

УДК 519.17 + 519.716.5

КОНСТРУКТИВНЫЕ ОПИСАНИЯ ГРАФОВ*)

М. А. Иорданский

Рассматриваются процессы построения графов с помощью операций объединения с пересечением (операции склейки). Изучается структура замкнутых классов системы (\mathcal{G}, C) , где \mathcal{G} — множество всех графов, C — суперпозиция операций склейки. Установлено, что каждый замкнутый класс графов имеет единственный базис; существуют классы со счетными базисами; мощность множества всех замкнутых классов графов континуальна. Таким образом, система (\mathcal{G}, C) занимает промежуточное положение по структуре замкнутых классов между системами (P_2, C) и (P_k, C) , где P_2 — множество всех функций алгебры логики, P_k — множество всех функций k -значной логики, $k \geq 3$ [8]. Выделены конечные базисы классов всех графов, мультиграфов и простых графов. Найдены необходимые и достаточные условия наследования при выполнении операций склейки таких свойств графов, как триангулированность, планарность и максимальная планарность. Получены элементные и операционные базисы соответствующих классов планарных графов.

Широкое использование теоретико-графовых моделей в задачах дискретной математики требует разработки методов анализа структур графов, в частности графов, обладающих тем или иным характеристическим свойством. Каждый граф можно рассматривать как результат некоторого процесса его построения. Так, задания графов матрицами или списками основываются на построении графа с помощью операции соединения ребром вершин графа. Однако при каждом применении этой операции характеристическое свойство графа может меняться, что затрудняет анализ структуры результирующего графа.

Предлагаемый в работе подход основывается на совместном рассмотрении графа и его характеристического свойства, аналогично тому, как это делается при изучении строения и функционирования управляющих систем [9]. Каждый граф строится из исходных, базисных графов с помощью бинарной операции склейки, являющейся обобщением теоретико-множественных операций объединения и пересечения. «Сила»

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-00119-а).

операций регулируется ограничениями, обеспечивающими наследование требуемых свойств графов. Ограничения в виде необходимых и достаточных условий задают динамическую структурную характеристику соответствующих замкнутых классов графов.

В § 1 приводятся определения основных понятий, используемых при конструктивном описании графов. В § 2 рассматриваются свойства операции склейки графов. В § 3 изучается структура замкнутых классов системы (\mathcal{G}, C) , где \mathcal{G} — множество всех графов, C — операция суперпозиции. В § 4 определяются базисы замкнутых классов всех графов, мультиграфов и обыкновенных графов. В § 5 — 7 дается динамическая структурная характеристика соответственно классов хордальных, планарных и максимальных планарных графов. В § 8 приводятся конечные описания класса планарных графов. В § 9 получены конечные базисы ряда классов хордальных планарных графов.

§ 1. Определения основных понятий и обозначения

Объектом исследований являются конечные псевдографы, мультиграфы и обыкновенные графы.

Псевдограф — это пара (V, E) , где V — непустое множество (вершин), а E — некоторая совокупность (вообще говоря, с повторениями) неупорядоченных пар вершин (ребер). (При обращении к псевдографам для краткости используется термин «граф».)

Мультиграф — это псевдограф без петель.

Обыкновенный граф — это мультиграф без кратных ребер.

Если G — граф, то $V(G)$ и $E(G)$, как обычно, обозначают соответственно множество вершин и множество ребер в G .

Все графы рассматриваются с точностью до изоморфизма. Граф G' называется *частью* графа G , если $V(G') \subseteq V(G)$ и $E(G') \subseteq E(G)$ (обозначается как $G' \subseteq G$). Часть G' графа G называется *подграфом* графа G , если $E(G')$ содержит все ребра графа G , соединяющие вершины из $V(G')$.

Пусть G_1 и G_2 — непересекающиеся графы, т. е. $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, содержащие изоморфные части $G'_1 \subseteq G_1$ и $G'_2 \subseteq G_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Объединение графов G_1 и G_2 путем отождествления их изоморфных частей $G'_1 \subseteq G_1$ и $G'_2 \subseteq G_2$ называется *операцией склейки* графов G_1 и G_2 .

Граф G , получаемый при выполнении операции склейки, называется *результатирующим графом* (склейкой графов), графы G_1 и G_2 — *графами-операндами*. Поскольку графы-операнды изоморфны частям результирующего графа, то для числа вершин и ребер графов G_1 , G_2 и G

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |V(G_1)| + |V(G_2)| &\geq |V(G)| \geq \max\{|V(G_1)|, |V(G_2)|\}, \\ |E(G_1)| + |E(G_2)| &\geq |E(G)| \geq \max\{|E(G_1)|, |E(G_2)|\}. \end{aligned}$$

При одновременном достижении левых равенств операция склейки графов G_1 и G_2 совпадает с операцией их объединения без пересечения. При одновременном достижении правых равенств операция склейки называется *тривиальной*. В этом случае $G'_1 = G_1$ или (и) $G'_2 = G_2$ и происходит изоморфное вложение одного графа-операнда в другой.

Операции склейки фиксированных графов-операндов не различаются, если их результирующие графы изоморфны. Различные операции относятся к одному *типу*, если их отождествляемые части изоморфны фиксированному графу.

Пусть P и H — некоторые (не обязательно конечные) множества графов и типов операций склейки. Операции из H называются операциями *H -склейки*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Граф G называется *H -суперпозицией* графов из P , если $G \in P$ или G можно получить из графов множества P путем последовательного применения операций H -склейки. Процесс построения графа G называется *операцией H -суперпозиции* графов из P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество всех графов, получаемых из P с помощью операций H -суперпозиции, называется *H -замыканием* множества P и обозначается через $[P]_H$. Если $[P]_H = P$, то P называется *H -замкнутым классом* графов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Минимальная по включению система графов $B_\exists \subseteq P$ называется *элементным базисом* H -замкнутого класса P , если $[B_\exists]_H = P$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Система операций $B_0 \subseteq H$, содержащая минимальное число типов операций, называется *операционным базисом* H -замкнутого класса P , если $[B_0]_{B_0} = P$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Операция склейки *сохраняет заданное свойство* графов-операндов, если этим свойством обладает результирующий граф.

Если P — множество всех графов, обладающих заданным свойством, то оно, очевидно, H -замкнуто относительно любого множества H операций склейки, сохраняющих заданное свойство графов. H -замкнутый класс имеет *конечное описание*, если его элементный и операционный базисы содержат соответственно конечное число графов и типов операций. Рассматриваются конечные описания H -замкнутых классов графов. При этом в множества допустимых операций включаются как

все операции, сохраняющие заданное свойство графов, так и некоторые их подмножества.

Используются следующие обозначения:

$G(V')$ — подграф графа G с множеством вершин $V' \subseteq V(G)$;

$G(E')$ — часть графа G с семейством (множеством) ребер $E' \subseteq E(G)$ и множеством вершин, инцидентных ребрам из E' ;

K_n — полный обыкновенный n -вершинный граф (K_0 — граф, не содержащий вершин);

\bar{G} — дополнение обыкновенного графа G до полного;

C_n — простой цикл длины $n \geq 1$ (C_1 — петля);

L_n — простая цепь длины $n \geq 2$.

В обозначениях однотипных операций указывается граф \tilde{G} , изоморфный отождествляемым частям графов-операндов. По отношению к любой такой операции используется терминология «операция склейки по \tilde{G} », а ее результирующий граф обозначается через $(G_1 \circ G_2)\tilde{G}$. Операции склейки по \tilde{G} применимы к графам, содержащим части, изоморфные \tilde{G} .

Для упрощения записей обозначения графов и их изоморфных образов, получаемых при выполнении операций склейки, как правило, не различаются. Отождествленная часть результирующего графа операции склейки по \tilde{G} также обозначается через \tilde{G} .

При наличии симметрий в графах-операндах и в их отождествляемых частях операции одного типа могут иметь изоморфные графы $(G_1 \circ G_2)\tilde{G}$ при любом выборе отождествляемых частей и их изоморфизмов. В таких случаях записи $(G_1 \circ G_2)\tilde{G}$ и их суперпозиции используются в качестве языка задания графов.

ПРИМЕР 1.

$(G_1 \circ G_2)K_0$ — объединение графов G_1 и G_2 без пересечения (склейка по K_0);

$(K_2 \circ K_2)\bar{K}_2$ — склейка графов K_2 и K_2 по \bar{K}_2 ;

$((K_2 \circ K_2)\bar{K}_2 \circ C_1)K_1$ — склейка графов $(K_2 \circ K_2)\bar{K}_2$ и C_1 по K_1 .

