наконец, остаются ребра клик на множествах вершин F и $V \setminus VF$. При любых i и j ребро u_iu_j принадлежит циклу $\{u_iu_j, u_iv_1, v_1u_1, u_1u_j\}$, а ребро v_iv_j — циклу $\{v_iv_j, v_iu_1, u_1v_1, v_1v_j\}$.

Проверка третьего условия теоремы 3.4 заключается в вычислении определителя матрицы $D(F, \widetilde{E})$. Раскрывая его по столбцам, соответствующим вершинам $u_4, \dots, u_p$, $v_4, \dots, v_q$, получаем определитель седьмого порядка, который, как легко проверить, не равен нулю. Теорема 5.2 доказана.

Замечание. При нечетных $k|VF|$ кликовое неравенство является фасетным и к многограннику k-факторов (без условия связности); доказательство этого факта совпадает с аналогичным доказательством для $P_{k,n}$. При четных $k|VF|$, основываясь на теореме 3.1, можно показать, что это не так.

§ 6. Неравенства Эдмондса

Пусть K — клика в K_n и $R \subset \delta(VK)$ — множество попарно несмежных ребер, $|R| \geqslant 2$. Граф $F = K \cup R$ назовем *графом Эдмондса*. Соответствующее ему ранговое (относительно $P_{k,n}$) неравенство $x(EF) \leqslant r_k(F)$ называется *неравенством Эдмондса*.

Лемма 6.1. *Пусть $F_i = K_i \cup R_i$, $i = 1, 2$, — графы Эдмондса такие, что $VK_1 = V \setminus VK_2$ и $R_1 = R_2$. Тогда неравенства $x(EF_1) \leqslant r_k(F_1)$ и $x(EF_2) \leqslant r_k(F_2)$ эквивалентны относительно $P_{k,n}$.*

Доказательство. Покажем, что в условиях леммы для любых $H, H' \in \tau_{k,n}$ неравенства $|E(H' \cap F_1)| < |E(H \cap F_1)|$ и $|E(H' \cap F_2)| < |E(H \cap F_2)|$ выполняются одновременно. Действительно, для любого $H \in \tau_{k,n}$ и любого графа Эдмондса $F = K \cup R$ имеем

$$k|VK| = \sum_{u \in VK} d_H(u) = \sum_{u \in VK} d_{H \cap K}(u) + \sum_{u \in VK} d_{H \cap R}(u) + \sum_{u \in VK} d_{H \cap R'}(u),$$

где $R' = \delta(VK) \setminus R$. Отсюда следует, что

$$2|E(H \cap K)| + |EH \cap R| + |EH \cap R'| = k|VK|.$$

Используя последнее равенство, при $VK_1 = V \setminus VK_2$, $R_1 = R_2 = R$ и $|E(H' \cap F_1)| < |E(H \cap F_1)|$ получаем

$$\begin{aligned}
&2(|E(H \cap F_2)| - |E(H' \cap F_2)|)\\
&\quad = 2|E(H \cap K_2)| + 2|EH \cap R| - 2|E(H' \cap K_2)| - 2|EH' \cap R|\\
&\quad = k|VK_2| + |EH \cap R| - |EH \cap R'| - k|VK_2| - |EH' \cap R| + |EH' \cap R'|\\
&\quad = 2|E(H \cap K_1)| + 2|EH \cap R| - k|VK_1| - 2|E(H' \cap K_1)| - 2|EH' \cap R| + k|VK_1|\\
&\quad = 2(|E(H \cap F_1)| - |E(H' \cap F_1)|) > 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, $|E(H \cap F_1)| = r_k(F_1)$ тогда и только тогда, когда $|E(H \cap F_2)| = r_k(F_2)$. Это означает эквивалентность рассматриваемых неравенств. Лемма 6.1 доказана.

Пусть $F = K \cup R$ — граф Эдмондса. Ради удобства рёбра множества R будем обозначать через $u_i v_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$, полагая, что $u_i \in VK$ и $v_i \notin VK$.

