ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1996. Том 3, № 4, 3–27

УДК 519.1

РАСКРАСКИ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ*)

О. В. Бородин

Статья представляет собой обзор результатов автора по указанной тематике с 1984 по 1993 г. Большая часть излагаемого материала касается локального строения и раскрасок плоских графов. Подробно описывается строение окрестности ребра и грани в плоских графах и прослеживаются связи этих результатов с задачами совместной, цикловой и предписанной раскрасок. Приводится ряд результатов о представлениях и раскрасках графов на поверхностях. Библиография не претендует на полноту.

Введение

Проблема строения плоских графов привлекает внимание математиков с открытия Л. Эйлером знаменитой формулы $B - P + \Gamma = 2$ для многогранников. Согласно теореме Штейница [86] эйлеровы (т. е. конечные выпуклые в R^n) многогранники взаимно-однозначно соответствуют 3-связным плоским графам. Уже А. Лежандру было известно (см. [72, с. 27]) о существовании в любом многограннике вершины степени не более 5 и грани ранга не более 5, т. е. грани не более чем с пятью сторонами, а также либо вершины степени 3, либо грани ранга 3. В изучении строения плоских графов общего вида важную роль сыграла теория эйлеровых вкладов, предложенная А. Лебегом [72]. При всей универсальности и простоте этот подход не обеспечивает достаточной разрешающей способности. С помощью этого метода нетрудно получить приближенные оценки, но, как правило, не удается извлечь точной информации о структуре графа. Например, более тонкие соображения были использованы А. Коцигом [67] при доказательстве теоремы о том, что в любом многограннике имеется ребро веса не более 13 (оценка точна; вес ребра есть сумма степеней его концевых вершин). Вместе с тем длительное время многие естественные вопросы о строении плоских графов,

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01614).

поставленные А. Лебегом [72], А. Коцигом [67], Е. Юцовичем [63], Б. Грюнбаумом [51] и др., оставались открытыми. Лишь в последние годы удалось значительно продвинуться в изучении строения плоских графов общего вида.

Ниже мы приведем результаты о строении окрестности ребра и грани, отметив лишь, что важным мотивом в этом исследовании были обнаруженные связи с задачами раскраски (смешанной и цикловой), что позволило подойти с единых позиций к решению названных задач.

Большое число работ было посвящено изучению плоских графов специального вида, именно класса T_5 плоских триангуляций с минимальной степенью 5. Такие графы являются объектом исследования в известной задаче о четырех красках. Полученное К. Аппелем и У. Хакеном в 1976 г. (см. [20]) решение состояло в построении так называемой неизбежной системы из почти полутора тысяч сводимых конфигураций. Другими словами, был установлен такой набор структурных фрагментов, что в любой триангуляции встречается хотя бы один из них и в то же время ни один из этих фрагментов не может содержаться в минимальном контрпримере к теореме о четырех красках. Важным промежуточным этапом в этих исследованиях стала теорема Лебега, описывающая в T_5 строение окрестностей вершин степени 5. В этом описании связь с 4-раскраской была еще слабой, многие конфигурации не являлись сводимыми. Позднее Х. Хееш [55] предложил методику погружения имеющейся системы конфигураций в более мощные системы путем последовательной замены конфигураций, оказавшихся несводимыми, на серии объемлющих конфигураций, имеющих большие шансы оказаться сводимыми. В итоге программа Х. Хееша была реализована К. Аппелем и У. Хакеном в результате больших вычислений вручную и широкого применения ЭВМ.

Таким образом, структурные результаты применялись и ранее в задачах о раскраске. Приводимые ниже результаты возникли вследствие естественного развития структурной теории плоских графов.

§ 1. Строение плоских графов

1.1. Инцидентность младших вершин и младших граней. Карту на поверхности будем называть *нормальной*, если ранги всех граней и степени всех вершин не меньше трех, а под *рангом грани* понимается число инцидентных ей граней. Вершину степени k и грань ранга k часто называют *k-вершиной* и *k-гранью*. Степень вершины v обозначают через $s(v)$.

А. Лебег [72] показал, что любая плоская нормальная карта содержит либо 3-вершину, либо 4-вершину, инцидентную 3-грани (треугольнику), либо 5-вершину, инцидентную четырем 3-граням. Более общий факт устанавливает следующая симметричная по отношению к вершинно-граневой двойственности

Теорема 1.1 [10]. *В плоской нормальной карте имеется по крайней мере одна из следующих конфигураций:*

— *5-вершина, инцидентная четырем 3-граням;*

— *4-вершина, инцидентная 3-грани;*

— *3-вершина, инцидентная 3- или 4-грани;*

— *5-грань, инцидентная четырем 3-вершинам.*

1.2. Теоремы о строении окрестности ребра. А. Коциг [67] доказал, что в любом многограннике имеется ребро веса не более 13. Эта оценка достижима, например, в графе, полученном с применением операции подразбиения грани к икосаэдру. Некоторое время оставался открытым вопрос П. Эрдеша о возможности распространения этого утверждения на все плоские графы G с минимальной степенью $\delta(G)$ не меньше трех. Утвердительный ответ был получен автором [27].

Приведем верхние оценки минимального веса ребра в плоских графах из некоторых классов.

Пример полного двудольного графа $K_{2,n}$ показывает, что в классе графов минимальной степени 2 минимальный вес ребра не ограничен сверху. Укажем два случая (теоремы 1.2 и 1.3), в которых верхняя оценка такого веса существует, несмотря на присутствие 2-вершин.

• *k-Пучком* называется подграф на $k+2$ вершинах, в котором выделены две вершины, а остальные вершины смежны только с выделенными.

Минимальный вес ребра в графе G обозначим через $w(G)$.

Теорема 1.2 [4]. *Если в плоском графе G с $\delta(G) \geqslant 2$ нет k-пучков, $k \geqslant 2$, то $w(G) \leqslant 5k+7$, причем оценка достижима.*

• Цикл $[v_1, v_2 \dots v_{2k}]$ называется *t-чередующимся*, если степени вершин $v_1, v_3, \dots, v_{2k-1}$ одинаковы и равны t.

Ясно, что 2-пучок есть частный случай 2-чередующегося цикла.

Теорема 1.3 [27]. *Если в плоском графе G с $\delta(G) \geqslant 2$ нет 2-чередующихся циклов, то $w(G) \leqslant 15$, причем оценка достижима.*

А. Коциг [67] доказал, что если $\delta(G) \geqslant 4$ для плоского графа G, то $w(G) \leqslant 11$ и существует такой граф G', что $w(G') = 11$. Оказывается, что это утверждение остается справедливым и в более широком классе графов, как показывает следующая

Теорема 1.4 [27]. *Если в плоском графе G $\delta(G) \geqslant 3$ нет 3-чередующихся 4-циклов, то $w(G) \leqslant 11$.*

В следующих теоремах оценивается минимальный вес таких ребер в плоских графах, которые инцидентны *малой грани* (т. е. грани ранга не более 5), что имеет принципиальное значение для задач раскраски (см. § 2).

• Ребро называется *полуутопленным* или *утопленным*, если оно инцидентно хотя бы одной или двум малым граням соответственно.

• Вершина называется *полуутопленной* или *утопленной*, если таковыми являются все инцидентные ей ребра.

Дальнейшим обобщением теоремы 1.4 является

Теорема 1.5 [42]. *Пусть в плоском графе G с $\delta(G) \geqslant 2$ отсутствуют*

— утопленные 2-вершины;

— полуутопленные 2-вершины, инцидентные 6-граням;

— 2-вершины, смежные с младшими вершинами;

— 4-цикл $[v_1v_2v_3v_4]$, в котором каждая из вершин v_1 и v_3 является либо утопленной 2-вершиной, либо полуутопленной 3-вершиной.

Тогда в графе G есть полуутопленное ребро веса не более 11.

А. Лебег [72] уточнил тот известный факт, что в плоском графе G с $\delta(G) \geqslant 3$ есть малая грань, т. е. в графе G имеется грань одного из следующих типов:

— 3-грань, инцидентная ребру, степени концевых вершин которого мажорируются одной из пар $(3,\infty)$, $(4,11)$ и $(5,7)$;

— 4-грань, инцидентная ребру типа $(3,5)$;

— 5-грань, инцидентная $(3,3)$-ребру.