В обозначении множества H допустимых операций указываются общие для всех операций H -склейки ограничения на выбор отождествляемых частей и способ их отождествления. Эти ограничения приводятся и в обозначениях однотипных операций H -склейки.

ПРИМЕР 2.

$\langle \tilde{G} \rangle$ — операции склейки по \tilde{G} , в которых отождествляемые части графов-операндов выбираются таким образом, что несмежным в \tilde{G} вершинам соответствуют несмежные вершины хотя бы в одном из графов-операндов; $\langle H \rangle$ — множество всех операций $\langle \tilde{G} \rangle$ различных типов.

Формула $(L_2 \circ K_3)\bar{K}_2$ реализует два неизоморфных графа (рис. 1).

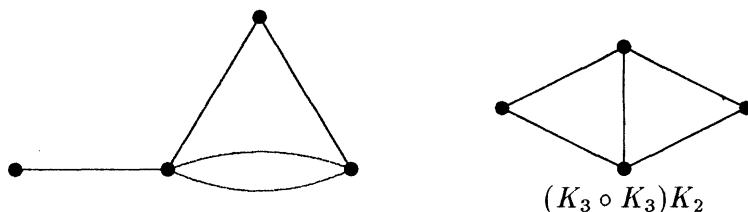


Рис. 1

При использовании операции $\langle \overline{K_2} \rangle$ в качестве однозначного результата имеем только граф $(K_3 \circ K_3)K_2$.

$\langle \tilde{G} \rangle$ — операции склейки по \tilde{G} , в которых отождествляемые части графов-операндов являются подграфами; $\langle H \rangle$ — множество всех операций $\langle \tilde{G} \rangle$ различных типов. Операция $\langle \overline{K_2} \rangle$ не применима к графу K_3 .

В общем случае будут рассматриваться такие ограничения на выбор множества H допустимых операций, которые, не гарантируя изоморфизма результирующих графов, обеспечивают наличие у всех получаемых графов заданного свойства.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если H содержит операции всех типов, применимых к графам из P , и на выбор отождествляемых частей и способ отождествления не накладываются никакие ограничения, то H -замкнутый класс P называется также *замкнутым*. Если в описании замкнутого класса графов операционный базис не указывается, то термин «элементный базис» заменяется для краткости на «базис». Базис обозначается через B .

Определения всех используемых понятий можно найти в [1, 6, 7].

§ 2. Свойства операций склейки

Рассматривается связь некоторых общих структурных характеристик графов-операндов и результирующих графов операций склейки. Формулируется ряд вспомогательных утверждений, используемых при конструктивном описании графов.

Свойство 1. Любая операция склейки сохраняет отсутствие в графах петель, ребер с различными концевыми вершинами и изолированными вершинами.

Свойство 2. Операция склейки сохраняет связность графов тогда и только тогда, когда $\tilde{G} \neq K_0$.

Свойство 3. Операция склейки сохраняет отсутствие кратных ребер, если каждой паре несмежных в \tilde{G} вершин соответствует пара несмежных вершин хотя бы в одном из графов G_1 и G_2 .

Подмножество $V' \subseteq V(G)$ называется *разделяющим множеством вершин* графа G , если граф $G(V \setminus V')$ имеет больше компонент связности, чем граф G .

Свойство 4. Если $|V(G)| > \max\{|V(G_1)|, |V(G_2)|\}$, то $V(\tilde{G})$ является разделяющим множеством вершин связного графа $G = (G_1 \circ G_2)\tilde{G}$.

Указанное неравенство имеет место при выполнении любой нетривиальной операции склейки связных графов по подграфу \tilde{G} . Всякое минимальное по включению разделяющее множество вершин называется *тупиковым*.

Лемма 1. Если $V(\tilde{G})$ — тупиковое разделяющее множество вершин связного графа $G = (G_1 \circ G_2)\tilde{G}$, то каждая вершина из $V(G_1) \setminus V(G'_1)$ и $V(G_2) \setminus V(G'_2)$ соединена с каждой вершиной из $V(\tilde{G})$ цепью, не содержащей внутренних вершин из $V(\tilde{G})$.

Доказательство. Предположим, что найдется такая вершина $v_{i_1} \in V(G_1) \setminus V(G'_1)$ ($v_{i_2} \in V(G_2) \setminus V(G'_2)$), которая соединена с некоторой вершиной $v_{i_0} \in V(\tilde{G})$ лишь цепями, содержащими внутренние вершины из $V(\tilde{G})$. При этом множество $V(\tilde{G}) \setminus \{v_{i_0}\}$ также будет разделяющим в графе G : одна компонента связности включает вершину v_{i_1} (v_{i_2}), а другая — вершину v_{i_0} , что противоречит условию тупиковости (минимальности по включению) разделяющего множества $V(\tilde{G})$. Лемма 1 доказана.

Следствие 1. Если $V(\tilde{G})$ — тупиковое разделяющее множество вершин связного графа $G = (G_1 \circ G_2)\tilde{G}$ и $|V(\tilde{G})| \geq 2$, то каждая пара вершин из $V(\tilde{G})$ соединена в $G(E(G_1) \setminus E(G'_1))$ и $G(E(G_2) \setminus E(G'_2))$ цепями L_n , $n \geq 2$, внутренние вершины которых не принадлежат $V(\tilde{G})$.

Следствие 2. Если $V(\tilde{G})$ — тупиковое разделяющее множество вершин связного графа $G = (G_1 \circ G_2)\tilde{G}$ и $|V(\tilde{G})| \geq 3$, то в $V(G_1) \setminus V(G'_1)$ и $V(G_2) \setminus V(G'_2)$ найдутся вершины, соединенные непересекающимися цепями с любыми тремя вершинами из $V(\tilde{G})$.

Свойство 5. Если $V(\tilde{G})$ — тупиковое разделяющее множество вершин графа $G = (G_1 \circ G_2)\tilde{G}$, то операция склейки сохраняет ацикличность и связность графов тогда и только тогда, когда $\tilde{G} = K_1$.

Доказательство. Необходимость наличия хотя бы одной вершины в части \tilde{G} следует из свойства 2. Если $|V(\tilde{G})| \geq 2$, то по следствию 1 в графе G должен существовать цикл. Так как G_1 и G_2 не содержат петель, то из свойства 1 следует, что $\tilde{G} = K_1$.

Достаточность. Нетрудно видеть, что операции склейки по K_1 сохраняют ацикличность графов. Связность графа G следует из свойства 2. Свойство 5 доказано.

§ 3. Структура замкнутых и H -замкнутых классов графов

Теорема 1. *Каждый H -замкнутый класс графов имеет единственный элементный базис.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный H -замкнутый класс графов P . Поставим ему в соответствие ориентированный граф G_H^P с множеством вершин $V(G_H^P) = P$. Дуга (v_i, v_j) , $v_i, v_j \in V(G_H^P)$, $i \neq j$, содержится тогда и только тогда, когда соответствующий вершине v_i граф G_i является графом-операндом хотя бы одной нетривиальной операции H -склейки, реализующей граф G_j , соответствующий вершине v_j . Так как при проведении дуг в G_H^P учитываются лишь нетривиальные операции H -склейки, то $|V(G_j)| > |V(G_i)|$ или (и) $|E(G_j)| > |E(G_i)|$. Из конечности рассматриваемых графов следует, что все пути, ведущие в любую вершину графа G_H^P , содержат конечное число разных вершин. В графе G_H^P не может быть контуров, поскольку графы-операнды любой операции склейки изоморфны частям результирующего графа и графы, соответствующие вершинам одного контура, изоморфны друг другу. Таким образом, все пути, ведущие в любую вершину графа G_H^P , имеют конечную длину. Отсюда следует, что множество вершин графа G_H^P с нулевыми полустепенями захода не пусто и графы, соответствующие таким вершинам, образуют элементный базис H -замкнутого класса P , поскольку ни один из таких графов не может быть выражен в виде H -суперпозиции других графов из P . Отсюда же следует и единственность элементного базиса. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1, учитывая замечание 1, получаем

Следствие 3. *Каждый замкнутый класс графов имеет единственный базис.*

Следующая теорема дает ответ на вопрос о мощности базисов замкнутых классов.

Теорема 2. *Существуют замкнутые классы графов со счетными базисами.*

Доказательство. Достаточно выделить бесконечную последовательность графов, каждый из которых нельзя представить суперпозицией других графов последовательности. Ее замыкание образует искомый класс. Пример подобной последовательности графов приведен на рис. 2. Теорема 2 доказана.