Лемма 6.2. *Если неравенство $x(EF) \leqslant r_k(F)$, соответствующее графу Эдмондса $F = K \cup R$, порождает фасету многогранника $P_{k,n}$, то $k < |VK| < n - k$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. $|VK| \leqslant k$, $\overline{x} \in \tau_{k,n}$ и $\overline{x}(EF) = r_k(F)$. Покажем, что в этом случае $R \subset E\overline{x}$. Допустим, что $e_1 = u_1v_1 \notin E\overline{x}$. Тогда $d_{\overline{x}\cap F}(u_1) < k$ и, следовательно, в графе $\overline{x}$ существует ребро u_1v, не принадлежащее EF. В то же время $d_{\overline{x}\cap F}(v_1) = 0$. Поэтому вершина v_1 инцидентна k ребрам графа $\overline{x}$, каждое из которых не лежит в EF. Эти ребра обозначим через $v_1w_1, v_1w_2, \dots, v_1w_k$. Поскольку вершина v в графе $\overline{x}$ смежна с $k-1$ вершинами, отличными от u_1, то среди вершин $w_1, \dots, w_k$ найдется по крайней мере одна, скажем w_1, не смежная с v. Рассмотрим 4-цикл $C = \{u_1, v, w_1, v_1\}$. Этот цикл чередуется относительно $\overline{x}$, а так как v_1 — висячая вершина графа F, то $v_1w_1 \notin EF$, $u_1v \notin EF$ и $u_1v_1 \in EF$. Пусть $x^1 = \overline{x}\triangle C$. Очевидно, что

$$|Ex^1 \cap EF| > |E\overline{x} \cap EF|. \tag{6.1}$$

Если x^1 связен, то из (6.1) следует, что $\overline{x}(EF) < r_k(F)$. Поэтому любой граф $\overline{x} \in \tau_{k,n}$, обращающий неравенство Эдмондса $x(EF) \leqslant r_k(F)$ в равенство, содержит ребро u_1v_1 и, следовательно, содержит все ребра множества R. Пользуясь этим фактом и теоремой 3.1, получаем, что неравенство $x(EF) \leqslant r_k(F)$ не является фасетным. Если же x^1 несвязен, то покажем, что с помощью переключения от x^1 можно перейти к некоторому связному k-фактору, удовлетворяющему неравенству типа (6.1).

Пусть граф x^1 несвязен. Тогда в силу связности $\overline{x}$ граф x^1 состоит из двух компонент x^1_1 и x^1_2. Без ограничения общности будем считать, что $u_1, v_1 \in Vx^1_1$, а $v, w_1 \in Vx^1_2$. В этом случае $w_2, w_3, \dots, w_k \in Vx^1_1$. Рассмотрим два 4-цикла: $C' = \{v_1, w_2, w_1, v\}$ и $C'' = \{v_1, w_2, v, w_1\}$. Нетрудно убедиться, что в результате переключения графа x^1 по крайней мере по одному из указанных циклов возникает связный k-фактор, который обозначим через x^2. Покажем, что

$$|Ex^2 \cap EF| > |E\overline{x} \cap EF|. \tag{6.2}$$

Действительно, если $vw_1 \notin EF$, то после переключения по одному из циклов C', C'' ребра v_1w_2 и vw_1, не принадлежащие EF, заменяются на соответствующие два ребра. Ясно, что $|Ex^2 \cap EF| \geqslant |Ex^1 \cap EF|$, т. е. верно (6.2). Если же $vw_1 \in EF$, то из условия $u_1v, v_1w_1 \notin EF$ следует $|Ex^1 \cap EF| = |E\overline{x} \cap EF| + 2$, а из условия $v_1v, v_1w_1, v_1w_2 \notin EF$ следует $|Ex^2 \cap EF| \geqslant |Ex^1 \cap EF| - 1$. Из последних двух соотношений получаем (6.2).

Итак, при $|VK| \leqslant k$ неравенство $x(EF) \leqslant r_k(F)$ не является фасетным. Предположим, что $|VK| \geqslant n-k$. Рассмотрим граф Эдмондса $\overline{F} = \overline{K} \cup R$, где $\overline{K}$ — клика на множестве вершин $V \setminus VK$. В силу леммы 6.1 неравенства $x(EF) \leqslant r_k(F)$ и $x(E\bar{F}) \leqslant r_k(\overline{F})$ эквивалентны относительно $P_{k,n}$, а для графа $\overline{F}$ справедливо неравенство $|V\overline{K}| =$

$n - |VK| \leqslant n - (n-k) = k$. Повторяя приведенные выше рассуждения, убеждаемся в том, что и в этом случае неравенство $x(E\overline{F}) \leqslant r_k(\overline{F})$ не является фасетным для $P_{k,n}$. Это завершает доказательство леммы 6.2.