(Запись $(3,\infty)$ означает, что степень одной концевой вершины ребра равна трем, а степень другой концевой вершины этого же ребра может быть сколь угодно большой.)

Заметим, что из приведенного утверждения не следует ограниченности w, доказанной А. Коцигом в [67].

Принципиальная возможность объединения результатов Лебега и Коцига доказана автором в [25]. В этом направлении нами доказана следующая

Теорема 1.6 [8]. *В любом плоском графе G с $\delta(G) \geqslant 3$ имеется по крайней мере одна из следующих граней:*

— 3-грань, инцидентная ребру, мажорируемому одной из пар $(3,10)$, $(4,7)$ и $(5,6)$;

— 4-грань, инцидентная $(3,5)$-ребру;

— 5-грань, инцидентная $(3,3)$-ребру.

Все пять мажорирующих пар достижимы, причем независимо друг от друга.

«Достижимость» означает, что в теореме 1.6 ни один из числовых параметров не допускает уменьшения (в силу имеющихся экстремальных графов). Под «независимой достижимостью» понимаем следующее: для любой из перечисленных пяти пар чисел найдется такой плоский граф, в котором никакое ребро не мажорируется остальными четырьмя парами либо не инцидентно соответствующей младшей грани.

• Ребро в графе G называется *слабым* (*полуслабым*), если оно инцидентно двум (хотя бы одной) 3-граням.

Минимальный вес слабых (полуслабых) ребер в графе G обозначается через $w^{**}(G)$ ($w^*(G)$).

Следующий факт был известен еще А. Лебегу (см. [72]): при $\delta(G) \geqslant 3$ из условия $w^*(G) = \infty$ следует достижимая оценка $w(G) \leqslant 8$. В [44] нами доказано следующее усиление теоремы Коцига [67]. Пусть G — плоский граф такой, что $\delta(G) \geqslant 3$. Тогда справедливо по крайней мере одно из следующих неравенств:

$$w^{**}(G) \leqslant 13, \; w^*(G) \leqslant 12, \; w(G) \leqslant 11.$$

Более точный результат в этом направлении доставляет

Теорема 1.7 [35]. *Для любой плоской нормальной карты G справедливо по крайней мере одно из неравенств*

$$w^{**}(G) \leqslant 13, \; w^*(G) \leqslant 10, \; w(G) \leqslant 8,$$

причем все границы достижимы на различных графах.

Граф G с параметрами $w(G) = w^*(G) = w^{**}(G) = 13$ и граф G' с параметрами $w(G) = 8$, $w^*(G) = w^{**}(G) = \infty$ были известны еще А. Коцигу [67]. Эти графы являются полуправильными многогранниками. Граф G с параметрами $w^{**}(G) = 14$, $w^*(G) = 10$ и $w(G) = 9$ предложен в [35].

В сформулированных теоремах 1.8–1.10 результаты являются неулучшаемыми. Заметим, что верхние оценки для веса $w^*(G)$ полуслабых ребер в G зависят от ограничений на окрестности слабых ребер.

Теорема 1.8 [13]. *Пусть G — плоская нормальная карта такая, что $w^{**}(G) = \infty$, т. е. в G нет слабых ребер. Тогда имеет место по крайней мере одно из неравенств*

$$w^*(G) \leqslant 9, \; w(G) \leqslant 8.$$

Для доказательства достижимости первой оценки построен граф G с параметрами $w^{**}(G) = \infty$ и $w^*(G) = w(G) = 9$, а достижимость второй

оценки следует из приведенного выше графа G с параметрами $w^{**}(G) = w^*(G) = \infty$ и $w(G) = 8$. Легко видеть, что оценки могут достигаться на различных графах.

Теорема 1.9 [40]. *Если в плоской нормальной карте G границы 3-граней попарно не пересекаются, то $w(G) \leqslant 8$.*

Оценка из теоремы 1.9 неулучшаема ввиду построенного в [40] графа с параметрами $w^{**}(G) = \infty$ и $w^*(G) = w(G) = 9$, в котором границы любых двух 3-граней имеют не более одной общей вершины.

Оценку $w(G) \leqslant 11$ доказали П. Вернике [88] для графа G с $\delta(G) = 5$, а А. Коциг [67] — для графа G с $\delta(G) \geqslant 4$. О. Оре установил [73], что $w^{**}(G) \leqslant 12$, если $\delta(G) = 5$. Оказывается, что для графа G при $\delta(G) = 5$ имеет место более точная оценка $w^{**}(G) \leqslant 11$, а при $\delta(G) \geqslant 4$ либо $w^{**}(G) \leqslant 11$, либо $w^*(G) \leqslant 9$, причем все три выписанные оценки достижимы. Эти утверждения вытекают из теоремы 1.10 (см. ниже).

• Ребро $e = (x, y)$, где $s(x) \leqslant s(y)$, называется *ребром типа* (a, b), если $s(x) \leqslant a$, $s(y) \leqslant b$.

Теорема 1.10 [11]. *В любой плоской нормальной карте имеется по крайней мере одно*

(K1) *слабое ребро типа* $(3, 10)$ *или* $(4, 7)$, *или* $(5, 6)$;

(K1) *полуслабое ребро типа* $(3, 8)$ *или* $(4, 5)$;

(K4) *ребро типа* $(3, 5)$, *инцидентное* 4-*грани*;

(K3) *ребро типа* $(3, 3)$, *инцидентное* 5-*грани*.

Каждый случай реализуется независимо от остальных с наибольшим значением параметра.

Ввиду имеющихся в [11] примеров результат теоремы 1.10 неулучшаем. Так, можно указать плоский граф, в котором каждое ребро инцидентно вершине степени 10, а значит, нет ребер типов (K2)–(K4).

• 5-Вершина, инцидентная четырем 3-граням, называется *мягкой*.

• 5-Грань, инцидентная четырем 3-вершинам, называется *мягкой*.

Теорема 1.10 доказана в более сильной форме, именно утверждается, что слабое ребро типа (5,6) инцидентно мягкой вершине, и вместо (3,3)-ребра, инцидентного 5-грани, имеется мягкая 5-грань. Понятия мягкой 5-вершины и 5-грани неявно присутствуют в формулировке теоремы 1.1, обобщением которой являются теорема 1.10, а также последующие теоремы 1.11 и 1.12.

Из теоремы 1.10 можно получить характеризацию строения окрестности ребра в эйлеровых многогранниках, поскольку последние являются частными случаями плоских нормальных карт, а графы, на которых достигаются границы из теоремы 1.10, представляют собой многогранники.

В следующей теореме описан класс плоских графов, устроенных подобно эйлеровым многогранникам.

Теорема 1.11 [11]. *Пусть в плоском графе G отсутствуют*

— вершины степени меньше двух;

— 2-вершины, смежные с младшими вершинами;

— 2-вершины, инцидентные 3- или 4-грани и смежные при этом с вершиной степени не больше 11;

— k-грани ($k = 5$ или $k = 6$), инцидентные более чем $k - 5$ 2-вершинам, которым принадлежат грани ранга не более 4.

Пусть, кроме того, каждая 2-вершина инцидентна грани ранга не менее 5. Тогда в G содержится одна из конфигураций (K1)–(K4) теоремы 1.10. При этом ни одно из перечисленных условий нельзя ослабить.

Сформулирем еще одно уточнение теоремы 1.1, которое представляет самостоятельный интерес и используется при раскраске графов. В приводимом ниже результате акцент ставится на окрестность 5-вершины, инцидентной ребру типа (5,6).

Теорема 1.12 [13]. *В плоской нормальной карте содержится по крайней мере одна из следующих конфигураций:*

— слабое ребро типа $(5,6)$, где 5-вершина является мягкой и инцидентна либо пяти 3-граням, либо 4-грани, либо такой 5-грани, которая смежна с пятью 3-гранями;

— слабое ребро типа $(4,7)$;

— полуслабое ребро типа $(4,5)$;

— ребро типа $(3,5)$, инцидентное 4-грани;

— 3-вершина, инцидентная 3- или 4-грани;

— мягкая 5-грань,

причем для каждой конфигурации имеется граф, в котором присутствует только эта конфигурация с наибольшими значениями параметров.