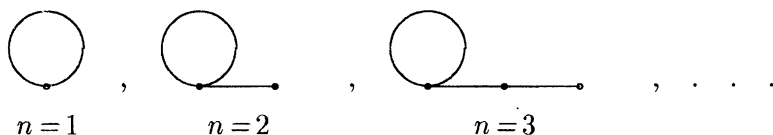


Рис. 2

Следствием теоремы 2 является

Теорема 3. Мощность множества всех замкнутых классов графов континуальна.

Доказательство. Число замкнутых классов множества \mathcal{G} всех графов оценивается сверху числом всех подмножеств графов из \mathcal{G} . Так как \mathcal{G} содержит счетное число графов, то число подмножеств в \mathcal{G} равно континууму.

Далее, множество замкнутых классов, базами которых являются все подмножества бесконечной последовательности графов, изображенных на рис. 2, континуально. Теорема 3 доказана.

Так как каждый замкнутый класс является и H -замкнутым классом, то из теорем 2 и 3 имеем

Следствие 4. Существуют H -замкнутые классы графов со счетными элементными базами.

Следствие 5. Мощность множества всех H -замкнутых классов графов континуальна.

§ 4. Базисы классов всех графов, мультиграфов и обыкновенных графов

Множество всех графов является, очевидно, замкнутым классом.

Теорема 4. Графы K_1 , C_1 и K_2 образуют базис B замкнутого класса всех графов.

Доказательство. Учитывая свойство 1 операции склейки, имеем $\{K_1, C_1, K_2\} \subset B$. Далее согласно следствию 3 для доказательства обратного включения достаточно показать, что любой граф G представим в виде суперпозиции графов из $\{K_1, C_1, K_2\}$. Это можно сделать, например, так:

- 1) построить пустой $|V(G)|$ -вершинный граф с помощью $(|V(G)| - 1)$ операций склейки по K_0 , реализующих графы вида $(g \circ K_1)K_0$, где g — результирующий граф предыдущей операции склейки ($g = K_1$ при выполнении первой операции);

- 2) затем пустой граф дополнить ребрами до графа G , используя $|E(G)|$ операций склейки, реализующих графы вида $(g \circ K_2)\overline{K}_2$ и (или) $(g \circ C_1)K_1$.

Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 получаем

Следствие 6. Замкнутый класс всех графов имеет элементный базис $B_\exists = \{K_1, C_1, K_2\}$ и операционный базис $B_0 = \{K_0, K_1, \overline{K}_2\}$.

Для доказательства следствия 6 достаточно установить минимальность числа типов операций, включенных в множество B_0 . Без операций склейки по K_0 нельзя реализовать несвязные графы (свойство 2). Графы $(\dots(C_1 \circ C_1)K_1 \circ \dots \circ C_1)K_1$ невозможно построить без использования операций склейки по K_1 . Графы $(\dots(K_2 \circ K_2)\overline{K}_2 \circ \dots \circ K_2)\overline{K}_2$ нельзя построить без использования операций склейки по \overline{K}_2 .

На основе подмножеств базисов B_\exists и B_0 можно строить другие H -замкнутые классы графов. Из следствия 6 получаем

Следствие 7. Замкнутый класс мультиграфов имеет элементный базис $B_\exists = \{K_1, K_2\}$ и операционный базис $B_0 = \{K_0, \overline{K}_2\}$.

При переходе к операциям склейки, сохраняющим отсутствие кратных ребер, получаем

Следствие 8. $\prec H \succ$ -замкнутый класс обыкновенных графов имеет элементный базис $B_\exists = \{K_1, K_2\}$ и операционный базис $B_0 = \{K_0, \overline{K}_2\}$.

Множество всех графов является H -замкнутым классом при любом H . В связи с этим представляет интерес оценка числа конечных описаний.

Теорема 5. Существует счетное множество конечных описаний замкнутого класса всех графов.

Доказательство. Счетные множества конечных элементных и операционных базисов для класса P всех графов можно получить следующим образом.

Из множества H операций склейки всех типов последовательно удаляются операции склейки по K_1 , C_1 , $(C_1 \circ C_1)K_1$, $((C_1 \circ C_1)K_1 \circ C_1)K_1$ и т. д. Получающиеся при этом подмножества операций склейки обозначаются через H_i , $i = 1, 2, \dots$. Для каждого H_i -замыкания класса P по B_\exists и B_0 строятся множества графов B_\exists^i и операций B_0^i (см. таблицу).

i	$B_{\mathfrak{S}}^i$	B_0^i
1	$\{B_{\mathfrak{S}} \cup (C_1 \circ C_1)K_1\}$	$\{K_0, C_1, \overline{K_2}\}$
2	$\{B_{\mathfrak{S}}^1 \cup ((C_1 \circ C_1)K_1 \circ C_1)K_1\}$	$\{K_0, (C_1 \circ C_1)K_1, \overline{K_2}\}$
3	$\{B_{\mathfrak{S}}^2 \cup (((C_1 \circ C_1)K_1 \circ C_1)K_1 \circ C_1)K_1\}$	$\{K_0, ((C_1 \circ C_1)K_1 \circ C_1)K_1, \overline{K_2}\}$
\vdots	\vdots	\vdots

Для каждого множества $B_{\mathfrak{S}}^i$ имеем $[B_{\mathfrak{S}}^i]_{H_i} = P$. Возможность построения всех одновершинных графов, допускающих ребра-петли, следует из способа построения $B_{\mathfrak{S}}^i$ и определения H_i . Объединяя эти графы операциями склейки по K_0 и добавляя ребра с помощью операций, реализующих графы вида $(g \circ K_2)\overline{K_2}$, где g — результирующий граф предыдущей операции склейки, получаем любой граф G . Минимальность по включению множеств $B_{\mathfrak{S}}^i$ следует из ограничений на множества H_i и теоремы 4. Минимальность по включению множеств B_0^i устанавливается следующим образом: без операций склейки по K_0 не реализуются несвязные графы (свойство 2 операции склейки); без операций склейки по $\overline{K_2}$ нельзя построить граф L_2 , так как каждое H_i не содержит операций склейки по K_1 ; по этой же причине необходимы операции склейки по C_1 , $(C_1 \circ C_1)K_1$ и т. д. для реализации соответственно графов $((C_1 \circ C_1)K_1 \circ C_1)K_1$, $((C_1 \circ C_1)K_1 \circ C_1)K_1 \circ C_1)K_1$ и т. д. Теорема 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Задания графов, соответствующие различным базисам, различаются величиной избыточности, возрастающей при переходе от H_i к H_{i+1} , $i = 1, 2, \dots$

При рассмотрении операций склейки по подграфам описание класса всех графов становится бесконечным. Более того, справедлива

Теорема 6. $\langle H \rangle$ -замкнутый класс обыкновенных графов имеет счетные элементный и операционный базисы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Бесконечность элементного базиса следует из того, что любой граф $G = K_n$, $n \geq 3$, не может быть получен в результате выполнения нетривиальной операции склейки по подграфу \tilde{G} . Действительно, если это возможно, то, учитывая свойство 4 операций склейки, множество $V(\tilde{G})$ должно быть разделяющим в графе G и его связность $\kappa(G) \leq n - 2$. С другой стороны, полный граф K_n имеет связность $\kappa(K_n) = n - 1$. Таким образом, элементный базис должен содержать в своем составе счетное множество полных графов.

Покажем бесконечность операционного базиса. Рассмотрим счетную последовательность графов вида $(K_n \circ K_n)K_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$ Каждый

граф этой последовательности имеет связность, равную $n - 1$, и не может быть результатом операции склейки K_n с K_n по K_l , $l < n - 1$, так как при этом связность графа будет меньше $n - 1$. Следовательно, в операционный базис входит счетное множество операций склейки по \tilde{G} , где $\tilde{G} = K_n$, $n = 1, 2, \dots$. Теорема 6 доказана.

Следствие 9. *Мощность множества всех $\langle H \rangle$ -замкнутых классов обыкновенных графов континуальна.*

Для получения конечных описаний обыкновенных графов в рамках $\langle H \rangle$ -замыканий в дальнейшем будем рассматривать их подмножества с операциями склейки, сохраняющими соответствующие свойства графов.

§ 5. Условия наследования триангулированности графов

При рассмотрении условий наследования свойств графов здесь и в дальнейшем ограничимся нетривиальными операциями склейки, поскольку если $G \cong G_1$ и (или) $G \cong G_2$, то происходит наследование всех свойств графов-операндов.