Теорема 6.1. *Пусть* $F = K \cup R$ *— граф Эдмондса,* $2 \leqslant k < |VK| < n - k$. *Тогда*

$$r_k(F) = \left\lfloor \frac{k|VK| + |R|}{2} \right\rfloor.$$

Доказательство. Достаточно убедиться в опорности неравенства

$$x(EF) \leqslant \left\lfloor \frac{k|VK| + |R|}{2} \right\rfloor \tag{6.3}$$

относительно многогранника $P_{k,n}$. Для $k = 2$ этот факт установлен в [1]. Пусть $k \geqslant 3$.

Для произвольного $\overline{x} \in \tau_{k,n}$ имеем

$$\begin{aligned} 2\overline{x}(EF) = 2|E(\overline{x} \cap F)| &= \sum_{u \in VF} d_{\overline{x} \cap F}(u) \\ &= \sum_{u \in VK} d_{\overline{x} \cap F}(u) + \sum_{i=1}^{p} d_{\overline{x} \cap F}(v_i) \leqslant k|VK| + p, \end{aligned}$$

где $\{u_i v_i \mid 1 \leqslant i \leqslant p\} = R$, $u_i \in VK$, $v_i \notin VK$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Разделив обе части неравенства $2\overline{x}(EF) \leqslant k|VK| + p$ на 2 и округлив правую часть до целого, получаем неравенство (6.3). Теперь нужно показать существование такого $\overline{x} \in \tau_{k,n}$, при котором (6.3) обращается в равенство.

Случай 1. $k|VK| \equiv |R| \pmod 2$. Так как $k < |VK|$ и $k < n - |VK|$, то согласно лемме 3.1 можно построить связные графы H_1 и H_2 с множествами вершин VK и $V \setminus VK$ такие, которые реализуют степенные последовательности $d_{H_1} = \{d_{H_1}(u_i)\}$ и $d_{H_2} = \{d_{H_2}(v_i)\}$, где

$$d_{H_1}(u_i) = k - 1 \text{ при } i = 1, \dots, p \text{ и } d_{H_1}(u) = k \text{ при } u \in VK \setminus \{u_1, \dots, u_p\};$$

$$d_{H_2}(v_i) = k - 1 \text{ при } i = 1, \dots, p \text{ и } d_{H_2}(v_i) = k \text{ при } v_i \in (V \setminus VK) \setminus \{v_1, \dots, v_p\}.$$

Правильность этих последовательностей легко проверяется непосредственными вычислениями. Полагая $\overline{x} = H_1 \cup H_2 \cup R$, видим, что $\overline{x} \in \tau_{k,n}$ и

$$|E(\overline{x} \cap F)| = \frac{1}{2}\left(\sum_{u \in VK} d_{\overline{x} \cap F}(u) + \sum_{i=1}^{p} d_{\overline{x} \cap F}(v_i)\right) = \frac{k|VK| + |R|}{2}.$$

Случай 2. $k|VK| \not\equiv |R| \pmod 2$. Если $p < |VK|$, то выберем произвольную вершину $u_0 \in VK \setminus \{u_1, \dots, u_p\}$ и, пользуясь леммой 3.1, построим на VK связную реализацию H_1 последовательности $d_{H_1}(u_i) = k-1$, $0 \leqslant i \leqslant p$, и $d_{H_1}(u) = k$ при $u \in VK \setminus \{u_0, u_1, \dots, u_2\}$. Легко видеть, что эта реализация привильная. Если же $p = |VK|$, то k четно и p нечетно, и в качестве H_1 возьмем связную реализацию правильной последовательности $d_{H_1}(u_i) = k-1$ при $i = 2, 3, \dots, p$, а $d_{H_1}(u_1) = k-2$. При этом положим $u_0 = u_1$.

Рассматривая случаи $p < n - |VK|$ и $p = n - |VK|$ и вновь пользуясь леммой 3.1, на множестве $V \setminus VK$ построим связный граф H_2 с той лишь разницей, что при $p = n - |VK|$ в качестве v_0 возьмем вершину v_2.

