ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1996. Том 3, № 4, 28–34

УДК 519.17

БОЛЕЕ КОРОТКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ДИРАКА О ЧИСЛЕ РЕБЕР В ХРОМАТИЧЕСКИ КРИТИЧЕСКИХ ГРАФАХ*)

В. А. Дойбер, А. В. Косточка, Х. Закс

Дано более короткое доказательство теоремы Дирака [4] о нижней оценке для числа ребер в k-критическом графе с данным числом вершин, описывающей все неполные k-критические графы с минимальным эксцессом.

Введение

Все графы, рассматриваемые в данной статье, являются конечными, неориентированными, без петель и кратных ребер. Через $V(G)$ обозначается множество вершин, через $E(G)$ — множество ребер графа G; $d_G(x)$ обозначает степень вершины $x \in V(G)$. Везде k — целое число, не меньшее 4. Граф G называется *k-критическим*, если его хроматическое число равно k и любой собственный подграф графа G является $(k-1)$-раскрашиваемым. Через $\mathscr{C}(k)$ обозначается множество k-критических графов. Очевидно, что

$$\min\{d_G(x) \mid x \in V(G), G \in \mathscr{C}(k)\} = k - 1.$$

Это равенство дает основание определить *эксцесс* $\epsilon(G)$ для $G \in \mathscr{C}(k)$:

$$\epsilon(G) = \sum_{x \in V(G)} (d_G(x) - (k-1)) = 2|E(G)| - (k-1)|V(G)|.$$

По теореме Брукса [1] имеем

$$\epsilon(G) = 0 \iff G \simeq K_k,$$

где K_k — полный граф на k вершинах. Обозначим $\mathscr{C}^0(k) = C(k) \setminus \{K_k\}$. Г. Дирак [3] доказал следующий результат.

*) Работа второго автора частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01614), сетью DIMANET Европейского Сообщества и SFB 343 “Diskrete Strukturen in der Mathematik”.

Теорема 1. *Если $G \in \mathscr{C}^0(k)$, то $\epsilon(G) \geqslant k-3$.*

Короткие доказательства этой теоремы были даны Г. Кронком и Дж. Митчемом [5] и Дж. Вайнштейном [8]. Равенство в теореме достигается на каждом графе из семейства $\mathscr{D}(k)$, определяемого следующим образом. Множество вершин каждого графа $D \in \mathscr{D}(k)$ состоит из $2k-1$ вершин, разбитых на три части: V', V'' и $\{v_1, v_2\}$, где $|V'| = k-2$, $|V''| = k-1$, подграфы графа D, порожденные $V' \cup \{v_1\}$, $V' \cup \{v_2\}$ и V'', являются полными, каждая вершина из V'' смежна только с одной вершиной из $\{v_1, v_2\}$, каждая из v_1 и v_2 смежна хотя бы с одной вершиной из V'' и в D нет других ребер.

Позднее Г. Дирак [4] усилил теорему 1.

Теорема 2. *Если $G \in \mathscr{C}^0(k) \setminus \mathscr{D}(k)$, то*

$$\epsilon(G) \geqslant \begin{cases} 2 & \textit{при } k = 4, \\ k-1 & \textit{при } k > 4. \end{cases}$$

Доказательство Г. Дирака весьмо длинно и сложно. Дж. Митчем [7] дал более короткое доказательство, основанное на перекраске цепей. Цель настоящей статьи — дать еще более короткое доказательство теоремы [2], использующее тот простой факт, что склеивание двух несмежных соседей произвольной вершины x степени $k-1$ в k-критическом графе приводит к графу с хроматическим числом, не меньшим k, причем ни один k-критический подграф полученного графа не содержит x.

Доказательство теоремы 2

Лемма 1 [1]. *Каждый реберный разрез в k-критическом графе имеет не менее $k-1$ ребер.*

Весьма простое доказательство этой леммы дано в [6].