Часть графа называется *полной*, если каждая пара ее вершин соединена хотя бы одним ребром. Любая часть, содержащая одну вершину, также считается полной.

Лемма 2. *Если отождествляемые части графов-операндов являются полными, то операция склейки сохраняет хордальность графов.*

Доказательство. Поскольку графы-операнды G_1 и G_2 хордальны, цикл C_n , $n \geq 4$, без хорды должен содержать вершины из $V(G_1) \setminus V(G'_1)$ и $V(G_2) \setminus V(G'_2)$, где $V(G'_1)$ и $V(G'_2)$ — вершины отождествляемых частей графов G_1 и G_2 . При этом вершины множества $V(\tilde{G})$ образуют разделяющее множество в результирующем графе (свойство 4). Так как C_n — простой цикл, то получаем две несмежные вершины в \tilde{G} , что невозможно, так как отождествлялись полные части графов-операндов. Таким образом, цикл C_n , $n \geq 4$, содержит хорду. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если $V(\tilde{G})$ — тупиковое разделяющее множество вершин хордального графа $G = (G_1 \circ G_2)\tilde{G}$, то \tilde{G} — его полная часть.*

Доказательство. При $|V(\tilde{G})| = 1$ утверждение леммы следует из определения полной части графа. Если $|V(\tilde{G})| \geq 2$ и \tilde{G} не является полной частью графа G , то по следствию 1 получаем цикл C_n , $n \geq 4$, без хорды, что противоречит условию. Лемма 3 доказана.

Из лемм 2 и 3 следует

Теорема 7. Если $V(\tilde{G})$ — тупиковое разделяющее множество вершин графа $G = (G_1 \circ G_2)\tilde{G}$, то операция склейки сохраняет хордальность графов тогда и только тогда, когда \tilde{G} — полная часть графа G .

Обозначим через G_i , $1 \leq i \leq r$, результирующий граф операции склейки, использовавшейся на i -м шаге построения графа G ; \tilde{G}_i — отождествленная часть графа $G_i = (G_{i_1} \circ G_{i_2})\tilde{G}_i$.

Лемма 4. Если $V(\tilde{G}_i)$ — разделяющее множество вершин графа G_i , $i \leq r-1$, и все части \tilde{G}_j , $i < j \leq r$, являются полными, то $V(\tilde{G}_i)$ является разделяющим множеством вершин графа G .

Доказательство. Предположим, что $V(\tilde{G}_i)$ не является разделяющим множеством в G . Это означает, что в графе G содержится ребро (v_1, v_2) такое, что вершина v_1 принадлежит $V(G_{i_1}) \setminus V(G'_{i_1})$, в то время как вершина v_2 принадлежит множеству $V(G_{i_2}) \setminus V(G'_{i_2})$. Однако такого ребра в G не может быть, ибо ребро (v_1, v_2) отсутствовало в графе G_i и не могло появиться позднее при выполнении операций склейки по полным частям. Лемма 4 доказана.

Замечание 3. Из теоремы 7 и леммы 4 следует структурная характеристика хордальных графов [10].

§ 6. Условия наследования планарности графов

Выделим в плоском графе G некоторую грань Γ , имеющую связную границу. Окружность, все точки которой принадлежат грани Γ или ее границе, называется *вписанной* в грань Γ .

Лемма 5. Каждый планарный граф G допускает плоскую укладку, в которой все вершины произвольной грани Γ со связной границей расположены вдоль вписанной в нее окружности в порядке кругового обхода грани Γ .

Доказательство. Связную часть плоского графа G , являющуюся границей грани Γ , обозначим через G_Γ . Нетрудно видеть, что граф G_Γ представим в виде $\{K_1\}$ -суперпозиции простых циклов и максимальных (по включению) деревьев. Проведем доказательство индукцией по m — числу циклов и деревьев, используемых при построении графа G_Γ .

Базис индукции для $m = 1$. Если G_Γ является деревом, то произведем линейное размещение его вершин в соответствии с круговым обходом грани Γ (в любом из двух возможных направлений), начиная с произвольной вершины. При этом допустима односторонняя плоская укладка ребер дерева, поскольку отрезки прямой, заключенные между

концевыми вершинами произвольной пары ребер дерева, либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом. Заменяя отрезок прямой, содержащий все вершины дерева, на дугу окружности с сохранением односторонней плоской укладки ребер дерева, получаем искомую плоскую укладку графа G . Если G_Γ — простой цикл, то существование искомой плоской укладки графа G очевидно.

Индуктивный переход. Пусть все плоские графы, грани которых содержат не более $m \geq 1$ циклов и деревьев, допускают искомые представления. Рассмотрим произвольный плоский граф G с частью G_Γ , состоящей из $m + 1$ цикла и дерева. Поставим в соответствие $\{K_1\}$ -суперпозиции простых циклов и максимальных деревьев, реализующей G_Γ , вспомогательный граф, вершины которого соответствуют всем простым циклам и максимальным деревьям, использовавшимся при построении графа G_Γ , а также вершинам графа G_Γ , полученным в результате выполнения операций склейки по K_1 . Вершины вспомогательного графа соединяются ребром, если соответствующие им подграфы графа G_Γ пересекаются. Учитывая свойство 5 операций склейки, вспомогательный граф является деревом.

После удаления из грани Γ графа G цикла или дерева, соответствующего висячей вершине вспомогательного дерева, получаем граф G' с гранью Γ' , имеющей связную границу, состоящую из m циклов и деревьев. По предположению индукции все ее вершины можно расположить вдоль окружности, вписанной в Γ' , в порядке кругового обхода грани Γ , не нарушая плоскую укладку графа G' . Склеим граф G' по K_1 с циклом или деревом, удаленным ранее из графа G . Добавляемые при этом вершины расположим вдоль дуги окружности, вписанной в грань Γ' , непосредственно за отождествленной вершиной в порядке кругового обхода Γ' и согласующегося с ним круговым обходом внешней грани добавляемого графа. Если граф, склеиваемый с G' по K_1 , есть дерево, то, как указывалось при доказательстве базиса индукции, его ребра допускают при этом одностороннюю плоскую укладку. Если G' склеивается по K_1 с произвольным плоским графом, внешняя грань которого есть простой цикл, то односторонняя плоская укладка всех ребер и внутренних вершин (если они имеются) добавляемого графа, очевидно, всегда возможна без нарушения плоской укладки графа. Лемма 5 доказана.

Пусть все вершины из $V(G'_1)$ и $V(G'_2)$ принадлежат в плоских укладках планарных графов G_1 и G_2 соответственно граням Γ_1 и Γ_2 со связными границами. Преобразуем плоские укладки графов G_1 и G_2 таким образом, чтобы все вершины граней Γ_1 и Γ_2 располагались вдоль вписанных в них окружностей. Отождествим части G'_1 и G'_2 , выбирая пары отождествляемых вершин в соответствии с круговыми обходами

этих окружностей. Операции склейки по \tilde{G} , удовлетворяющие указанным ограничениям на выбор и способ отождествления частей G'_1 и G'_2 , обозначаются через \tilde{G}^\oplus . При отсутствии ограничений на способ отождествления для операций склейки используется обозначение \tilde{G}^Γ .

Лемма 6. Операции склейки \tilde{G}^\oplus сохраняют планарность графов.

Доказательство. Рассмотрим плоские укладки графов G_1 и G_2 , в которых все вершины соответственно граней Γ_1 и Γ_2 расположены вдоль вписанных в них окружностей в порядке круговых обходов граней. Каждую такую окружность можно интерпретировать как линию разреза сферы на две полусферы, на которых размещены рассматриваемые плоские укладки графов G_1 и G_2 .

Для отождествления вершин из $V(G'_1)$ с вершинами из $V(G'_2)$ в соответствии с круговыми обходами граней Γ_1 и Γ_2 достаточно поворота одной полусферы относительно другой вдоль линии разреза с «растяжениями» или «сжатиями» в случае необходимости длин дуг окружностей, соединяющих вершины из $V(G'_1)$ ($V(G'_2)$), а также, быть может, зеркального отображения укладки графа на одной из полусфер (при несопадении направлений круговых обходов граней Γ_1 и Γ_2). Каждое такое преобразование сохраняет плоские укладки графов-операндов. Так как при отождествлении ребер из $E(G'_1)$ с ребрами из $E(G'_2)$ не появляются новые ребра, то результирующий граф G планарен. Лемма 6 доказана.