Предположим, что $\overline{x} = H_1 \cup H_2 \cup R \cup \{u_0 v_0\}$. Тогда $\overline{x} \in \tau_{k,n}$ и

$$\begin{aligned} |E(\overline{x} \cap F)| &= \frac{1}{2}\left(\sum_{u \in VK} d_{\overline{x}\cap F}(u) + \sum_{i=1}^{p} d_{\overline{x}\cap F}(v_i)\right) \\ &= \frac{1}{2}(k - 1 + k(|VK| - 1) + p) = \frac{1}{2}(k|VK| + p - 1). \end{aligned}$$

Существование $x' \in \tau_{k,n}$ такого, что $|E(x' \cap F)| < \lfloor (k|VK| + |R|)/2 \rfloor$, очевидно. Теорема 6.1 доказана.

Лемма 6.3. *Если неравенство Эдмондса $x(EF) \leqslant r_k(F)$ порождает фасету многогранника $P_{k,n}$, то $k|VK| \not\equiv |R| \pmod 2$.*

Доказательство. Так как $x(EF) \leqslant r_k(F)$ фасетно, то $k < |VK| < n-k$. Следовательно, $r_k(F)$ удовлетворяет теореме 6.1. Пусть некоторый граф $\overline{x} \in \tau_{k,n}$ не содержит ребро $u_1 v_1$. Тогда $d_{\overline{x}\cap F}(v_1) = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} 2\overline{x}(EF) = 2|E(\overline{x} \cap F)| &= \left(\sum_{u \in VK} d_{\overline{x}\cap F}(u) + \sum_{i=2}^{p} d_{\overline{x}\cap F}(v_i)\right) \\ &\leqslant k|VK| + p - 1, \end{aligned}$$

т. е. $\overline{x}(EF) \leqslant k|VK|/2 + (p-1)/2$. Поэтому при $k|VK| \equiv p \pmod 2$ имеем $\overline{x}(EF) < k|VK|/2 + (p-1)/2 \leqslant r_k(F)$. Это означает, что если $\overline{x}(EF) = r_k(F)$ при $k|VK| \equiv p \pmod 2$, то $R \subset E\overline{x}$. Отсюда и из теоремы 3.1 следует, что неравенство $x(EF) \leqslant r_k(F)$ не является фасетным для $P_{k,n}$. Лемма 6.3 доказана.

Лемма 6.4. *Пусть неравенство Эдмондса $x(EF) \leqslant r_k(F)$ порождает фасету многогранника $P_{k,n}$ и $F = K \cup R$. Если $k + 1 = |VK|$ (или $k + 1 = |V \setminus VK|$), то $|VK| - |R| \leqslant 1$ (или $|V \setminus VK| - |R| \leqslant 1$).*

Доказательство. При $k = 2$ и $k = 3$ утверждение очевидно. Поэтому рассмотрим случай, когда $k \geqslant 4$. Предположим, что $|VK| - |R| > 1$. Выберем произвольные вершины $u', u'' \in VK \setminus \{u_1, \dots, u_p\}$, и пусть $\overline{x} \in \tau_{k,n}$ и $u'u'' \notin E\overline{x}$. Покажем, что в этом случае $\overline{x}(EF) < r_k(F)$.

Из условий леммы следует, что $d_{\overline{x}\cap F}(u') \leqslant k-1$ и $d_{\overline{x}\cap F}(u'') \leqslant k-1$. Далее имеем

$$\overline{x}(EF) = |E(\overline{x}\cap F)| = \frac{1}{2}(k(|VK|-2) + 2(k-1) + p)$$
$$= \frac{k|VK|}{2} + \frac{p-2}{2} < r_k(F).$$

Таким образом, если $\overline{x}(EF) = r_k(F)$, то $u'u'' \in E\overline{x}$. Чтобы воспользоваться теоремой 3.2, построим такой граф $\widetilde{x} \in \tau_{k,n}$, что $u'u'' \in E\widetilde{x}$ и $\widetilde{x}(EF) < r_k(F)$.