Пусть $G = (V, E) \in \mathscr{C}^0(k)$ и вершины $x, v, w \in V$ таковы, что $xv, xw \in E$ и $vw \notin E$. Граф G преобразуем в граф $H = H(G; x, v, w)$ склеиванием v и w в новую вершину $v * w$ и отождествлением кратных ребер. Поскольку хроматическое число графа H не менее k, H содержит некоторый k-критическмй подграф. Множество всех k-критических подграфов графа H обозначим через $\mathscr{R}(G; x, v, w)$. Хроматическое число графа $H - v*w$ не превосходит $k-1$, поскольку он является собственным подграфом графа G. Следовательно,

$$v * w \in V(G^*) \text{ для любого } G^* \in \mathscr{R}(G; x, v, w). \tag{1}$$

Пусть для $G^* \in \mathscr{R}(G; x, v, w)$

$$U = U(G^*) = V(G) \setminus (V(G^*) \cup \{v, w\}).$$

Основным инструментом в доказательстве теоремы 2 является соотношение

$$2|E(G)| = 2|E(G^*)| + \sum_{u \in U} d_G(u) + |E_G(U, V(G) \setminus U)| + 2|(N_G(v) \cap N_G(w)) \setminus U|. \quad (2)$$

Из (2) непосредственно следует

$$\epsilon(G) = \epsilon(G^*) + \sum_{u \in U}(d_G(u) - k + 1) - (k-1) + |E_G(U, V(G) \setminus U)| + 2|(N_G(v) \cap N_G(w)) \setminus U|. \quad (3)$$

Если $d_G(x) = k - 1$, то $d_H(x) = k - 2$. Поэтому

$$d_G(x) = k - 1 \text{ влечет } x \notin V(G^*) \text{ для любого } G^* \in \mathscr{R}(G; x, v, w). \quad (4)$$

Всюду ниже граф $G = (V, E)$ есть контрпример к теореме 2 с минимальным числом вершин, равным n. Для непересекающихся $A, B \subset V$ обозначим через $E_G(A, B)$ множество ребер в G, соединяющих A с B.

Лемма 2. *Для любой вершины $x \in V$ степени $k - 1$ и любой пары $\{v, w\}$ несмежных между собой соседей x*

$$\mathscr{R}(G; x, v, w) \subseteq \mathscr{D}(k) \cup \{K_k\}.$$

Доказательство. Пусть $G^* \in \mathscr{R}(G; x, v, w)$, $U = V \setminus (V(G^*) \cup \{v, w\})$. Согласно (4) $U \neq \varnothing$. Поэтому из леммы (1) вытекает неравенство $|E_G(U, V \setminus U)| \geqslant k - 1$. Таким образом, согласно (3) имеем

$$\epsilon(G) \geqslant \epsilon(G^*) + \sum_{u \in U}(d_G(u) - k + 1) - (k-1) + (k-1) \geqslant \epsilon(G^*).$$

Следовательно, ввиду минимальности G граф G^* есть K_k или является графом из $\mathscr{D}(k)$.

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 2. Заметим, что (так как $\epsilon(G) < n$) в G найдется вершина x степени $k-1$. Какие-то ее соседи v и w не смежны между собой. Поскольку $G^* - v * w$ является подграфом графа G и после удаления любой вершины из графа, принадлежащего $\mathscr{D}(k)$, или из K_k получается граф, содержащий K_{k-1}, лемма 2 позволяет заключить, что G содержит K_{k-1}.

Пусть подграф графа G, порожденный множеством $W \subset V$, есть K_{k-1}. Так как $\epsilon(G) \leqslant k - 2$, найдется $w_1 \in W$ с $d_G(w_1) = k - 1$. Пусть v — вершина в $G - W$, смежная с w_1, $W_1 = \{w \in W \mid (w, v) \in E\}$ и $W_2 = W - W_1$. Выберем W и w_1 такими, чтобы максимизировать $|W_1|$, а среди этих пар с максимальным $|W_1|$ выберем W с минимальной суммой степеней.