Замечание 4. При любом отождествлении частей G'_1 и G'_2 , каждая из которых содержит не более трех вершин, всегда можно выбрать направления обходов граней Γ_1 и Γ_2 так, чтобы отождествление вершин осуществлялось в порядке обхода граней.

Отсюда и из леммы 6 получаем

Следствие 10. Операции склейки \tilde{G}^Γ сохраняют планарность графов при $|V(\tilde{G})| \leq 3$.

Лемма 7. Если $V(\tilde{G})$ — тупиковое разделяющее множество вершин планарного графа G , то в представлении $G = (G_1 \circ G_2)\tilde{G}$ используется операция склейки \tilde{G}^\oplus .

Доказательство. Сначала покажем, что вершины $V(G'_1)(V(G'_2))$ принадлежат одной грани в плоской укладке графа $G_1(G_2)$. Учитывая симметричность утверждения относительно G_1 и G_2 , ограничимся рассмотрением графа G_1 . Пусть вершины v_1 и v_2 из $V(G'_1)$ не принадлежат ни одной общей грани ни в одной плоской укладке графа G_1 . Из следствия 1 получаем, что в G существует цепь, соединяющая образы вершин v_1 и v_2 , все внутренние вершины которой, а следовательно, и ребра

не принадлежат образу графа G_1 в графе G . Это противоречит условию планарности графа G .

Теперь установим, что способ отождествления частей G'_1 и G'_2 удовлетворяет ограничениям, накладываемым на операции склейки \tilde{G}^\oplus . Учитывая замечание 4, достаточно рассмотреть ситуацию, когда $|V(\tilde{G})| \geq 4$. Две вершины из $V(G'_1)(V(G'_2))$ называются *соседними*, если хотя бы одна из двух цепей, соединяющих их по границе грани Γ_1 (Γ_2), не содержит внутренних вершин из $V(G'_1)(V(G'_2))$. Нетрудно видеть, что пары отождествляемых вершин обеспечивают согласование круговых обходов граней, содержащих $V(G'_1)$ и $V(G'_2)$, тогда и только тогда, когда соседние вершины из $V(G'_1)$ отождествляются с соседними вершинами из $V(G'_2)$. При несоблюдении этого условия в части \tilde{G} найдется вершина, которая соединяется непересекающимися цепями с тремя другими вершинами из $V(\tilde{G})$. Поскольку $V(\tilde{G})$ — тупиковое разделяющее множество графа G , то, учитывая следствие 2, каждая из этих трех вершин соединена непересекающимися цепями еще с двумя вершинами, одна из которых принадлежит подграфу $G(V(G_1) \setminus (V(G'_1)))$, а другая — подграфу $G(V(G_2) \setminus (V(G'_2)))$. Поэтому в G можно выделить часть, гомеоморфную $K_{3,3}$, что противоречит условию планарности графа G [7]. Лемма 7 доказана.

На основе лемм 6 и 7 доказана

Теорема 8. Если $V(\tilde{G})$ — тупиковое разделяющее множество вершин графа $G = (G_1 \circ G_2)\tilde{G}$, то G наследует планарность графов G_1 и G_2 тогда и только тогда, когда используется операция склейки \tilde{G}^\oplus .

Лемма 8. Если $V(\tilde{G}_i)$ — тупиковые разделяющие множества вершин графов $G_i = (G_{i_1} \circ G_{i_2})\tilde{G}_i$, $1 \leq i \leq r$, получаемых в процессе построения планарного графа G , то

$$|V(\tilde{G}_i) \cap V(\tilde{G}_j)| \leq 2, \quad 1 \leq i, j \leq r, \quad i \neq j.$$

Доказательство. Предположим, что в графе G найдутся части \tilde{G}_i и \tilde{G}_j , $i < j$, такие, что $|V(\tilde{G}_i) \cap V(\tilde{G}_j)| \geq 3$. Произвольную тройку из этих вершин обозначим через v_1, v_2 и v_3 . По следствию 2 каждая из них соединена непересекающимися цепями с вершинами $v_{i_1} \in V(G_{i_1}) \setminus V(G'_{i_1})$ и $v_{i_2} \in V(G_{i_2}) \setminus V(G'_{i_2})$. Рассмотрим граф $G_j = (G_{j_1} \circ G_{j_2})\tilde{G}_j$, $j > i$, получаемый далее в процессе построения графа G . Выберем из склеиваемых графов G_{j_1} и G_{j_2} тот, который не содержит часть G_i . Пусть это будет граф G_{j_1} . Так как вершины v_1, v_2 и v_3 принадлежат тупиковому разделяющему множеству вершин графа G_j , то они соединены непересекающимися цепями с некоторой вершиной $v_{j_1} \in V(G_{j_1}) \setminus V(G'_{j_1})$. Учитывая

выбор G_{j_1} , эти цепи не пересекаются с цепями, которые соединяют указанные три вершины с вершинами v_{i_1} и v_{i_2} . Таким образом, в графе G_j можно выделить часть, гомеоморфную $K_{3,3}$, что противоречит условию планарности графа G_j , а следовательно, и условию планарности результирующего графа G . Лемма 8 доказана.

§ 7. Условие наследования планарности максимальных графов

Рассматриваются обыкновенные планарные графы с операциями склейки по подграфам. Для максимальных планарных графов справедлива

Теорема 9. Если $V(\tilde{G})$ — тупиковое разделяющее множество вершин графа $G = (G_1 \circ G_2)\tilde{G}$, то G наследует максимальную планарность графов G_1 и G_2 тогда и только тогда, когда используется операция склейки K_3^Γ .

Доказательство. *Необходимость.* Число вершин (ребер) графов G, G_1, G_2, \tilde{G} обозначим соответственно через n, n_1, n_2, \tilde{n} (m, m_1, m_2, \tilde{m}). Так как G, G_1 и G_2 являются максимальными планарными графами, то

$$m = 3n - 6, \quad m_1 = 3n_1 - 6, \quad m_2 = 3n_2 - 6. \quad (1)$$

Из определения операции склейки следует, что

$$m = m_1 + m_2 - \tilde{m}, \quad (2)$$

$$n = n_1 + n_2 - \tilde{n}. \quad (3)$$

Подставляя равенства (1) в соотношение (2), с учетом выражения (3) получаем

$$\tilde{m} = 3\tilde{n} - 6. \quad (4)$$

Из определения операций \tilde{G}^\oplus и теоремы 8 следует, что подграф \tilde{G} максимального планарного графа G является максимальным внешнепланарным графом. Число вершин \tilde{n} и ребер \tilde{m} в любом максимальном внешнепланарном графе связано соотношением

$$\tilde{m} = 2\tilde{n} - 3. \quad (5)$$

Система уравнений (4) и (5) имеет единственное решение $\tilde{n} = 3$ и $\tilde{m} = 3$. Таким образом, если $V(\tilde{G})$ — тупиковое разделяющее множество вершин максимального планарного графа G , то при его построении из максимальных планарных графов G_1 и G_2 может использоваться только операция склейки по K_3 . Принадлежность вершин из K_3 одной грани в плоских укладках графов G_1 и G_2 следует из теоремы 8.

Достаточность. Вершины K_3 принадлежат одной грани в плоских укладках графов G_1 и G_2 . Так как $|V(\tilde{G})| = 3$, то из следствия 10 вытекает планарность графа G . Подставляя в правую часть соотношения (2) два последних равенства из (1) и $\tilde{m} = 3$, при $\tilde{n} = 3$ с учетом (3) получаем $m = 3n - 6$. Таким образом, G является максимальным планарным графом. Теорема 9 доказана.

§ 8. Базисы H -замкнутых классов планарных графов

Обозначим через H^\oplus множество всех операций \tilde{G}^\oplus различных типов.

Теорема 10. H^\oplus -замкнутый класс планарных графов имеет элементный базис $B_\oplus = \{K_1, C_1, K_2\}$ и операционный базис $B_0 = \{K_0, K_1, \overline{K}_2\}$.

Доказательство. Планарность любого графа $G \in [B_\oplus]_{B_0}$ следует из планарности графов элементного базиса и леммы 6. Принадлежность любого планарного графа G указанному замыканию можно установить следующим образом:

- 1) сначала построить пустой $|V(G)|$ -вершинный граф с помощью $(|V(G)| - 1)$ операций склейки по K_0 , реализующих графы вида $(g \circ K_1)K_0$, где g — текущий граф (сначала $g = K_1$);
- 2) затем дополнить пустой $|V(G)|$ -вершинный граф ребрами до графа G , используя $|E(G)|$ операций склейки по K_1 и \overline{K}_2 , реализующих соответственно графы вида $(g \circ C_1)K_1$ и $(g \circ K_2)\overline{K}_2$.