Пусть $\{u_1, \dots, u_k\} = VK \setminus \{u''\}$, $\{v_1, \dots, v_t\} = V \setminus VK$. Каждую вершину u_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, соединим ребрами с вершинами $v_{(i-1)(k-1)+1}, \dots, v_{i(k-1)}$, полагая $v_{mk+l} = v_l$, где $m = 0, 1, 2, \dots$ и $l = 1, 2, \dots, t$. Это возможно, так как $k-1 < t$. В результате получим некоторый двудольный граф G со степенями

$$\begin{aligned} d_G(u_i) &= k-1 &&\text{при}\quad i = 1, 2, \dots, k,\\ d_G(v_i) &= q &&\text{при}\quad i = 1, 2, \dots, r,\\ d_G(v_i) &= q-1 &&\text{при}\quad i = r+1, \dots, t, \end{aligned}$$

где $q \in \{1, \dots, k\}$ и $r \in \{1, \dots, t-1\}$ — подходящие числа. При этом в силу двудольности графа G справедливо равенство

$$k(k-1) = t(q-1) + r,\ r < t.$$

Теперь рассмотрим степенную последовательность $d_H = \{d_H(v_i)\}_{i=1}^{t}$ такую, что

$$d_H(v_i) = \begin{cases} k-q, & \text{если}\ j = 1, \dots, r,\\ k-q+1, & \text{если}\ j = r+1, \dots, t. \end{cases}$$

Так как $(k-q)r + (k-q+1)(t-r) = kn - 2k^2$ четно, то из леммы 3.1 следует графичность этой последовательности. Пусть H — ее реализация на множестве $V \setminus VK$, и пусть $\widetilde{x} = \delta_K(u'') \cup G \cup H$. Поскольку $u'u'' \in E\widetilde{x}$, остается вычислить $\widetilde{x}(EF)$. Так как $k+1 = |VK|$, то $|R|$ нечетно. Отсюда и из условия $k \geqslant 4$ следует, что

$$\widetilde{x}(EF) = |E(\widetilde{x}\cap K)| + |E\widetilde{x}\cap R| = k + |E\widetilde{x}\cap R| \leqslant k + |R|$$
$$\leqslant 2k+1 \leqslant 2k + \frac{|R|-1}{2} = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{|R|-1}{2} + 2k - \frac{k(k+1)}{2}$$
$$< \frac{k(k+1)}{2} + \frac{|R|-1}{2} = r_k(F).$$

Лемма 6.4 доказана.

Утверждение 6.1. *Пусть $F = K \cup R$ — граф Эдмондса, $3 \leqslant k < |VK| < n-k$ и $k|VK| \not\equiv |R| \pmod 2$. Если $u, u' \in VK$ и $v, v' \in V \setminus VK$, а $uv \in R$, $u'v' \notin R$, то 4-цикл $C = \{u, u', v', v\}$ является kF-допустимым.*

Доказательство. Достаточно построить такой граф $\overline{x} \in \tau_{k,n}$, что C чередуется относительно $\overline{x}$, $\widetilde{x} = \overline{x} \triangle C \in \tau_{k,n}$ и $\overline{x}(EF) = \widetilde{x}(EF) = r_k(F)$.

Так как $uv \in R$, то без уменьшения общности будем считать, что $u = u_1$, $v = v_1$. Пусть H_1 — графическая реализация на множестве вершин VK степенной последовательности

$$d_{H_1}(u_1) = k; \quad d_{H_1}(u_i) = k-1 \text{ для } \ i = 2, 3, \ldots, p;$$

$$d_{H_1}(w) = k \text{ при всех } \ w \in VK \setminus \{u_1, \ldots, u_p\},$$

сумма компонент которой равна $k|VK| - (p-1)$, т. е. четна (см. лемму 3.1). При этом в силу леммы 3.1 будем считать, что число реберной связности графа H_1 равно $k-1 \geqslant 2$. На множестве вершин $V \setminus VK$ построим аналогичный граф H_2, т. е. граф, реализующий последовательность

$$d_{H_2}(v_1) = k; \quad d_{H_2}(u_i) = k-1 \text{ для } \ i = 2, 3, \ldots, p;$$

$$d_{H_2}(w) = k \text{ при всех } \ w \in (V \setminus VK) \setminus \{v_1, \ldots, v_p\}.$$

Число реберной связности графа H_2 также равно $k-1 \geqslant 2$. Так как K и $\overline{K} = (V \setminus VK, (E \setminus EK) \setminus \delta(VK))$ — клики, то можно полагать, что $u_1u' \in EH_1$ и $v_1v' \in EH_2$.

Предположим, что $\overline{x} = H_1 \cup H_2 \cup (R \setminus \{u_1v_1\})$. Очевидно, что C чередуется относительно $\overline{x}$ и $\widetilde{x} = \overline{x} \triangle C$ — связный k-фактор, ибо графы H_1 и H_2 остаются связными после удаления из них ребер u_1u' и v_1v' соответственно. Поскольку $\overline{x}(EF) = \widetilde{x}(EF)$, а

$$\overline{x}(EF) = \frac{1}{2}\sum_{u \in VK} d_{\overline{x} \cap K}(u) + p - 1$$

$$= \frac{k|VK| - (p-1)}{2} + p - 1 = r_k(F),$$

то утверждение 6.1 доказано.