Далее выберем в W_2 вершину w_2 минимальной степени.

Пусть $G^* \in \mathscr{R}(G; w_1, v, w_2)$, $Z = V(G^*) - v * w_2$, $U = V(G) \setminus (Z \cup \{v, w_2\})$, $W' = W \cap U$ и $Q = U \setminus W'$. Обозначим $j = |W'|$. Согласно (1) и (4) имеем $v * w_2 \in V(G^*)$ и $w_1 \in W'$. Значит, $1 \leqslant j \leqslant k-2$. По лемме 2 имеем $\mathscr{R}(G; x, v, w) \subseteq \mathscr{D}(k) \cup \{K_k\}$.

Случай 1. $G^* \simeq K_k$ и $j = k-2$. Тогда $G(Z)$ есть K_{k-1}. Допустим, что v смежна в точности с s вершинами из Z. Тогда w_2 смежна не менее чем с $k-1-s$ вершинами в Z. Следовательно, $d_G(w) - (k-1) \geqslant k-2-s$ для каждой вершины $w \in W_2$. С другой стороны, по выбору W имеем $s \leqslant |W_1|$ и если $s = |W_1|$, то

$$\begin{aligned}\epsilon(G) &\geqslant (d_G(v) - k + 1) + \sum_{z \in Z}(d_G(z) - k + 1) + \sum_{w \in W}(d_G(w) - k + 1)\\ &\geqslant (2s - k + 1) + 2|W_2|(k - 2 - s) = k - 3 + 2(k - 2 - s)^2.\end{aligned}$$

Значит, если $s < k-2$, то $\epsilon(G) \geqslant k-1$, иначе подграф графа G, порожденный множеством $Z \cup W \cup \{v\}$, принадлежит множеству $\mathscr{D}(k)$. Пусть теперь $s < |W_1|$. Тогда

$$\begin{aligned}&(d_G(v) - k + 1) + \sum_{w \in W}(d_G(w) - k + 1) \geqslant (s + |W_1| - k + 1) + |W_2|(k - 2 - s)\\ &= s(1 - |W_2|) + |W_1| - k + 1 + |W_2|(k-2) \geqslant 2|W_1| - k + (k - 1 - |W_1|)^2.\end{aligned}$$

Если $|W_1| \leqslant k-4$, то последнее выражение больше k. Если $|W_1| = k-2$, то подграф графа G, порожденный $Z \cup W \cup \{v\}$, содержит граф из $\mathscr{D}(k)$. Наконец, если $|W_1| = k-3$, то

$$(d_G(v) - k + 1) + \sum_{w \in W}(d_G(w) - k + 1) \geqslant k - 2$$

и $\epsilon(G) \leqslant k-2$, только если каждая вершина в $Z \cup W_1$ имеет степень $k-1$ и v не смежна с вершинами из Q. Но тогда три соседа в $V(G) \setminus W$ вершины $w_3 \in W_2 - w_2$ должны принадлежать множеству Q и $|E_G(Q, V(G) \setminus Q)| = 3$. По лемме 1 это возможно лишь при $k = 4$.

Случай 2. $Q \neq \varnothing$. По построению имеем $|E_G(W', V(G) \setminus U)| \geqslant j(k-1-j) + 1$, а по лемме 1

$$\begin{aligned}|E_G(Q, V(G) \setminus U)| &\geqslant (k-1) - |E_G(Q, W')|\\ &\geqslant k - 1 - (j - 1) - \sum_{w \in W'}(d_G(w) - k + 1).\end{aligned}$$

Отсюда и из (3) получаем

$$\begin{aligned}\epsilon(G) &\geqslant \epsilon(G^*) - (k-1) + |E_G(U, V(G) \setminus U)| + \sum_{w \in U}(d_G(w) - k + 1)\\ &\geqslant \epsilon(G^*) + (j+1)(k-1-j) + 3 - k.\end{aligned}$$

Если $1 \leqslant j \leqslant k-3$, то $(j+1)(k-1-j)+3-k \geqslant k-1$. Если $j=k-2$ и $G^* \in \mathscr{D}(k)$, то $\epsilon(G^*)+(j+1)(k-1-j)+3-k=k-1$. Вариант, когда $j=k-2$ и $G^* \simeq K_k$, есть подслучай случая 1.