Каждая такая операция сохраняет планарность графов, так как добавляемое ребро соединяет вершины одной грани текущего графа g .

Минимальность по включению множества B_\oplus следует из свойства 1 операций склейки. Минимальность по включению множества B_0 устанавливается следующим образом: без операции склейки по K_0 нельзя реализовать несвязные графы, так как все графы элементного базиса связны (свойство 2); без операции склейки по K_1 нельзя реализовать граф $(C_1 \circ C_1)K_1$; без операции склейки по \overline{K}_2 нельзя реализовать граф $(K_2 \circ K_2)\overline{K}_2$. Теорема 10 доказана.

Приведенное конечное описание класса планарных графов не является единственным.

Теорема 11. Существует счетное множество конечных описаний H^\oplus -замкнутого класса планарных графов.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 5, при этом операции склейки по \overline{K}_2 заменяются на операции \overline{K}_2^r .

На основе подмножеств элементного и операционного базисов класса планарных графов можно порождать другие замкнутые классы планарных графов.

Следствие 11. H^\oplus -замкнутый класс планарных мультиграфов имеет элементный базис $B_\oplus = \{K_1, K_2\}$ и операционный базис $B_0 = \{K_0, \overline{K}_2\}$.

Следствие 12. $\prec H^\oplus \succ$ -замкнутый класс обыкновенных планарных графов имеет элементный базис $B_\oplus = \{K_1, K_2\}$ и операционный базис $B_0 = \{K_0, \overline{K}_2\}$.

Если при построении обыкновенных планарных графов ограничиться операциями склейки по подграфам, то мощность элементного и операционного базисов увеличится, оставаясь конечной. Для доказательства этого факта установим два вспомогательных результата.

Лемма 9. Если $V(\tilde{G})$ — тупиковое разделяющее множество вершин планарного графа $G = (G_1 \circ G_2)\tilde{G}$, то \tilde{G} не содержит часть $K_{1,3}$.

Доказательство. Предположим, что \tilde{G} содержит часть $K_{1,3}$. Так как $V(\tilde{G})$ является тупиковым разделяющим множеством для вершин графа $G = (G_1 \circ G_2)\tilde{G}$, то по следствию 2 в G найдется пара таких вершин, разделяемых множеством $V(\tilde{G})$, что каждая из них соединяется непересекающимися цепями с любыми тремя заданными вершинами из $V(\tilde{G})$. Таким образом, в G можно выделить часть, гомеоморфную $K_{3,3}$, что противоречит условию планарности графа G [7]. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. Если $V(\tilde{G})$ — тупиковое разделяющее множество вершин планарного графа $G = (G_1 \circ G_2)\tilde{G}$ и \tilde{G} содержит несколько компонент связности, то ни одна из таких компонент не является простым циклом C_n ; $n \geq 3$.

Доказательство. Пусть одна из компонент связности части \tilde{G} является циклом C_n , $3 \leq n < |V(\tilde{G})|$. Так как $V(\tilde{G})$ — тупиковое разделяющее множество для вершин графа G , то по следствию 2 найдутся вершины $v_1 \in V(G_1) \setminus V(G'_1)$ и $v_2 \in V(G_2) \setminus V(G'_2)$, соединенные непересекающимися цепями с тремя произвольными вершинами из C_n . Плоская реализация подграфа, порожденного вершинами указанных цепей, невозможна без использования C_n в качестве разделяющего цикла. Иначе, добавив в грань, ограниченную C_n , $n \geq 3$, вершину, смежную со всеми вершинами цикла, получили бы планарный граф, содержащий часть, гомеоморфную $K_{3,3}$. Если C_n является разделяющим циклом, то $V(\tilde{G})$ не может быть тупиковым разделяющим множеством вершин. Лемма 10 доказана.

Тупиковое разделяющее множество вершин графа G , содержащее $\kappa(G)$ вершин, называется *минимальным*. Операцию склейки по подграфу \tilde{G} , сохраняющую планарность графов, обозначим через $\langle \tilde{G}_{VE}^\oplus \rangle$, если $V(\tilde{G})$ является минимальным разделяющим множеством вершин графа $G = (G_1 \circ G_2)\tilde{G}$ и $E(\tilde{G})$ содержит минимальное число ребер среди всех подграфов, соответствующих минимальным разделяющим множествам вершин графа G . Пусть $\langle H_{VE}^\oplus \rangle$ — множество всех операций $\langle \tilde{G}_{VE}^\oplus \rangle$ различных типов.

Замечание 5. Учитывая то, что связность графа $G = (G_1 \circ G_2)K_0$ равна нулю, операцию склейки по K_0 будем относить к $\langle \tilde{G}_{VE}^\oplus \rangle$ операциям.

Теорема 12. $\langle H_{VE}^\oplus \rangle$ -замкнутый класс обыкновенных планарных графов имеет элементный базис $B_\exists = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$. Операционный базис B_0 содержит операции 22 типов, отождествляемые подграфы которых изоморфны графам из множества

$$\begin{aligned} &\{K_0, K_1, \bar{K}_2, K_2, \bar{K}_3, (K_1 \circ K_2)K_0, L_2, K_3, \bar{K}_4, \\ &(\bar{K}_2 \circ K_2)K_0, (K_2 \circ K_2)K_0, (K_1 \circ L_2)K_0, L_3, C_4, \bar{K}_5, (\bar{K}_3 \circ K_2)K_0, \\ &((K_2 \circ K_2)K_0 \circ K_1)K_0, (\bar{K}_2 \circ L_2)K_0, (K_1 \circ L_3)K_0, (K_2 \circ L_2)K_0, L_4, C_5\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Любой граф $G \in [B_\exists]_{\langle H_{VE}^\oplus \rangle}$ является обыкновенным планарным графом. Петли и кратные ребра в G невозможны, так как G является результатом выполнения последовательности операций склейки обыкновенных графов по подграфам. Планарность G следует из леммы 6.

Покажем, что каждый обыкновенный планарный граф G может быть реализован $\langle H_{VE}^\oplus \rangle$ -суперпозицией над B_\exists . Если граф G не является связным, то его всегда можно построить с помощью операций склейки по K_0 , исходя из отдельных компонент связности графа G . Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением связных планарных графов. Выделим в графе $G \notin B_\exists$, т. е. в неполном графе, минимальное разделяющее множество вершин \tilde{V} . Если имеется несколько таких множеств, то выберем из них то, которому соответствует подграф $G(\tilde{V})$ с наименьшим числом ребер. Обозначим через V_i множество вершин i -й компоненты связности графа $G(V \setminus \tilde{V})$, $1 \leq i \leq q$, $q \geq 2$. Выберем в качестве G_1 и G_2 графы, изоморфные подграфам $G(V_1 \cup \tilde{V})$ и $G(V \setminus V_1)$ из G . Учитывая способы выделения \tilde{G} , G_1 и G_2 , а также теорему 8, получаем представление $G = (G_1 \circ G_2)\tilde{G}$, где G_1 и G_2 — обыкновенные связные планарные графы и используется операция склейки $\langle \tilde{G}_{VE}^\oplus \rangle$. Применяя аналогичные представления к графам G_1 и G_2 и далее к графам, получаемым на их основе, приходим к системе графов $\{K_2, K_3, K_4\} \subset B_\exists$.

Рассмотрение указанного процесса в обратном порядке определяет искомую операцию суперпозиции. Система $B_{\mathfrak{D}}$ минимальна по включению, так как используются операции склейки по подграфам. Поэтому класс обыкновенных планарных графов является $\langle H_{VE}^{\mathfrak{D}} \rangle$ -замкнутым с элементарным базисом $B_{\mathfrak{D}} = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$.

Покажем, что каждый обыкновенный планарный граф G принадлежит множеству $[B_{\mathfrak{D}}]_{B_0}$. При $\langle H_{VE}^{\mathfrak{D}} \rangle$ -замыкании планарных графов имеем $|V(\tilde{G})| = \kappa(G) \leq 5$. Имеется 53 [7, приложение 1] обыкновенных графа, содержащих не более пяти вершин (включая граф K_0). Из них один граф K_5 не является планарным. По лемме 9 в качестве отождествляемых подграфов не могут использоваться графы, содержащие часть $K_{1,3}$. Число таких графов равно 26. Учитывая лемму 10, из оставшегося множества графов удаляются еще 4 графа, в каждом из которых одна из компонент связности является циклом. В результате получаем 22 искомых графа (см. приложение).