В заключение настоящего пункта упомянем об одной нерешенной задаче, относящейся к строению окрестностей ребра в плоском графе. А. Лебег [72] предложил характеризовать каждое ребро при помощи набора рангов инцидентных ему граней и степеней вершин, расположенных по порядку неубывания. Он доказал, что в каждой нормальной карте имеется ребро, характеристика которого мажорируется одной из четверок

$$(3,3,3,\infty), (3,3,4,11), (3,3,5,7), (3,4,4,5).$$

Ввиду теорем 1.8 и 1.10, можно предположить, что это утверждение допускает усиление, т. е. вместо выписанных четверок можно взять

следующие:

$$(3,3,3,10),(3,3,4,7),(3,3,5,6),(3,4,4,5).$$

Однако имеющиеся примеры графов показывают, что нельзя доказать результат лучше, чем следующий.

Предположение. Каждая нормальная карта содержит ребро, мажорируемое одной из четверок

$$(3,3,3,\infty),(3,3,4,8),(3,3,5,6),(3,4,4,5).$$

Например, у n-пирамиды каждое ребро имеет вид (3,3,3,n). Есть нормальная карта, в которой каждое ребро имеет вид (3,3,5,8) либо (3,4,4,6), т. е. при данном предположении вторую четверку также нельзя улучшить.

Заметим, что ребра вида (3,3,4,8) являются аналогом слабых ребер типа (4,8). В настоящий момент предположение подтверждено не для всех плоских графов.

1.3. Отделимость цикла в плоском графе. Усиливая результат А. Лебега [72], А. Коциг [68] доказал, что в любой плоской триангуляции G с $\delta(G) = 5$ минимальный вес грани, обозначаемый через $w^{\Delta}(G)$, не превосходит 18, и предположил, что среди таких триангуляций имеется триангуляция G' с $w^{\Delta}(G') = 17$. С другой стороны, Б. Грюнбаум [50] предположил, что *циклическая связность* (наименьшее число ребер, удаление которых приводит к появлению не менее двух компонент, содержащих по крайней мере по одному циклу) плоского графа G с $\delta(G) = 5$ не превосходит 11. Верхнюю оценку для циклической связности, равную 13, получил М. Пламмер [75]. Положительный ответ на гипотезы А. Коцига и Б. Грюнбаума вытекает из следующего утверждения.

Теорема 1.13 [6]. *В любой плоской нормальной карте G с $\Delta(G) = 5$ есть 3-грань веса не более 17. Среди таких карт есть карта, в которой присутствует 3-грань веса 17.*

Ясно, что граница 3-грани веса не более 17 отделяется от остальной части графа не более чем 11 ребрами. В то же время нетрудно показать, что в плоском графе G с $\Delta(G) = 5$ имеется не менее 20 треугольников, тогда как к выбранному треугольнику примыкает не более 11 треугольников.

Если на плоскости взять цикл длины n, внутри и снаружи цикла добавить по одной вершине и добавленные вершины соединить со всеми вершинами цикла, то получится плоский граф G с $\delta(G) < 5$ такой, что $w^{\Delta}(G)$ возрастает с ростом n. Вместе с тем оказывается, что в классе триангуляций G без 4-вершин $w^{\Delta}(G)$ является ограниченным. А. Коциг

[69] доказал, что если G — плоския триангуляция без петель и кратных ребер такая, что в G нет 4-вершин, то $w^{\Delta}(G) \leqslant 39$, а если нет ни 4-вершин, ни 5-вершин, то $w^{\Delta}(G) \leqslant 34$. Он предположил, что в обоих случаях $w^{\Delta}(G) \leqslant 29$. Отметим, что в отличие от теоремы 1.13 запрет на петли и кратные ребра необходим в силу тривиальных контрпримеров. Менее очевидные конструкции показывают, что при наличии нетреугольных граней и отсутствии петель, кратных ребер и 4-вершин минимальный вес грани может быть сколь угодно большим. Таким образом, посылку следующей теоремы нельзя ослабить, а ее заключение — усилить.

Теорема 1.14 [9]. *Если в плоской триангуляции без петель и кратных ребер нет 4-вершин, то $w^{\Delta}(G) \leqslant 29$, причем для триангуляции G', полученной из икосаэдра путем двукратного подразбиения граней,*

$$w^{\Delta}(G') = 3 + 2(3 + 2 \cdot 5) = 29.$$

Следующая теорема может быть использована при характеризации окрестностей грани в плоских графах.

Теорема 1.15 [43]. *В любой плоской триангуляции без петель, кратных ребер и 4-вершин имеется либо грань веса не более 29, инцидентная 3-вершине, либо грань веса не более 17.*

При раскраске плоских графов важным является понятие *цикловой степени* $c(v)$ вершины v, определяемое как число вершин, инцидентных тем же граням, что и вершина v. Например, теорему 1.13 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1.13* [6]. *Если в плоском графе G с $\Delta(G) \geqslant 3$ нет 3-граней и 4-граней, то в G имеется 3-вершина v такая, что $c(v) \leqslant 11$.*

Используя результат А. Лебега [71], М. Пламмер и Б. Тофт [76] доказали, что в многограннике с *максимальным рангом грани* P существует младшая вершина v с $c(v) \leqslant P + 9$ при $P \geqslant 3$ и даже $c(v) \leqslant P + 3$ при $P \geqslant 42$. Заметим, что в P-призме каждая вершина v инцидентна P-грани и двум 4-граням, откуда $c(v) = P - 2 + 4 - 2 + 4 - 2 = P + 2$. Нами получено следующее усиление этого результата.

Теорема 1.16 [13]. *В любом эйлеровом многограннике имеется младшая вершина v такая, что $c(v) \leqslant 20$ при $P \leqslant 16$; $c(v) \leqslant P + 4$ при $16 < P \leqslant 19$; $c(v) \leqslant P + 3$ при $19 < P \leqslant 23$ и $c(v) \leqslant P + 2$ при $P \geqslant 24$, причем оценка $c(v) \leqslant P + 2$ достижима при любом $P \geqslant 3$.*

1.4. Нижние оценки для числа легких ребер и граней. Обозначим через $e_{i,j}(G)$ число ребер в графе G, каждое из которых соединяет i-вершину с j-вершиной. Далее, пусть $f_{i,j,k}(G)$ — число 3-граней в графе

G, каждой из которых инцидентна i-вершина, j-вершина и k-вершина. Известно, что если в плоском графе G минимальный вес ребра или минимальный вес треугольника ограничен сверху числом U, то в G имеется довольно много ребер или треугольников веса не более U (называемых далее *легкими*). Для многогранников G с $\Delta(G) = 5$ П. Вернике [87] доказал, что $e_{5,5}(G) + e_{5,6}(G) > 0$, а Б. Грюнбаум [49] установил, что из условия $e_{5,5}(G) = 0$ следует неравенство $e_{5,6}(G) > 60$, и предположил, что $2e_{5,5}(G) + e_{5,6}(G) \geqslant 60$. Однако это предположение было опровергнуто С. Фиском [52, с.131], для любого такого графа G в [52] установлена более слабая оценка $4e_{5,5}(G)+e_{5,6}(G) \geqslant 60$. Автором доказана следующая

Теорема 1.17 [33]. *Для любой плоской нормальной карты G с $\Delta(G) = 5$ выполняются неравенства*

$$(18/7)e_{5,5}(G) + e_{5,6}(G) \geqslant 60,$$
$$2e_{5,5}(G) + e_{5,6} + (2/7)e_{5,7}(G) \geqslant 60,$$

причем все коэффициенты, кроме, быть может, первого, в первом неравенстве являются достижимыми.

Б. Грюнбаум [51] предположил, что оценка $\sum\limits_{i+j\leqslant 13} e_{i,j}(G) > 0$ из [66] для веса ребра в многограннике G допускает следующее усиление:

$$\sum_{i+j\leqslant 13} a_{i,j}(G)e_{i,j}(G) \geqslant 120.$$

Автором установлена

Теорема 1.18 [38]. *Для любой плоской нормальной карты G справедлива оценка*

$$\begin{aligned}40e_{3,3}(G) + 25e_{3,4}(G) + 16e_{3,5}(G) + 10e_{3,6}(G) + (20/3)e_{3,7}(G) + 5e_{3,8}(G)\\ + (5/2)e_{3,9}(G) + 2e_{3,10}(G) + (50/3)e_{4,4}(G) + 11e_{4,5}(G) + 5e_{4,6}(G)\\ + (5/3)e_{4,7}(G) + (16/3)e_{5,5}(G) + 2e_{5,6} \geqslant 120,\end{aligned}$$

причем каждый коэффициент является достижимым.