Утверждение 6.2. *Пусть $F = K \cup R$ — граф Эдмондса, $3 \leqslant k < |VK| < n-k$ и $k|VK| \not\equiv |R| \pmod 2$, причем если $k+1 = |VK|$, то $|VK| - |R| \leqslant 1$. Тогда если 4-цикл $C = \{u, u', u'', v\}$ является таким, что $u, u', u'' \in VK$, $v \in V \setminus VK$ и $uv, u''v \notin R$, то C обладает следующими свойствами:*

а) *если $k+1 < |VK|$, то цикл C является kF-допустимым;*

б) *если $k+1 = |VK|$ и $u' \in \{u_1, \ldots, u_p\}$, то цикл C является kF-допустимым.*

Доказательство. а) Пусть $k+1 < |VK|$, и пусть H_1 — связная реализация на множестве вершин VK степенной последовательности

$$\begin{aligned}
d_{H_1}(w) &= k-1 \text{ при } \ w \in \{u_1, \dots, u_p\} \setminus \{u''\}, \\
d_{H_1}(w) &= k \text{ при } \ w \in VK \setminus \{u_1, \dots, u_p, u''\}, \\
d_{H_1}(u'') &= k-1 \text{ при } \ u'' \notin \{u_1, \dots, u_p\}, \\
d_{H_1}(u'') &= k-2 \text{ при } \ u'' \in \{u_1, \dots, u_p\},
\end{aligned}$$

сумма компонент которой равна $k|VK| - p - 1$, т. е. четна. Так как $k+1 < |VK|$, то, пользуясь полнотой клики K, добьемся того, чтобы $uu' \in EH_1$ и $u'u'' \notin EH_1$. (Заметим, что если $k+1 = |VK|$, то при $u' \notin \{u_1, \dots, u_p\}$ имеем $d_{H_1}(u') = k$, т. е. условие $u'u'' \notin EH_1$ невозможно.)

Далее, пусть H_2 — связная реализация на $V \setminus VK$ правильной последовательности

$$\begin{aligned}
d_{H_2}(w) &= k-1 \text{ при } \ w \in \{v_1, \dots, v_p\} \setminus \{v\}, \\
d_{H_2}(w) &= k \text{ при } \ w \in (V \setminus VK) \setminus \{v_1, \dots, v_p, v\}, \\
d_{H_2}(v) &= k-1 \text{ при } \ v \notin \{v_1, \dots, v_p\}, \\
d_{H_2}(v) &= k-2 \text{ при } \ v \in \{v_1, \dots, v_p\}.
\end{aligned}$$

Будем предполагать, что числа реберной связности графов H_1 и H_2 равны минимальным степеням этих графов (см. лемму 3.1).

Положим $\overline{x} = H_1 \cup H_2 \cup R \cup \{u''v\}$. Очевидно, что 4-цикл C чередуется относительно $\overline{x}$ и для $\widetilde{x} = \overline{x} \triangle C$ имеет место соотношение

$$\overline{x}(EF) = \widetilde{x}(EF) = |EH_1| + |R| = \frac{k|VK| - p - 1}{2} + p = r_k(F).$$

Покажем, что k-фактор $\widetilde{x}$ связен. Если $u'' \notin \{u_1, \dots, u_p\}$, то число реберной связности графа H_1 можно взять равным $k - 1 \geqslant 2$. В этом случае граф $H_1 \setminus \{uu'\}$ связен, а следовательно, связен и $\widetilde{x}$. Пусть $u'' \in \{u_1, \dots, u_p\}$. Предположим, что после удаления из H_1 ребра uu' полученный граф разбивается на компоненты H_{11} и H_{12}. Будем считать, что $u \in VH_{11}$ и $u' \in VH_{12}$. Если $u'' \in VH_{11}$, то, очевидно, граф $(H_1 \setminus \{uu'\}) \cup \{u'u''\}$ связен, а следовательно, связен и $\widetilde{x}$. Если же $u'' \in VH_{12}$, то вершина u'' смежна (в графах $\overline{x}$ и $\widetilde{x}$) с некоторой вершиной из H_2, так как $u'' \in \{u_1, \dots, u_p\}$ и $R \subset E\overline{x}$. Поскольку H_2 связен и $uv \in E\widetilde{x}$, то в графе $\widetilde{x}$ между компонентами H_{11} и H_{12} существует путь, проходящий через H_2. Таким образом, и в этом случае граф $\widetilde{x}$ связен. Утверждение а) доказано.