Минимальность по включению полученного множества типов операций следует из наличия для каждого из них графа, не реализуемого без использования операции соответствующего типа. Диаграммы этих графов также приведены в приложении. Теорема 12 доказана.

На основе подмножеств элементарного и операционного базисов для класса обыкновенных планарных графов можно описывать более узкие классы планарных графов.

§ 9. Триангулированные планарные графы

Теорема 13. $\langle H^{\mathfrak{D}} \rangle$ -замкнутый класс обыкновенных хордальных планарных графов имеет единственное конечное описание с элементарным базисом $B_{\mathfrak{D}} = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ и операционным базисом $B_0 = \{K_0, K_1, K_2, K_3\}$.

Доказательство. Любой граф $G \in [B_{\mathfrak{D}}]_{\langle B_0^{\mathfrak{D}} \rangle}$ является обыкновенным хордальным планарным графом. Так как все графы элементарного базиса принадлежат данному классу графов, то достаточно показать наследование этих свойств при выполнении операций из B_0 . Хордальность графа G следует из леммы 2; петли и кратные ребра в G невозможны, поскольку G получен в результате склейки обыкновенных графов по подграфам; граф G планарен по лемме 6.

Покажем, что любой хордальный обыкновенный планарный граф G принадлежит множеству $[B_{\mathfrak{D}}]_{\langle B_0^{\mathfrak{D}} \rangle}$. Если граф G не является связным, то его всегда можно построить с помощью операций склейки по K_0 , исходя из отдельных компонент связности графа G . Выделим в связном графе $G \notin B_{\mathfrak{D}}$, т. е. в неполном графе, произвольное минимальное разделяющее множество вершин \tilde{V} , $G(\tilde{V}) = \tilde{G}$. Обозначим через V_i

множество вершин i -й компоненты связности графа $G(V \setminus \tilde{V})$, $1 \leq i \leq q$, $q \geq 2$. В качестве графа G_1 выберем граф, изоморфный подграфу $G(V_1 \cup \tilde{V})$, в качестве G_2 — граф, изоморфный подграфу $G(V \setminus V_1)$. Учитывая способ построения \tilde{G} , G_1 и G_2 , а также теорему 7, получаем представление графа G в виде склейки $(G_1 \circ G_2)\tilde{G}$, где G_1 и G_2 — обыкновенные хордальные связные планарные графы и \tilde{G} — минимальный разделяющий полный подграф. Учитывая лемму 9, нетрудно видеть, что $|V(\tilde{G})| \leq 3$. Следовательно, $G = (G_1 \circ G_2)K_i$, $1 \leq i \leq 3$. Применяя предыдущие представления к графам G_1 и G_2 и далее к выделенным в них подграфам, приходим к системе полных графов $\{K_2, K_3, K_4\} \subset B_\exists$. Рассматривая указанный процесс в обратном порядке, получаем, что $G \in [B_\exists]_{<B_0^\Phi>}$.

Минимальность по включению и единственность множества графов B_\exists следует из использования лишь операций склейки по подграфам. Минимальность и единственность полученного множества типов операций B_0 обусловлена наличием одно-, двух- и трехсвязных обыкновенных хордальных планарных графов. Теорема 13 доказана.

Рассмотрим некоторые классы обыкновенных планарных графов, порождаемые подмножествами элементарного и операционного базисов класса обыкновенных хордальных планарных графов.

На основе теоремы 9 получаем

Следствие 13 [2]. $<H^\oplus>$ -замкнутый класс максимальных триангулированных планарных графов имеет элементный базис $B_\exists = \{K_3, K_4\}$ и операционный базис $B_0 = \{K_3\}$.

Используя свойство 5, получаем следующий известный результат (см., например, [2]).

Следствие 14 [2]. $<H^\oplus>$ -замкнутый класс деревьев имеет элементный базис $B_\exists = \{K_1, K_2\}$ и операционный базис $B_0 = \{K_1\}$.

Алгоритмические описания классов внешнепланарных графов приведены в [3].

В заключение отметим, что при фиксированных ограничениях на множество допустимых операций число элементов в базисах и мощность порождаемых ими замкнутых классов в общем случае связаны монотонной зависимостью. Так, класс обыкновенных планарных графов имеет конечное описание в терминах $<H_{VE}^\oplus>$ -замыкания (теорема 12). В то же время для максимальных планарных графов, образующих подмножество обыкновенных планарных графов, справедлива

Теорема 14. $<H_{VE}^\oplus>$ -замкнутый класс максимальных планарных графов имеет счетный элементный базис B_\exists и операционный базис $B_0 = \{K_3\}$.

Доказательство. Состав операционного базиса определяет теорема 9. Счетность элементного базиса следует из наличия бесконечной последовательности максимальных планарных графов, каждый из которых не содержит разделяющего треугольника (рис. 3). Теорема 14 доказана.

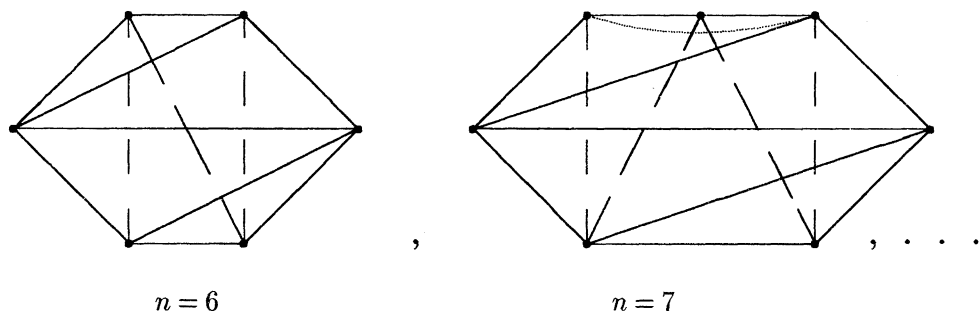


Рис. 3



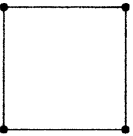
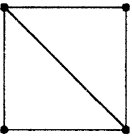
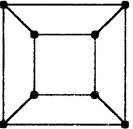
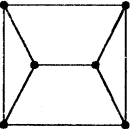
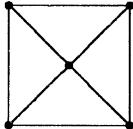
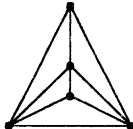
Следствие 15. Мощность множества всех $\langle H \rangle$ -замкнутых классов максимальных планарных графов континуальна.

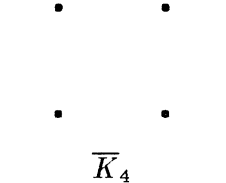
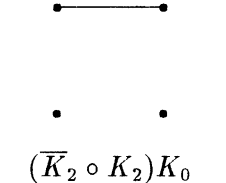
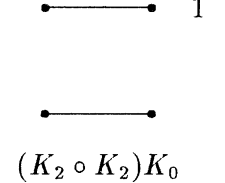
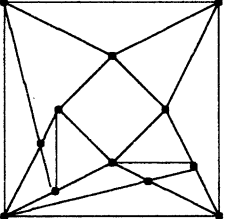
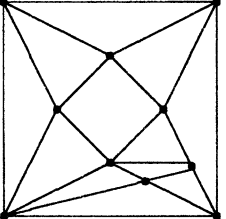
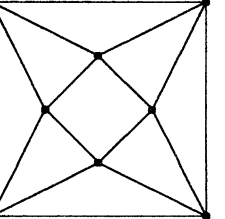
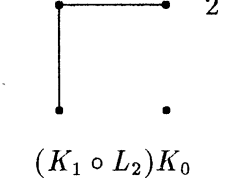
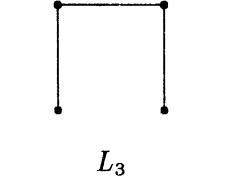
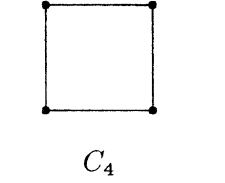
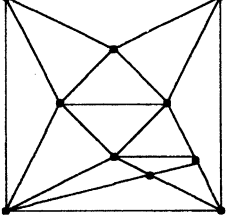
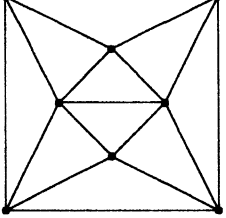
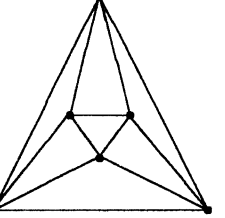
Примеры использования конструктивных описаний графов в задачах анализа и синтеза графов можно найти в работах [4, 5].