Здесь «достижимость» понимается в том смысле, что если уменьшить любой коэффициент в теореме 1.18 на сколь угодно малую величину, то можно указать граф, для которого так усиленное неравенство уже не выполняется.

Для плоских триангуляций G с $\delta(G) = 5$ К. Аппель и У. Хакен в [20] доказали оценку

$$e_{5,5}(G) + f_{5,5,6}(G) > 0,$$

а А. Лебег [71] установил следующую оценку:

$$f_{5,5,5}(G) + (2/3)f_{5,5,6}(G) + (3/7)f_{5,5,7}(G) + (1/4)f_{5,5,8}(G) + (1/9)f_{5,5,9}(G) + (1/3)f_{5,6,6}(G) + (2/21)f_{5,6,7}(G) \geqslant 20.$$

Теорему 1.13 можно записать так: какова бы ни была плоская нормальная карта G с $\Delta(G) = 5$, имеет место неравенство

$$f_{5,5,5}(G) + f_{5,5,6}(G) + f_{5,5,7}(G) + f_{5,6,6}(G) > 0.$$

Приведенные в [33] конструкции показывают, что в последнем неравенстве ни один член не является лишним. В частности, триангуляция G с параметрами $f_{5,5,5}(G) = f_{5,5,6}(G) = f_{5,6,6}(G) = 0$ показывает неулучшаемость теоремы Франклина [48] о существовании 5-вершины, смежной по меньшей мере с двумя вершинами степени не более шести (в [89] теорема Франклина ошибочно приведена в усиленном виде:

$$f_{5,5,5}(G) + f_{5,5,6}(G) + f_{5,5,6}(G) > 0,$$

что противоречит только что упомянутой конструкции).

Следующая теорема является итоговой в этом направлении.

Теорема 1.19 [31]. *Для любой плоской нормальной карты G с $\Delta(G) = 5$ справедливо неравенство*

$$18f_{5,5,5}(G) + 9f_{5,5,6}(G) + 5f_{5,5,7}(G) + 4f_{5,6,6}(G) \geqslant 144,$$

причем каждый коэффициент, кроме, быть может, третьего, является наилучшим из возможных.

1.5. Грани малого ранга при попарной несмежности треугольников. Рассмотрим плоские нормальные карты, в которых никакие две 3-грани не имеют общего граничного ребра. Оказывается, что в них существуют нетреугольные грани с ограниченным сверху рангом. Данное обстоятельство интересно также в связи с приложениями к задаче о трех красках (см. § 2).

Автором получен следующий результат, включенный с доказательством в монографию [60].

Теорема 1.20 [60]. *Если в плоской нормальной карте треугольники попарно несмежны, то найдется либо грань ранга от 4 до 9, либо 10-грань, инцидентная лишь вершинам степени 3 и смежная с пятью треугольниками.*

Параметр 10 в теореме 1.20 неулучшаем. Этот факт вытекает из следующего примера. Возьмем додекаэдр (каждая вершина инцидентна трем 5-граням) как твердое тело и отсечем все его трехгранные углы.

В графе полученного многогранника каждая вершина инцидентна треугольнику и двум 10-граням.

В работе Х. Абота и Б. Зу [19] при аналогичных предположениях доказано существование грани, ранг которой заключен между 4 и 11. Описание окрестности 10-грани в теореме 1.20 существенно используется в теореме 2.9 (см. § 2), дающей достаточное условие раскраски вершин плоских графов в три цвета и частично подтверждающей гипотезу Стейнберга [87, проблема 1.7].

§ 2. Раскраски плоских графов

Как уже отмечалось, при решении задач раскраски плоских графов ключевое значение имеет исследование соответствующих аспектов строения критических графов. Например, доказательство К. Аппеля и У. Хакена [20] теоремы о четырех красках основано на изучении окрестностей 5-вершин в триангуляциях с минимальной степенью 5.

Ниже рассматриваются задачи цикловой, смешанной, предписанной, диагональной раскрасках и вершинной 3-раскраски. Все представленные результаты, кроме полученных для задачи о диагональной раскраске, базируются на результатах о строении плоских графов общего вида (см. § 1).

2.1. Теорема о шести красках. Центральное место в данном параграфе занимает теорема о шести красках, подтверждающая известную гипотезу Рингеля [79, 87, проблема 2.7]. Эта теорема может быть сформулирована в терминах 1-вложимости (см. § 3) цикловых, а также смешанных раскрасок. Поэтому представленное в [1] решение задачи о шести красках дало толчок развитию исследований по всем указанным направлениям. Р. Бодендик, К. Вагнер и Х. Шумахер [23] обратились к молодому поколению математиков с предложением заняться решением задачи о шести красках. Вскоре Р. Бодендик опубликовал сообщение [24] о том, что задача решена в [1].

• Граф G называется 1-*вложимым* в поверхность, если его можно изобразить на поверхности так, чтобы каждое ребро графа G пересекалось во внутренних точках не более чем с одним другим ребром.

• Граф G называется 1-*планарным*, если он 1-вложим в плоскость.

Г. Рингель [79] доказал, что 1-планарные графы являются вершинно-7-раскрашиваемыми, и предположил, что такие графы являются 6-раскрашиваемыми. Поскольку полный граф K_6 является 1-планарным, менее чем шестью красками не обойтись. Автором установлена следующая

Теорема 2.1 [1]. *Любой 1-планарный граф является 6-раскрашиваемым.*

Г. Рингель сформулировал [79] проблему в терминах совместной и цикловой раскрасок. Одна из формулировок выглядит так: можно ли раскрасить вершины и грани любого плоского графа в шесть цветов так, чтобы любые соседние элементы получали разные цвета? Утвердительный ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 2.1* [1]. *Вершины и грани любого плоского графа являются совместно 6-раскрашиваемыми.*

Результат теоремы 2.1* неулучшаем, поскольку вершины и грани 3-призмы не могут быть окрашены в пять цветов: в один цвет, как легко видеть, может быть окрашено не более двух элементов. Ранее совместная 6-раскрашиваемость была доказана Г. Рингелем для триангуляций [79] и Д. Аркдиконом для другого частного случая — плоских графов без треугольников [21]. Как отмечено в [21], использованная в [9] идея решения не подходит для общего случая.

Приведем еще одну формулировку теоремы о шести красках.

Теорема 2.1** [1]. *Вершины любого плоского графа, в котором грани имеют ранг не более 4, можно раскрасить в шесть цветов так, что вершины на границе каждой грани окажутся окрашенными разными цветами.*

Тот же пример 3-призмы подтверждает, что и в теореме 2.1** менее чем шестью цветами не обойтись. Первая и третья формулировки теоремы о шести красках (теоремы 2.1* и 2.1**) легко сводятся друг к другу, а вторая (теорема 2.1*) следует из них. Автору не известно, существует ли простой вывод теорем 2.1* и 2.1** из теоремы 2.1*.

2.2. Цикловые раскраски. Рассмотрим обобщение обычной правильной раскраски вершин плоского графа, введенное О. Оре и М. Пламмером [74] и неявно присутствующее уже у Г. Рингеля в [79].

• Раскраска вершин графа G называется *k-цикловой*, если в G вершины каждой грани ранга не более k окрашены в разные цвета (см. [87, проблема 1.3]).