Поскольку случай 2 разобран, имеем $U=W'$ и

$$|E_G(W', V(G)\setminus W')| = j(k-j) + \sum_{w\in W'}(d_G(w)-k+1). \qquad (5)$$

Если $3 \leqslant j \leqslant k-4$, то $k \geqslant 7$ и $j(k-j)-(k-1) \geqslant 3(k-3)-(k-1) = 2k-8 \geqslant k-1$. Следовательно, требуется рассмотреть лишь крайние случаи, когда $j \in \{1, 2, k-3, k-2\}$.

Случай 3. $G^* \in \mathscr{D}(k)$. Из (3) и (5) следует, что

$$\epsilon(G) \geqslant \epsilon(G^*) - (k-1) + j(k-j) = j(k-j) - 2.$$

Для $2 \leqslant j \leqslant k-2$ имеем $j(k-j)-2 \geqslant 2(k-3)$. Следовательно, $W' = \{w_1\}$. Тогда из (3) получаем

$$\begin{aligned}\epsilon(G) \geqslant \epsilon(G^*) - (k-1) + (k-1) + 2|N_G(v)\cap N_G(w)\cap Z| \\ = (k-3) + 2|N_G(v)\cap N_G(w)\cap Z|.\end{aligned}$$

Если $|N_G(v)\cap N_G(w)\cap Z| \geqslant 1$, то утверждение теоремы 2 справедливо. Равенство $|N_G(v)\cap N_G(w)\cap Z| = 0$ возможно, лишь если $W_1 = \{w_1\}$. Тогда по выбору W выполняется неравенство

$$\sum_{x\in X} d_G(x) \geqslant \sum_{w\in W} d_G(w)$$

для любого $X \subset V(G)$ с $G(X) \simeq K_{k-1}$. Для любого графа $H \in \mathscr{D}(k)$ и любой клики C в H граф $H-C$ содержит K_{k-1}. Значит, $G^* - W - v * w_2$ содержит K_{k-1}, а по выбору W имеем

$$\epsilon(G) \geqslant 2\sum_{w\in W}(d_G(w)-k+1).$$

В свою очередь,

$$\sum_{w\in W} d_G(w) \geqslant d_G(w_1) + d_G(w_2) + \sum_{w\in W-w_1-w_2}(d_{G^*}(w)+1) \geqslant (k-1)^2 + k - 3.$$

Таким образом, $\epsilon(G) \geqslant 2(k-3)$.

Случай 4. $G^* \simeq K_k$ и $j=1$. Тогда $|V(G)| = k+2$ и для несмежных вершин v и w_2 имеем

$$|N_G(v)\cap N_G(w_2)| \geqslant |N_G(v)| + |N_G(w_2)| - k \geqslant k-2.$$

Отсюда и из (3) следует, что

$$\epsilon(G) \geqslant 2|N_G(v)\cap N_G(w_2)\cap Z| \geqslant 2(|N_G(v)\cap N_G(w_2)|-1) \geqslant 2(k-3).$$

Случай 5. $G^* \simeq K_k$ и $j = k-3$. Если $k-3=1$, то имеем случай 4. Поэтому полагаем $k-3 \geqslant 2$. Пусть $\{w_3\} = W \cap Z$. Согласно (3) и (5) имеем

$$\epsilon(G) \geqslant 3(k-3)-(k-1)+2\sum_{w\in W'}(d_G(w)-k+1)+2|N_G(v)\cap N_G(w_2)\cap Z|.$$