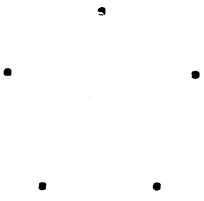
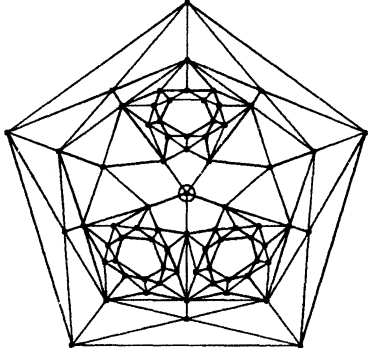
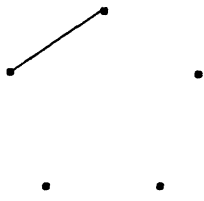
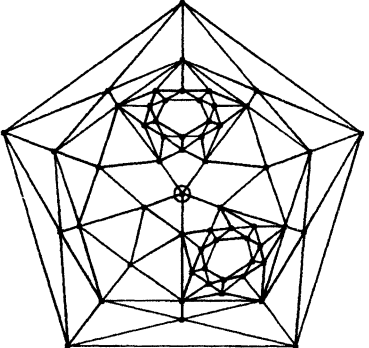
Приложение

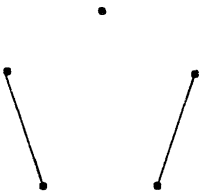
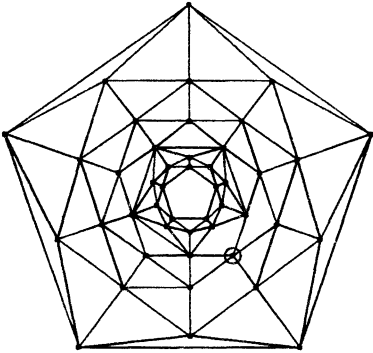
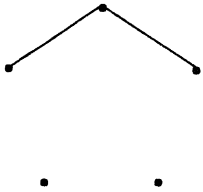
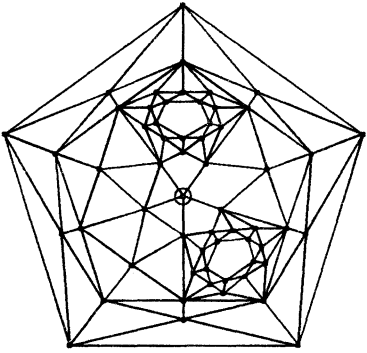
**Диаграммы отождествляемых графов \tilde{G} операций
из B_0 для $\langle \tilde{H}_{VE}^\oplus \rangle$ -замкнутого класса
обыкновенных планарных графов и графов,
не реализуемых без использования операций
соответствующего типа**

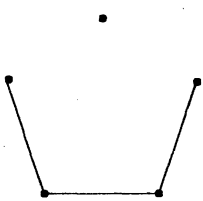
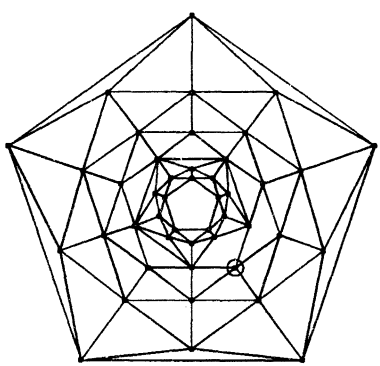
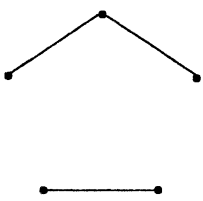
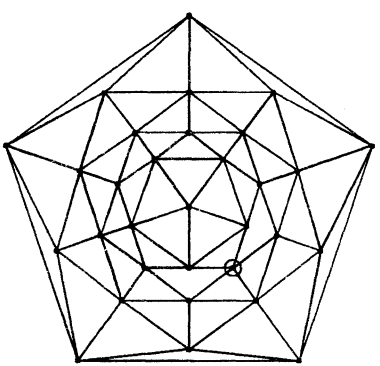
Для каждой допустимой пары значений числа вершин \tilde{n} и числа ребер \tilde{m} приводится диаграмма графа \tilde{G} , его обозначение и диаграмма графа, не реализуемого без использования операции склейки по \tilde{G} . Графы \tilde{G} снабжаются порядковыми номерами, если они соответствуют одной паре значений \tilde{n} и \tilde{m} . Если граф содержит единственное разделяющее множество вершин, соответствующее операции $\langle \tilde{G}_{VE}^\oplus \rangle$, то отделяемая им вершина помечается кружком в 5-связных графах.

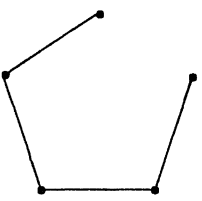
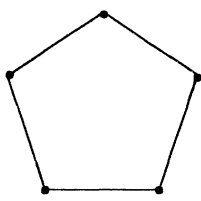
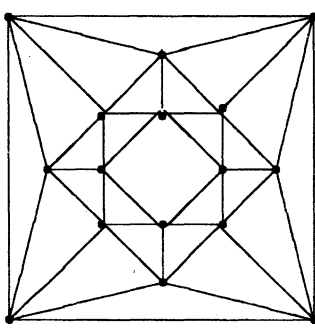
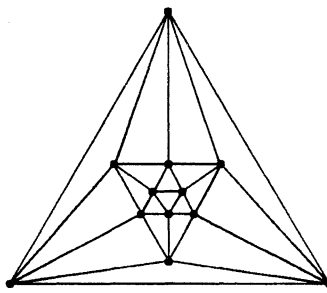
\tilde{n}	\tilde{m}			
	0	1	2	3
0	K_0 			
1	K_1 			
2	\overline{K}_2 	K_2 		
3	\overline{K}_3 	$(K_1 \circ K_2)K_0$ 	L_2 	K_3 

\tilde{n}	\tilde{m}		
	0	1	2
4	 \overline{K}_4	 $(\overline{K}_2 \circ K_2)K_0$	 $(K_2 \circ K_2)K_0$
			
4	2	3	4
	 $(K_1 \circ L_2)K_0$	 L_3	 C_4
			

\tilde{n}	\tilde{m}	
	0	1
5	 <p>$\overline{K_5}$</p> 	 <p>$(\overline{K_3} \circ K_2)K_0$</p> 

\tilde{n}	\tilde{m}	
	2	
5	 <p>1</p> <p>$((K_2 \circ K_2)K_0 \circ K_1)K_0$</p> 	 <p>2</p> <p>$(\overline{K}_2 \circ L_2)K_0$</p> 

\tilde{n}	\tilde{m}	
	3	
5	<p>1</p>  <p>$(K_1 \circ L_3)K_0$</p> 	<p>2</p>  <p>$(K_2 \circ L_2)K_0$</p> 

\tilde{n}	\tilde{m}	
	4	5
5	 L_4	 C_5
		

ЛИТЕРАТУРА

1. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
2. Иорданский М. А. Замкнутые классы планарных графов // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1985. С. 76–82.
3. Иорданский М. А. Алгоритмические описания внешнепланарных графов // Тез. второй междунар. конф. «Математические алгоритмы». Н. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 1995. С. 24–25.
4. Иорданский М. А. О степенях вершин некоторых классов планарных графов // Комбинаторно-алгебраические методы и их применение. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1987. С. 34–39.

5. **Иорданский М. А.** Некоторые вопросы анализа и синтеза графов // Тр. первой междунар. конф. «Математические алгоритмы». Н. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 1995. С. 33–38.
6. **Уилсон Р.** Введение в теорию графов. М.: Мир, 1978.
7. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1977.
8. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
9. **Яблонский С. В.** Основные понятия кибернетики // Проблемы кибернетики. М.: Физматгиз, 1959. Вып. 2. С. 7–38.
10. **Dirac G. A.** On rigid circuit graphs // Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg. 1962. V. 25, N 1–2. P. 71–75.

Адрес автора:

Россия,
603005 Нижний Новгород,
ул. Ульянова, 1,
Нижегородский
государственный
педагогический университет

Статья поступила

22 июня 1995 г.,
переработанный вариант —
18 июня 1996 г.