Нетрудно видеть, что цикловая 3-раскраска соответствует обычной раскраске, а цикловая 4-раскраска — раскраске 1-вложимых графов. Наименьшее число цветов, требуемое для k-цикловой раскраски графа G, обозначается через $\chi_k(G)$. В [72] доказано, что $\chi_k(G) \leqslant 2k$ для любого графа G при $k \geqslant 3$. Этот результат не является окончательным. Например, для любого плоского графа G из теоремы о четырех красках [20] следует оценка $\chi_k(G) \geqslant 4$, а из теоремы 2.1** — $\chi_4(G) \leqslant 6$. При остальных k справедлива следующая

Теорема 2.2 [39]. *Если G — плоский граф, то*

$$\chi_5(G) \leqslant 9,\ \chi_6(G) \leqslant 10,\ \chi_7(G) \leqslant 12,\ \chi_k(G) \leqslant 2k-3 \text{ при } k \geqslant 8.$$

Для многогранников оценка О. Оре и М. Пламмера существенно улучшена М. Пламмером и Б. Тофтом в [68], где было доказано, что для любого многогранника G справедлива оценка $\chi_k(G) \leqslant k+9$ (в классе всех плоских графов данная оценка неверна). Точнее, в [74] установлены следующие неравенства:

$$\chi_k(G) \leqslant k+7 \text{ при } k \geqslant 15, \quad \chi_k(G) \leqslant k+6 \text{ при } k \geqslant 18,$$
$$\chi_k(G) \leqslant k+5 \text{ при } k \geqslant 24, \quad \chi_k(G) \leqslant k+4 \text{ при } k \geqslant 42.$$

С использованием теоремы 1.16 автором доказана следующая

Теорема 2.3 [13]. *Для любого многогранника имеют место оценки*

$$\chi_k(G) \leqslant 21 \textit{ при } k \leqslant 16, \quad \chi_k(G) \leqslant k+5 \textit{ при } 16 < k \leqslant 19,$$
$$\chi_k(G) \leqslant k+4 \textit{ при } 19 < k \leqslant 23, \quad \chi_k(G) \leqslant k+3 \textit{ при } k \geqslant 24.$$

2.3. Совместные раскраски вершин, ребер и граней. Предписанная раскраска ребер. При совместной раскраске вершин $V(G)$, ребер $E(G)$ и граней $F(G)$ плоского графа G требуется, чтобы любые два смежных или инцидентных элемента множества $V(G) \cup E(G) \cup F(G)$ были окрашены в разные цвета. Задача о совместной раскраске элементов плоского графа минимальным числом цветов была сформулирована Г. Рингелем [79], а затем В. Г. Визингом [15], М. Бехзадом и др. (см. [20]). Если в набор окрашиваемых элементов не входят ребра, то согласно теореме 2.1* для любого плоского графа G справедлива оценка $\chi_{v,f}(G) \leqslant 6$. В остальных случаях, т. е. для хроматических чисел $\chi_{v,e,f}(G)$, $\chi_{v,e}(G)$ и $\chi_{e,f}(G)$, а также для хроматического индекса графа G в верхнюю оценку входит максимальная степень $\Delta(G)$, так как при вершине степени $\Delta(G)$ все ребра должны быть окрашены в разные цвета.

Гипотеза (М. Бехзада [22] и В. Г. Визинга [15] о тотальной раскраске). *Для любого графа G справедлива оценка $\chi_{v,e}(G) \leqslant \Delta(G) + 2$.*

К настоящему времени эта гипотеза подтверждена лишь при $\Delta(G) \leqslant 5$ в [66].

Заметим, что для любого графа выполняется тривиальная оценка $\chi_{v,e}(G) \geqslant \Delta(G) + 1$. Задача вычисления точного значения $\chi_{v,e}(G)$ для произвольного графа G является NP-трудной [56]. Для плоских графов имеет место следующая

Теорема 2.4 [27]. *Если степень плоского графа G равна Δ, то*

$$\chi_{v,e}(G) \leqslant \Delta + 2 \textit{ при } \Delta \notin \{6,7,8\},$$
$$\chi_{v,e}(G) = \Delta + 1 \textit{ при } \geqslant 14.$$

Доказательство основано на теоремах 1.3 и 1.4 о минимальном весе ребра.

М. Нойбергер [57] и Х. Кронк, Дж. Митчем [70] в предположении справедливости гипотезы о четырех красках, а затем Х. Кронк и Дж. Митчем [71] без этого предположения доказали, что вершины, ребра и грани любого плоского графа G с максимальной степенью $\Delta(G) \leqslant 3$ совместно раскрашиваются в семь цветов. В [71] также установлено, что полученная оценка неулучшаема, поскольку вершины, ребра и грани полного графа K_4 нельзя совместно раскрасить шестью красками. В [71] высказано предположение о том, что если $\Delta(G) \geqslant 3$, то $\chi_{v,e,f}(G) \leqslant \Delta(G) + 4$. Довольно длительное время не было продвижения по решению этой задачи (см. [87, проблема 1.10]) за исключением следующего результата: теорема 2.1* в сочетании с теоремой Визинга [15] о том, что $\chi_e(G) = \Delta(G)$ для любого плоского графа G с $\Delta(G) \geqslant 8$, дает оценку $\chi_{v,e,f}(G) \leqslant \Delta(G) + 6$ при $\Delta(G) \geqslant 8$. Наконец, в [4] гипотеза Кронка — Митчема была подтверждена для всех плоских графов G с $\Delta(G) \geqslant 12$, а затем ограничение на $\Delta(G)$ было ослаблено (см. [5, 10]) за счет привлечения мощных структурных лемм из п. 1.2. Последний результат этого цикла, опирающийся на теорему 1.12, представляет следующая

Теорема 2.5 [13]. *Если максимальная степень плоского графа G равна Δ, $\Delta \geqslant 7$, то $\chi_{vef}(G) \leqslant \Delta + 4$.*

Таким образом, гипотеза Кронка — Митчема остается недоказанной лишь для графов G с $\Delta(G) = 4, 5, 6$. Отметим, что для графов G с достаточно большими $\Delta(G)$ установлена точная верхняя оценка $\chi_{vef}(G) \leqslant \Delta(G)+2$. Ограничение на Δ для этой оценки неоднократно ослаблялось. Наилучший результат, вытекающий из теоремы 1.11, представляет следующая

Теорема 2.6 [11]. *Если плоский граф G имеет $\Delta(G) \geqslant 12$, то $\chi_{vef}(G) \leqslant \Delta(G) + 2$, причем оценка $\Delta(G) + 2$ неулучшаема.*

Для звезды $K_{1,n}$ имеем $\chi_{vef}(K_{1,n}) = n + 2$, так как центральная вершина, все n ребер и единственная бесконечная грань суть $n + 2$ попарно соседних элемента. Таким образом, гипотеза Кронка — Митчема [71] о совместной раскраске вершин, ребер и граней трансформировалась в задачу отыскания точной верхней оценки для χ_{vef} при нескольких малых Δ.

Для реберно-граневых раскрасок Л. С. Мельников [77, с. 543] предположил (по аналогии с оценками $\chi_{ve}(G) \leqslant \Delta(G)+2$ и $\chi_{vef}(G) \leqslant \Delta(G)+4$), что $\chi_{ef}(G) \leqslant \Delta(G) + 3$ для любого графа G. Автором доказана следующая

Теорема 2.7 [42]. *Если плоский граф G имеет $\Delta(G) \geqslant 10$, то справедлива неулучшаемая оценка $\chi_{ef}(G) \leqslant \Delta + 1$.*

Оценки в теоремах 2.6 и 2.7 достигаются не только на звездах, но и на многих других плоских графах.

В отличие от обычной раскраски, в предписанной раскраске (понятие введено В. Г. Визингом [17], а также П. Эрдешем и др. [47]) множество допустимых цветов, т. е. предписание, для каждого окрашиваемого элемента графа G задается заранее. Требуется доказать, что если число цветов в предписании у каждого элемента достаточно велико, то из этого предписания можно выбрать цвет так, чтобы и цвета на любых соседних окрашенных элементах оказались различными.

Обобщение в виде $\tilde{\chi}_e(G) \leqslant \Delta + 1$ теоремы Визинга [14] о раскраске ребер графа G на предписанный случай пока получено лишь для графов G с $\Delta(G) \leqslant 3$ (см. [17]). В случае плоских графов установлена следующая

Теорема 2.8 [7]. *Пусть G — плоский граф. Тогда если $\Delta(G) \leqslant 9$, то $\tilde{\chi}_e(G) \leqslant \Delta(G) + 1$, а если $\Delta(G) \geqslant 14$, то $\tilde{\chi}_e(G) = \Delta(G)$.*

Таким образом, на основе пп. 2.1–2.3 можно сделать следующее заключение. Во-первых, имеется связь между цикловой и вершинно-граневой раскрасками плоских графов с такими структурными характеристиками графов, как вес треугольника и циклическая связность. Во-вторых, имеется возможность получать верхние оценки для хроматических чисел в задачах о совместной раскраске с участием ребер, опираясь на изучение строения окрестностей ребер в плоских графах, в частности на верхние оценки минимального веса ребра плоских графов из некоторых классов.