Если $k \geqslant 7$, то $3(k-3)-(k-1) \geqslant k-1$. Значит, достаточно рассмотреть вариант, когда $k \in \{5,6\}$ (при этом все-таки $3(k-3)-(k-1) \geqslant k-3$),

$$\sum_{w\in W'}(d_G(w)-k+1)=0 \tag{6}$$

и $N_G(v)\cap N_G(w_2)\cap Z = \varnothing$. В частности, $(w_3, v) \notin E$. Рассмотрим граф $G^\dagger \in \mathscr{R}(G; w_1, v, w_3)$. Ввиду (6) $W' \cap V(G^\dagger) = \varnothing$. Если $w_2 \in V(G^\dagger)$, то $d_G(w_2) \geqslant d_{G^\dagger}(w_2)+j \geqslant 2k-4$, $d_G(w_3) \geqslant d_{G^*}(w_3)+j \geqslant 2k-4$ и $\epsilon(G) \geqslant d_G(w_2)+d_G(w_3)-2(k-1) \geqslant 2(k-3)$, что противоречит выбору графа G. Значит, $w_2 \notin V(G^\dagger)$. Но тогда $|V(G^\dagger)| < |V(G^*)| = k$, что невозможно.

Остался не рассмотренным лишь следующий

Случай 6. $G^* \simeq K_k$ и $j = 2$. Можно считать, что $W' = \{w_1, w_3\}$. Согласно (3) и (5) имеем

$$\epsilon(G) \geqslant 2(k-2)-(k-1)+2(d_G(w_3)-k+1)+2|N_G(v)\cap N_G(w_2)\cap Z|.$$

Значит, неравенство $\epsilon(G) \leqslant k-2$ влечет $d_G(w_3) = k-1$ и $N_G(v)\cap N_G(w_2)\cap Z = \varnothing$. Поскольку

$$|N_G(v)\cup N_G(w_2)| \leqslant |V(G)|-2 = k+1,$$

эти равенства возможны только при $k \in \{4,5\}$. Но так как случаи 1 и 5 разобраны, можно считать, что $2 \leqslant k-4$, т. е. $k \geqslant 6$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Brooks R. L.** On colouring the nodes of a network // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1941. V. 37. P. 194–197.
2. **Dirac G. A.** The structure of k-chromatic graphs // Fund. Math. 1953. V. 40. P. 42–55.
3. **Dirac G. A.** A theorem of R. L. Brooks and a conjecture of H. Hadwiger // Proc. London Math. Soc. (3). 1957. V. 7, N 26. P. 161–195.
4. **Dirac G. A.** The number of edges in critical graphs // J. Reine Angew. Math. 1974. V. 268/269. P. 150–164.
5. **Kronk H. V., Mitchem J.** On Dirac's generalization of Brooks' theorem // Canad. J. Math. 1972. V. 24, N 5. P. 805–807.

6. **Lovász L.** Combinatorial problems and exercises. Budapest: Akademiai Kiado, 1979.
7. **Mitchem J.** A new proof of a theorem of Dirac on the number of edges in critical graphs // J. Reine Angew. Math. 1978. V. 299/300. P. 84–91.
8. **Weinstein J.** Excess in critical graphs // J. Combinatorial Theory. 1975. Ser. B. V. 18, N 1. P. 24–31.

Адреса авторов:

W. A. Deuber
University of Bielefeld,
33501 Bielefeld, Germany.
E-mail: deuber@mathematik.
uni-bielefeld.de

А. В. Косточка
Россия, 630090 Новосибирск,
ул. Пирогова, 2,
Новосибирский
государственный университет.
E-mail: sasha@math.nsc.ru

H. Sachs
Technische Hochschule Ilmenau,
D-98684 Ilmenau, Germany.
E-mail: horst.sachs@
mathematik.tu-ilmenau.de

Статья поступила
27 августа 1996 г.