ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1996. Том 3, № 4, 64–68

УДК 519.17

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОСТОВНЫХ ЦЕПЕЙ В ГРАФАХ С КОРОТКИМИ ЦИКЛАМИ*)

В. Ню

Показано, что если в 2-связном неориентированном графе степень каждой вершины не меньше 3 и каждое ребро принадлежит по крайней мере одному циклу длины не более 4, то любые две вершины этого графа можно соединить остовной цепью.

Введение

В работе используется обычная терминология, принятая в теории графов (см., например, [1]). Рассматриваются неориентированные графы без петель, но, может быть, с кратными дугами. *Цепь* — это связный граф, в котором только две вершины имеют нечетную степень. Цепь называется *остовной*, если она содержит все вершины графа.

В [4] описан следующий класс графов P: граф G принадлежит P, если G является

(a) 2-связным,

(b) степень каждой вершины не менее 3, т. е. $\delta(G) \geqslant 3$, и

(c) каждое ребро графа принадлежит по крайней мере одному циклу длины не более 4.

Свойства (a), (b) и (c) являются критическими для существования в графах остовных циклов (остовных эйлеровых подграфов): если ослаблено хотя бы одно из этих свойств, то имеются графы без указанных подграфов. Соответствующие примеры приведены в [4]. Там же было высказано предположение о том, что каждый граф из класса P содержит остовный эйлеровый подграф. Справедливость этого предположения установлена в [2].

Теорема 1 [2]. *Если граф $G \in P$, то G содержит остовный цикл.*

В настоящей работе продолжено изучение графов из P и доказана следующая

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01800).

Теорема 2. *Если граф $G \in P$, то любые две различные вершины в G можно соединить остовной цепью.*

В [3] показано, что вопрос о существовании в графах остовных цепей связан с вопросом о существовании в этих графах гамильтоновых циклов. В этой же работе доказана следующая

Теорема 3 [3]. *Если в графе G с $n \geqslant 5$ вершинами $\delta(u) + \delta(v) \geqslant n$ для любой пары несмежных вершин u и v, то каждая пара различных вершин в G может быть соединена остовной цепью.*

Очевидно, что класс графов из теоремы 3 отличен от P.

Доказательство теоремы 2

Предположим, что теорема неверна, т. е. в P имеется такой граф G_0, в котором некоторые вершины x_0 и y_0 нельзя соединить остовной цепью. Такие вершины x_0 и y_0 назовем *полюсами* графа G_0.

Рассмотрим граф G_1, изображенный на рис. 1.

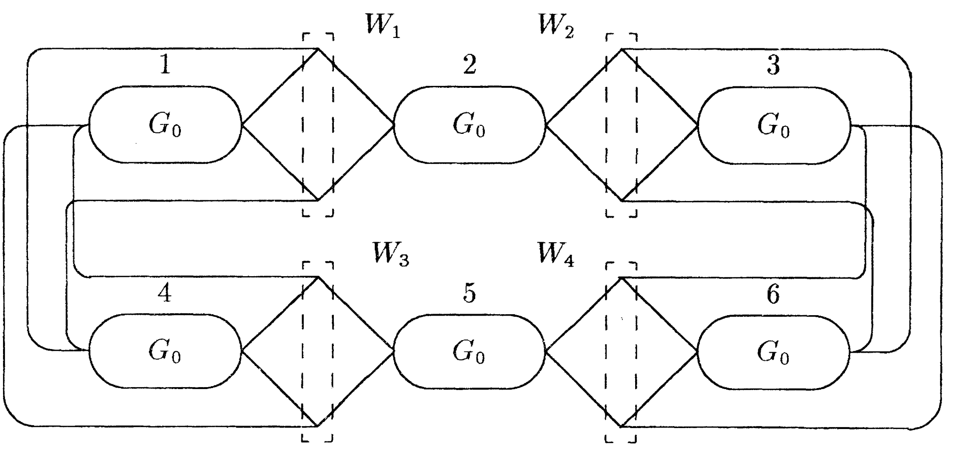

Рис. 1

Этот граф состоит из шести копий графа G_0 и восьми дополнительных вершин, объединенных в пары W_1, W_2, W_3, W_4: при этом каждая дополнительная вершина смежна только с тремя полюсами различных копий графа G_0, а каждый полюс — только с двумя дополнительными вершинами, принадлежащими одной паре.

Нетрудно убедиться в том, что граф G_1 принадлежит классу P. Следовательно, согласно теореме 1 граф G_1 содержит некоторый остовный цикл C. Покажем, что в таком случае справедливо

Утверждение 1. *В остовном эйлеровом подграфе C графа G_1 любой полюс не может быть смежным только с одной дополнительной вершиной.*

Доказательство. Предположим, что полюс x из некоторой копии графа G_0 в подграфе C смежен только с одной дополнительной вершиной. Пусть граф H_0 есть пересечение цикла C и той копии графа G_0, которой принадлежит полюс x. Поскольку C — остовный цикл в G_1, то, во-первых, H_0 является остовным подграфом графа G_0, а, во-вторых, все вершины в H_0, за исключением полюсов, имеют четную степень. Степени же полюсов нечетны, так как нечетна степень вершины x. В этом случае по теореме Эйлера оба полюса принадлежат одной компоненте связности в H_0. Но тогда H_0 является связным остовным подграфом графа G_0, в котором имеются точно две вершины нечетной степени, т. е. вопреки предположению H_0 является остовной цепью, соединяющей полюса графа G_0. Утверждение доказано.