2.4. Задача о раскраске вершин плоских графов в три цвета. Известно, что задача вершинной 3-раскрашиваемости плоских графов является NP-трудной, в отличие от 2- и 4-раскрашиваемости, первая из которых тривиальна, а полиномиальная разрешимость для второй следует из теоремы Аппеля и Хакена [20]. Поэтому представляют интерес достаточные условия 3-раскрашиваемости. В этом направлении имеются следующие результаты.

В 1959 г. Х. Грецш доказал (см. [87, проблема 1.7]), что если в плоском графе G нет циклов длины 3, то граф G является 3-раскрашиваемым. С другой стороны, позднее Б. Грюнбаум и И. Хавел указали примеры не раскрашиваемых в три цвета плоских графов, которые не содержат циклов длины 4 и циклов длины 5 соответственно. Р. Стейнберг [87, проблема 1.7] предположил, что отсутствие в плоском графе 4- и 5-циклов гарантирует его 3-раскрашиваемость. Ввиду указанных выше примеров в гипотезе Стейнберга нельзя отбросить ни одну из посылок. П. Эрдеш в связи с гипотезой Стейнберга сформулировал следующий вопрос: существует ли $k \geqslant 4$ такое, что отсутствие в плоском

графе G циклов длиной от 4 до k гарантирует 3-раскрашиваемость? Х. Абот и Б. Зу [19] доказали следующий ослабленный вариант гипотезы Стейнберга: если в плоском графе G нет циклов длины от 4 до 11, то граф G является 3-раскрашиваемым. Усилением этого результата является вытекающая из теоремы 1.19 следующая

Теорема 2.9 [45]. *Если в плоском графе G нет циклов длины от 4 до 9, то граф G является 3-раскрашиваемым.*

2.5. Сопряженная раскраска вершин плоского графа. Напомним, что в триангуляции вершины a, b называются *сопряженными*, если в ней существуют грани $[axy]$ и $[bxy]$. Раскраска вершин называется *сопряженной* (см. [87, проблема 1.11]), если при этой раскраске не только смежные, но и любые сопряженные вершины имеют разные цвета.

А. Буше, Л. Фуке, Дж.-Л. Жоливе и М. Ривьер [46] построили плоскую триангуляцию, для сопряженной раскраски вершин которой требуется не менее девяти цветов, и доказали, что для сопряженной раскраски плоской триангуляции требуется не более двенадцати цветов. Усилением этого результата яиляется следующая

Теорема 2.10 [30]. *Для сопряженной раскраски любой плоской триангуляции достаточно использовать одиннадцать цветов.*

§ 3. Представления графов на поверхностях

3.1. Сохранение 3-связности плоских графов при стягивании ребер. В последние годы опубликовано немало работ, посвященных преобразованию одних многогранников в другие в результате стягивания и удаления ребер. Такие приемы используются и при доказательстве теоремы 2.3.

• Ребро в многограннике (плоском 3-связном графе) называется *стягиваемым*, если после стягивания этого ребра сохраняется 3-связность.

• Вершина плоского графа называется *симплициальной*, если она инцидентна лишь 3-граням.

Теорема 3.1. *Если вершина v многогранника G симплициальна, а $|V| > s(v) + 1$, то v инцидентна не менее чем $6 - s(v)$ стягиваемым ребрам в G.*

В силу имеющихся примеров относительно возможности усиления теоремы 3.1 остается открытым лишь следующий частный вопрос: всякая ли симплициальная 6-вершина в достаточно большом многограннике инцидентна хотя бы одному стягиваемому ребру?

3.2. Раскраски графов, которые 1-вложимы в поверхности. Г. Рингель [83] получил верхнюю оценку хроматического числа графов,

которые являются 1-вложимыми в любую поверхность, отличную от плоскости. Для тора, бутылки Клейна и ориентируемых поверхностей рода 41 и 83 его оценка оказалась точной, а для проективной плоскости была улучшена Х. Шумахером до 7 (см. [85]).

Напомним, что псевдоплоскость $S^{(p)}$ получается из плоскости попарным отождествлением $2p$ различных точек. Известны три типа вложений графа в псевдоплоскость:

(а) ребра не проходят через особые точки,

(б) вершины не располагаются в особых точках,

(в) ограничений нет.

По аналогии с классической задачей Хивуда — Рингеля [54, 78] о раскраске карт на произвольных поверхностях, отличных от плоскости, возникают задачи о нахождении максимума хроматического числа графов, вложимых и 1-вложимых в псевдоплоскость в смысле (а)–(в).

Сформулируем обобщение теоремы 2.1 о шести красках на случай 1-вложимости в псевдоплоскость в смысле (б).

Теорема 3.2 [3]. *Наименьшее число цветов, необходимое для раскраски любого графа, который является 1-вложимым в $S^{(p)}$ без расположения вершин в особых точках, равно 8 при $p = 4$ и $\lfloor(9 + \sqrt{17 + 16p})/2\rfloor$ при остальных $p > 0$.*

Аналогичные вопросы о 1-вложимости в $S^{(p)}$ в смысле (а) и (в) остаются открытыми.

3.3. Сопряженная раскраска поверхностей. Пусть S^n — замкнутая поверхность с эйлеровой характеристикой N, а $\chi^c(S^N)$ — наименьшее число цветов, достаточное для сопряженной раскраски любой триангуляции на S^N, т. е. такой раскраски вершин, что для любых граней $[abx]$ и $[aby]$ вершины a, b, x и y получают разные цвета.

В [46] доказано, что $\chi^c(S^N) \leqslant 6 + \sqrt{49 - 24N}$ при всех $N \leqslant 0$, т. е. для S^N, отличных от плоскости и проективной плоскости.

В следующей теореме приведена асимптотически в $\sqrt{2}$ раз лучшая оценка, которая, по-видимому, достижима для всех поверхностей, кроме, быть может, плоскости ($N = 2$).

Теорема 3.3 [34]. *Если S^N отлична от плоскости, то*

$$\chi^c(S^N) \leqslant \lfloor(13 + \sqrt{169 - 48N})/2\rfloor.$$

Напомним, что в случае плоскости по теореме 2.10 достаточно одиннадцати цветов, тогда как формула в теореме 3.3 при подстановке $N = 2$ дает десять, а в [46] предполагается, что достаточно девяти цветов [87, проблема 1.11].

3.4. Задача об империях. Эта задача поставлена П. Хивудом [54] более ста лет назад и состоит в определении для заданной поверхности

S и целого m максимального хроматического числа графов, которые могут быть получены из некоторого графа, вложенного в S посредством отождествления, при котором в одну вершину склеивается не более m вершин. Как известно, задачи такого рода часто сводятся к установлению вложимости максимальных полных графов, допускаемых верхней оценкой.

К настоящему времени задача Хивуда решена для 25 % поверхностей [87, проблема 2.1]. Для поверхностей малого рода (близких к плоскости) к 1985 г. оставался открытым [53, 87] лишь вопрос о возможности представления K_{13} в виде 2-империи на бутылке Клейна (неориентируемая поверхность рода 2 с $N = 0$). Г. Рингель, Б. Джексон и Н. Хартсфилд [53] полагали, что такого представления не существует. Однако имеет место

Теорема 3.4 [26]. *Полный граф K_{13} представим в виде 2-империи на бутылке Клейна.*

3.5. Задача о лунных колониях. Данная задача поставлена Г. Рингелем в [78] и состоит в установлении верхней оценки хроматического числа таких графов, которые разложимы на суграфы, вложимые в наперед заданный набор поверхностей. Наиболее известный вариант проблемы Рингеля — оценка хроматического числа графа сверху через его толщину, т. е. наименьшее число плоских суграфов в разложении данного графа. Доказано [87, проблема 1.2], что максимум хроматического числа t-планарных графов при $t = 2$ заключен между 9 и 12, а при $t \geqslant 3$ — между $6t - 2$ и $6t$.