б) Пусть $k+1 = |VK|$. В этом случае либо $p = |VK|$, либо $p = k$. Кроме того, из отношения $k|VK| \not\equiv p \pmod 2$ следует, что p нечетно. Значит, $p = |VK|$ при четном k и $p = k$ при нечетном k. Если k четно, то $u' \in \{u_1, \dots, u_p\}$ и доказательство kF-допустимости цикла C полностью совпадает с доказательством из а).

Пусть k нечетно и $VK = \{u_1 \dots, u_p, u_{p+1}\}$. По условию $u' \neq u_{p+1}$. Будем считать, что если $\{u, u''\} \cap \{u_{p+1}\} \neq \varnothing$, то $u'' = u_{p+1}$. На множестве VK построим связный граф H_1, реализующий одну из следующих правильных последовательностей:

— если $u'' = u_{p+1}$, то $d_{H_1}(u_i) = k - 1$ при $i = 1, \dots, p+1$;

— если $u'' \neq u_{p+1}$, то $d_{H_1}(u'') = k - 2$, $d_{H_1}(u_{p+1}) = k$ и $d_{H_1}(w) = k - 1$ при $w \in \{u_1, \dots, u_p\} \setminus \{u''\}$. При этом можно потребовать, чтобы $uu' \in EH_1$ и $u'u'' \notin EH_1$.

На множестве вершин $V \setminus VK$ возьмем граф H_2, рассмотренный в случае а). Положим $\overline{x} = H_1 \cup H_2 \cup R \cup \{u''v\}$. Цикл C чередуется относительно $\overline{x}$. Повторив рассуждения из а), легко доказать, что граф $\widetilde{x} = \overline{x} \triangle C$ связен. Наконец, имеем

$$\overline{x}(EF) = \widetilde{x}(EF) = \frac{(k+1)(k-1)}{2} + p = \frac{k(k+1)}{2} - \frac{p-1}{2} = r_k(F).$$

Утверждение 6.2 доказано.

Пользуясь утверждением 6.2, а также леммами 6.1 и 6.4, легко убедиться в справедливости следующего утверждения, которым мы воспользуемся при доказательстве критерия фасетности неравенства Эдмондса.

Следствие 6.1. *Пусть $F = K \cup R$ — граф Эдмондса, $3 \leqslant k < |VK| < n - k$, $k|VK| \not\equiv |R| \pmod 2$, причем если $k + 1 = |V \setminus VK|$, то $|V \setminus VK| - |R| \leqslant 1$. Тогда если 4-цикл $C = \{u, v, v', v''\}$ является таким, что $u \in VK$, $v, v', v'' \in V \setminus VK$, $uv, uv'' \notin R$, то C обладает следующими свойствами:*

а) *если $k + 1 < |V \setminus VK|$, то цикл C является kF-допустимым;*

б) *если $k + 1 = |V \setminus VK|$ и $v' \in \{v_1, \dots, v_p\}$, то цикл C является kF-допустимым.*

Теорема 6.2. *Пусть $F = K \cup R$, тогда неравенство Эдмондса $x(EF) \leqslant r_k(F)$ порождает фасету многогранника $P_{k,n}$ тогда и только тогда, когда $k|VK| \not\equiv |R| \pmod 2$ и $k < |VK| < n - k$, причем если $k+1 = |VK|$ (или $k + 1 = |V \setminus VK|$), то $|VK| - |R| \leqslant 1$ (или $|V \setminus VK| - |R| \leqslant 1$).*

Доказательство. При $k = 2$ эта теорема доказана в [1].

Необходимость условий при $k \geqslant 3$ следует из лемм 6.2–6.4.