Так как в остовном цикле C степень любой вершины четна, а степень каждой дополнительной вершины в G_1 равна 3, из утверждения 1 непосредственно вытекает

Следствие. *В остовном эйлеровом подграфе C каждая вершина из W_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, смежна точно с двумя полюсами различных копий графа G_0.*

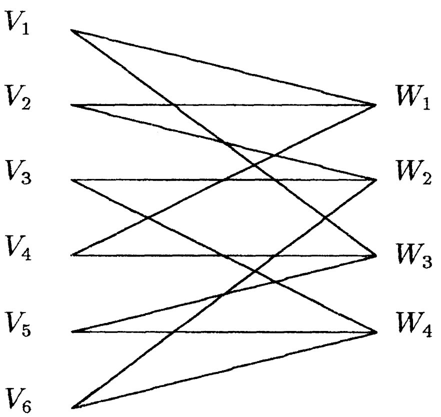

Рис. 2

Обозначим через V_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$, множество вершин i-й копии графа G_0 (см. рис. 1). Двудольный граф G_1^* определяется по графу G_1 следующим образом: вершинами одной доли являются множества $V_1, \ldots, V_6$, вершинами другой доли — множества $W_1, \ldots, W_4$; при этом вершины V_i

и W_j смежны, если в графе G_1 дополнительные вершины из W_j смежны с одним из полюсов множества V_i (рис. 2).

Аналогично по графу C определим двудольный граф C^*: вершина V_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$, смежна с вершиной W_j, $1 \leqslant j \leqslant 4$, если в графе C вершины из W_j смежны с некоторым полюсом множества V_i.

Утверждение 2. *Граф C^* является гамильтоновым циклом или гамильтоновой цепью в графе G_1^*.*

Доказательство. Действительно, так как C — связный остовный подграф графа G_1, то C^* является связным остовным подграфом графа G_1^*. Ясно, что степень каждой вершины V_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$, в C^* не превосходит 2, а согласно следствию утверждения 1 степень каждой вершины W_j, $1 \leqslant j \leqslant 4$, равна 2. Но связный остовный подграф, в котором степень любой вершины не превосходит 2, может быть только или гамильтоновым циклом, или гамильтоновой цепью. Утверждение доказано.

Таким образом, если граф G_0 не имеет остовной цепи, соединяющей полюса x_0 и y_0, то согласно утверждению 2 граф G_1^* содержит или гамильтонов цикл, или гамильтонову цепь. Однако нетрудно показать, что граф G_1^* не содержит указанных подграфов. Действительно, граф G_1^* содержит шесть попарно не смежных между собой вершин $V_1, \ldots, V_6$, а в любой простой цепи или простом цикле из десяти вершин можно расположить не более пяти попарно не смежных между собой вершин. Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы 2.

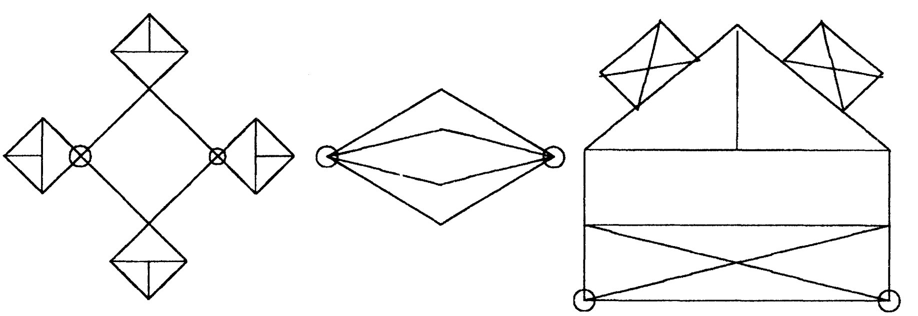

Рис. 3

В заключение отметим, что если в определении класса P ослабить хотя бы одно из свойств (a), (b) или (c), то утверждение теоремы 2 становится неверным. Соответствующие контрпримеры приведены на рис. 3 (кружками отмечены вершины, которые нельзя соединить остовной цепью).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973.
2. **Lai H.-J.** Graph whose edges are in small cycles // Discrete Math. 1991. V. 94, N 1. P. 11–22.
3. **Lesniak-Foster L., Williamson J. E.** On spanning and dominating circuits in graphs // Canad. Math. Bull. 1977. V. 20, N 2. P. 215–220.
4. **Paulraja P.** On graphs admitting spanning Eulerian subgraphs // ARS Combinatoria. 1987. V. 24. P. 57–65.

Адрес автора:

Россия,
630090 Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН

Статья поступила
29 июля 1996 г.