Теорема 3.4 [36]. *Граф K_{13} представим в виде объединения тороидального графа и клейнова графа.*

3.6. Диагональные преобразования триангуляций. Диагональное преобразование триангуляции состоит в замене общего ребра (a, b) в произвольных гранях $[abx]$ и $[aby]$ на ребро (x, y). В 1936 г. К. Вагнер доказал (см. [73]), что любые две плоские триангуляции на одном и том же множестве вершин переводимы друг в друга серией диагональных преобразований. А. Дьюдни, С. Негами и С. Ватанабе получили (см., например, [32]) аналоги теоремы Вагнера для тора и проективной плоскости. Как в исходных, так и в промежуточных триангуляциях не допускались петли и кратные ребра. Это ограничение снято в следующей теореме.

Теорема 3.5 [32]. *Триангуляции любой ориентированной поверхности на одном и том же множестве вершин переводимы друг в друга посредством диагонального преобразования.*

При доказательстве теоремы Вагнера (см. [73]) каждая триангуляция переводилась в промежуточную триангуляцию специального вида, названную впоследствии *нормальной формой Вагнера*, которая содержит две всесмежные вершины, две вершины степени 3, а остальные вершины имеют степень 4.

Любопытным фактом из топологической теории графов является существование одновершинной триангуляции любой ориентируемой поверхности, отличной от плоскости.

В теореме 3.5 для поверхностей положительного рода промежуточной формой служит результат вставки нормальной формы Вагнера в одну из граней одновершинной триангуляции.

Из теоремы Рингеля — Юнгса [78, 80], подтверждающей известную гипотезу Хивуда о раскраске карт, порядок наибольшего полного графа, вложимого в ориентируемую поверхность рода $g \geqslant 0$, равен числу Хивуда $H(g) = \lfloor (7 + \sqrt{1 + 48g})/2 \rfloor$. Из теоремы Рингеля — Юнгермана [90] следует, что порядок наименьшей триангуляции без петель и кратных ребер равен $\lceil (7 + \sqrt{1 + 48g})/2 \rceil$ при $g \neq 2$ и меньше 10 при $g = 2$. Оба этих результата получены (см. [78, 90]) прямым построением с развитием сложной специальной техники.

В [32] высказывается предположение, что вложения указанных графов могут быть получены применением операции диагонального преобразования к произвольной триангуляции поверхности рода $g > 0$.

Автор благодарен А. Д. Коршунову за многочисленные замечания при чтении рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бородин О. В.** Решение задач Рингеля о вершинно-граневой раскраске плоских графов и о раскраске 1-планарных графов // Методы дискретного анализа в изучении реализации логических функций: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. Вып. 41. С. 12–26.
2. **Бородин О. В.** О цикловой раскраске вершин плоских графов // Первый Всемирный конгресс о-ва мат. статистики и теории вероятностей им. Бернулли: Тез. докл. М.: Наука, 1986. Т. 2. С. 499.
3. **Бородин О. В.** О хроматическом числе графов, 1-вложимых в псевдоплоскость // Методы дискретного анализа в теории графов и логических функций: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1986. Вып. 43. С. 3–11.
4. **Бородин О. В.** Совместные раскраски графов на плоскости // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. Вып. 45. С. 21–27.

5. **Бородин О. В.** Совместная раскраска вершин, ребер и граней плоских графов // Методы дискретного анализа в исследовании функциональных систем: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988. Вып. 47. С. 27–37.
6. **Бородин О. В.** Решение задач Коцига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоских графах // Мат. заметки. 1989. Т. 46, № 5. С. 9–12.
7. **Бородин О. В.** Обобщение теоремы Коцига и предписанная раскраска ребер плоских графов // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 6. С. 22–28.
8. **Бородин О. В.** Совместное обобщение теорем Лебега и Коцига о комбинаторике плоских карт // Дискрет. математика. 1991. Т. 3, № 4. С. 24–27.
9. **Бородин О. В.** Минимальный вес грани в плоских триангуляциях без 4-вершин // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 1. С. 16–19.
10. **Бородин О. В.** Структурная теорема о плоских графах и ее приложение к раскраске // Дискрет. математика. 1992. Т. 46, № 1. С. 60–65.
11. **Бородин О. В.** Строение окрестностей ребра в плоском графе и совместная раскраска вершин, ребер и граней плоских графов // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 1. С. 35–47.
12. **Бородин О. В.** Совместные раскраски и раскраски 1-вложимых графов // 30 Internationales Wissenschaftliches Kolloquium (Ilmenau, 1985). Ilmenau: Technische Hochschule Ilmenau, 1985. S. 19–20.
13. **Бородин О. В.** Строение и раскраска плоских графов: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1994. 239 с.
14. **Визинг В. Г.** Об оценке хроматического числа p-графа // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1964. Вып. 3. С. 25–30.
15. **Визинг В. Г.** Критические графы с данным хроматическим классом // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1965. Вып. 5. С. 9–17.
16. **Визинг В. Г.** Некоторые нерешенные задачи в теории графов // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23, № 1. С. 117–134.
17. **Визинг В. Г.** Раскраска вершин графа в предписанные цвета // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1976. Вып. 29. С. 3–10.
18. **Косточка А. В.** Аналог оценки Шеннона для тотальных раскрасок // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1977. Вып. 30. С. 13–22.
19. **Abbott H. L., Zhou B.** On small faces in 4-critical planar graphs // Ars Combinatoria. 1991. V. 32. P. 203–207.
20. **Appel K., Haken W.** The existence of unavoidable sets of geographically good configurations // Illinois J. Math. 1976. V. 20, N 2. P. 218–297.

21. **Archdeacon D.** Coupled coloring of planar maps // Congr. Numer. 1986. V. 39. P. 89–94.

22. **Behzad M., Chartrand G., Cooper J.** The coloring numbers of complete graphs // J. London Math. Soc. 1967. V. 42, N 2. P. 226–228.

23. **Bodendiek R., Schumacher H., Wagner K.** Über das Ringelsche Sechsfarbenproblem // Praxis Math. 1983. V. 25. P. 353–356.

24. **Bodendiek R.** Das Ringelsche Sechsfarbenprobllem ist gelöst // Praxis Math. 1986. V. 28, N 1. P. 52–53.

25. **Borodin O. V.** New structural properties of planar graphs with application in coloring // 33 Internationales Wissenschaftliches Kolloquium (Ilmenau, 1988). Ilmenau: Technische Hochschule Ilmenau, 1988. S. 159–162.

26. **Borodin O. V.** Representing K_{13} as a 2-pire map on the Klein bottle // J. Reine Angew. Math. 1989. V. 393. P. 132–133.

27. **Borodin O. V.** On the total coloring of planar graphs // J. Reine Angew. Math. 1989. V. 394. P. 180–185.

28. **Borodin O. V.** Computing light edges in planar graphs // Topics in Combinatorics and Graph Theory. Heidelberg: Physica, 1990. P. 137–144.

29. **Borodin O. V.** A structural property of planar graphs and the simultaneous colouring of their edges and faces // Math. Slovaca. 1990. V. 40, N 2. P. 113–116.

30. **Borodin O. V.** Diagonal 11-coloring of plane triangulations // J. Graph Theory. 1990. V. 14, N 6. P. 701–704.

31. **Borodin O. V.** Minor faces in planar graphs with the minimal degree 5 // International Conference "Discrete Mathematics" (Eisenach, 1990). Ilmenau: Technische Hochschule Ilmenau, 1990. S. 12–15.

32. **Borodin O. V.** Diagonal transforming triangulations of orientable surfaces // Contemporary Methods in Graph Theory. Mannheim: Bibliographisches Inst., 1990. P. 169–180.

33. **Borodin O. V.** Structural properties of planar maps with the minimum degree 5 // Math. Nachr. 1992. V. 158. P. 109–117.

34. **Borodin O. V.** Diagonal coloring of the vertices of triangulations // Discrete Math. 1992. V. 102, N 1. P. 95–96.

35. **Borodin O. V.** Joint extension of two Kotzig's theorems on 3-polytopes // Combinatorica. 1993. V. 13, N 1. P. 121–125.

36. **Borodin O. V., Mayer J.** Decomposition of K_{13} into a torus graph and a graph imbedded in the Klein bottle // Discrete Math. 1992. V. 102, N 1. P. 97–98.

37. **Borodin O. V.** Structural properties and colorings of plane graphs // Fourth Czechoslovakian Symposium on Combinatorics, Graphs and Complexity. Amsterdam: North-Holland, 1992. P. 31–37. (Annals of Discrete Math.; V. 51).