Для доказательства достаточности при $k \geqslant 3$ воспользуемся теоремой 3.4., утверждениями 6.1 и 6.2, а также следствием 6.1. Для вершин графа K_n будем использовать следующие обозначения: $VK = VK_u = \{u_1, u_2, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_t\}$, $V \setminus VK = \{v_1, v_2, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_q\}$, $t + q =$

n, $1 \leqslant i \leqslant p$. В качестве $\widetilde{E}$ возьмем следующее множество ребер:

$$\widetilde{E} = \delta_K(u_1) \cup \delta_{\overline{K}}(v_1) \cup \{u_1v_1, u_2u_3, v_2v_3\},$$

где $\overline{K}$ — клика на множестве вершин $V \setminus VK$. Нужно показать, что каждое ребро графа K_n является концом некоторой kF-допустимой $\widetilde{E}$-последовательности и что $\det D(F, \widetilde{E}) \neq 0$. Выпишем порядок построения ребер графа K_n.

Каждое ребро u_iv_j, $i \geqslant 2$ и $j \geqslant 2$, не лежащее в $R = \{u_iv_i \mid 1 \leqslant i \leqslant p\}$, принадлежит kF-допустимому 4-циклу $\{u_iv_j, u_iu_1, u_1v_1, v_1v_j\}$ (см. утверждение 6.1). Далее, как и при доказательстве теоремы 5.2, выпишем таблицу, в левой колонке которой указаны ребра, а в правой — содержащие их kF-допустимые 4-циклы:

$$\begin{aligned}
u_1v_2 &- \{u_1v_2, u_1u_2, u_2u_3, u_3v_2\} \text{ (утв. 6.2);}\\
u_1v_j,\ j \geqslant 3, &- \{u_1v_j, u_1u_3, u_3u_2, u_2v_j\} \text{ (утв. 6.2);}\\
v_1u_2 &- \{v_1u_2, v_1v_2, v_2v_3, v_3u_2\} \text{ (следствие 6.1);}\\
v_1u_j,\ j \geqslant 3, &- \{v_1u_j, v_1v_3, v_3v_2, v_2u_j\} \text{ (следствие 6.1);}\\
u_iu_j,\ 2 \leqslant i < j \leqslant t, &- \{u_iu_j, u_iu_1, u_1v_2, v_2u_j\} \text{ (утв. 6.2);}\\
v_iv_j,\ 2 \leqslant i < j \leqslant q, &- \{v_iv_j, v_iv_1, v_1u_2, u_2v_j\} \text{ (следствие 6.1);}\\
u_2v_2 &- \{u_2v_2, u_2u_1, u_1v_3, v_3v_2\} \text{ (утв. 6.1);}\\
u_iv_i, 3 \leqslant i \leqslant p, &- \{u_iv_i, u_iu_2, u_2v_1, v_1v_i\} \text{ (утв. 6.1).}
\end{aligned}$$

Нетрудно проследить, что при использовании 4-циклов из утверждения 6.2 достаточное условие их kF-допустимости в случаях $k+1 = |VK|$ или $k + 1 = |V \setminus VK|$ соблюдалось.

Столбцы матрицы $D(F, \widetilde{E})$, соответствующие вершинам, отличным от u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 и v_3, содержат по одной единице. Раскрывая $\det D(F, \widetilde{E})$ по этим столбцам, получаем, что по абсолютной величине он равен 2. Таким образом, матрица $D(F, \widetilde{E})$ имеет полный ранг. Теорема 6.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Grötschel M., Padberg M. W.** On the symmetric travelling salesman problem I: inequalities; II: lifting theorems and facets // Math. Programming. 1979. V. 16, N 2. P. 265–302.
2. **Grötschel M., Pulleyblank W. R.** Clique tree inequalities and the symmetric travelling salesman problem // Math. Operations Research. 1986. V. 11, N 4. P. 537–569.

3. **Fleischmann B.** A new class of cutting planes for the symmetric travelling salesman problem // Math. Programming. 1988. V. 40, N 3. P. 225–246.
4. **Edmonds J., Johnson E. L.** Matching: a well-solved class of integer linear programs // Combinatorial Structures and Their Applications. // New York: Gordon and Breach, 1970. P. 89–92.
5. **Схрейвер А.** Теория линейного и целочисленного программирования: В 2-х томах. М.: Мир, 1991.
6. **Емеличев В. А., Мельников О. Л., Сарванов В. Л., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.

Адрес автора:

Россия,
644077 Омск,
пр. Мира, 55а,
Омский
государственный
университет, мат. фак.
E-mail: siman@univer.omsk.ru

Статья поступила
16 марта 1995 г.,
переработанный вариант —
23 июня 1996 г.