38. **Borodin O. V.** Precise lower bounds for the number of edges of minor weight in planar maps // Math. Slovaca. 1992. V. 42, N 2. P. 129–142.
39. **Borodin O. V.** Cyclic coloring of plane graphs // Discrete Math. 1992. V. 100, N 1–3. P. 281–289.
40. **Borodin O. V.** An extension of Kotzig's theorem on the minimum weight of edges in 3-polytopes // Math. Slovaca. 1992. V. 42, N 4. P. 385–389.
41. **Borodin O. V.** On light edges and triangles in planar graphs of minimum degree five // Math. Nachr. 1994. V. 170. P. 19–24.
42. **Borodin O. V.** Simultaneous coloring of edges and faces of plane graphs // Discrete Math. 1994. V. 128, N 1–3. P. 21–33.
43. **Borodin O. V.** Triangles with restricted degree sum of their boundary vertices in plane graphs // Discrete Math. 1995. V. 137, N 1–3. P. 45–51.
44. **Borodin O. V.** A new proof of the 6 color theorem // J. Graph Theory. 1995. V. 19, N 4. P. 507–521.
45. **Borodin O. V.** Structural properties of plane graphs without adjacent triangles and an application to 3-colorings // J. Graph Theory. 1996. V. 21, N 2. P. 183–186.
46. **Bouchet A., Fouquet J.-L., Jolivet J.-L., Riviere M.** On a special face colouring of cubic graphs // Ars Combinatoria. 1987. V. 24. P. 67–76.
47. **Erdös P., Rubin A. L., Taylor H.** Choosability in graphs // Proc. of the West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Humboldt State Univ., Arcata, California, 1979). Winnipeg; Man: Utilitas Math., 1980. P. 125–157 (Congr. Numer.; V. 26).
48. **Franklin Ph.** The four color problem // Amer. J. Math. 1922. V. 44. P. 225–236.
49. **Grünbaum B.** Acyclic colorings of planar graphs // Israel J. Math. 1973. V. 14, N 3. P. 390–408.
50. **Grüunbaum B.** Polytopal graphs // Studies in Graph Theory. Pt II. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1975. P. 201–204 (Studies in Math.; V. 12).
51. **Grüunbaum B.** New views on some old questions of combinatorial geometry // Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie. V. I. Rome: Accad. Nat. Lincei., 1976. P. 451–468 (Atti dei Convegni Lincei.; V. 17).
52. **Grüunbaum B., Shephard G. C.** Analogues for tillings of Kotzig's theorem on minimal weight of edges // Ann. Discrete Math. 1981. V. 12. P. 129–140.
53. **Hartsfield N., Jackson B., Ringel G.** The splitting number of the complete graph // Graphs and Combin. 1985. V. 1, N 4. P. 311–329.
54. **Heawood P. J.** Map-color theorem // Quart. J. Math. 1890. V. 24. P. 332–338.
55. **Heesch H.** Untersuchungen zum Vierfarbenproblem. Mannheim; Vienna; Zurich: Bibliographisches Inst., 1969.

56. **Holyer J.** The NP-completeness of edge-coloring // SIAM J. Comput. 1981. V. 10, N 4. P. 718–720.
57. **Izbicki H.** Verallgemeinerte Farbenzahlen // Beiträge zur Graphentheorie. Leipzig: Teubner, 1968. P. 81–84.
58. **Jackson B., Ringel G.** Solution of Heawood's empire problem in the plane // J. Reine Angew. Math. 1984. V. 347. P. 146–153.
59. **Jackson B., Ringel G.** Heawood's empire problem // J. Combin. Theory. 1985. V. B38, N 2. P. 168–178.
60. **Jensen T., Toft B.** Graph Coloring Problems. New York: John Willey & Sons, 1995.
61. **Jucovič E.** On a problem in map colouring // Mat.-Fyz. Casopis. 1963. V. 13, N 1. P. 20–34.
62. **Jucovič E.** On a problem in map colouring // Mat. Casopis. 1969. V. 19, N 3. P. 225–227.
63. **Jucovič E.** Strengthening of a theorem about 3-polytopes // Geometriae Dedicata. 1974. V. 13. P. 233–237.
64. **Jucovič E.** Convex 3-polytopes. Bratislava: Veda, 1981.
65. **Kainen P.** Chromatic number and skewness // J. Combin. Theory. 1975. V. B18, N 1. P. 32–34.
66. **Kostochka A.V.** Exact upper bound for total chromatic number of a graph // 24 Internationales Wissenschaftliches Kolloquium (Ilmenau, 1979). Ilmenau: Technische Hochschule Ilmenau, 1979. S. 33–36.
67. **Kotzig A.** Contribution to the theory of Eulerian polyhedra // Mat.-Fyz. Casopis. 1955. V. 5. P. 101–113.
68. **Kotzig A.** On the theory of Euler polyhedra // Mat.-Fyz. Casopis. 1963. V. 13, N 1. P. 20–34.
69. **Kotzig A.** Extremal polyhedral graphs // Proc. Second International Conference on Combinatorial Mathematics. New York: New York Acad. of Sci., 1978. P. 569–570 (Annals of the New York Academy of Science; V. 319).
70. **Kronk H. V., Mitchem J.** The entire chromatic number of a Normal graph is at most seven // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. V. 78, N 5. P. 799–800.
71. **Kronk H. V., Mitchem J.** A seven-color theorem on the sphere // Discrete Math. 1973. V. 5, N 3. P. 253–260.
72. **Lebesgue H.** Quelques cosequences simple de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 9. P. 27–43.
73. **Ore O.** The Four Color Problem. New York; London: Acad. Press, 1967.
74. **Ore O., Plummer M. D.** Cyclic coloration of plane graphs // Recent Progress in Combinatorics. New York: Acad. Press, 1969. P. 287–293.
75. **Plummer M. D.** On the cyclic connectivity of planar graphs // Graph Theory and Application. Berlin: Springer-Verl., 1972. P. 235–242 (Lecture Notes in Math.; V. 303).

76. **Plummer M. D., Toft B.** Cyclic coloration of 3-polytopes // J. Graph Theory. 1987. V. 11, N 4. P. 507–515.
77. **Recent advances in graph theory:** Proc. Intern. Symp. (Prague, 1974). Praha: Academia, 1975.
78. **Ringel G.** Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen. Berlin: VEB Deutscher Verl. der Wiss., 1959.
79. **Ringel G.** Ein Sechsfarbenproblem auf der Kugel // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1965. Bd 29. S. 107–117.
80. **Ringel G.** Map Color Theorem. New York; Heidelberg: Springer-Verl., 1974.
81. **Ringel G., Youngs J. W. T.** Solution of the Heawood map-coloring problem // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1968. V. 60. P. 438–445.
82. **Ringel G.** A nine color theorem for the torus and the Klein bottle // The Theory and Applications of Graphs (Kalamazoo, Mich., 1980). New York: Willey, 1981. P. 507–515.
83. **Saaty T. L., Kainen P. A.** The four-color problem. Assaults and conquest. New York; Bogotá; Auckland: McGraw-Hill Intern. Book Co., 1977.
84. **Sánchez-Arroyo F.** Determining the total colouring number is NP-hard // Discrete Math. 1989. V. 78, N 3. P. 315–319.
85. **Schumacher H.** Ein 7-Farbensatz 1-einbettbarer Graphen auf der projektiven Ebene // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1984. Bd 54. S. 5–14.
86. **Steinitz E.** Polyeder und Raumeinleitungen // Enzyklop. Math. Wiss. 1922. Bd 3. S. 1–139.
87. **Toft B.** Graph colouring problems. I. Odense Univ., 1987. (Preprint).
88. **Wernicke P.** Uber den Kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. Bd 58. S. 413–426.
89. **Woodall D. R., Wilson R. J.** The Appel-Haken proof of the four-color theorem // Selected Topics in Graph Theory. London: Acad. Press, 1978. P. 83–101.
90. **Youngerman M., Ringel G.** Minimal triangulations of orientable surfaces // Acta Math. 1980. V. 145, N 1–2. P. 121–154.

Адрес автора:

Россия,
630090 Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН.
E-mail: brdnoleg@math.nsc.ru

Статья поступила
12 ноября 1995 г.,
переработанный вариант —
10 сентября 1996 г.