ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 1997. Том 4, № 1, 3–12

УДК 519.1

О НИЖНИХ ЯРУСАХ РЕШЕТКИ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ*)

В. Е. Алексеев

Рассматриваются обыкновенные графы с помеченными вершинами. Множество графов X называется наследственным классом, если любой граф, изоморфный порожденному подграфу некоторого графа из X, принадлежит множеству X. Если X — некоторое множество графов, то через X_n обозначается множество графов из X, в которых вершины помечены числами $1, 2, \dots, n$. Известно (см., например, [1]), что для любого бесконечного наследственного класса X, отличного от класса всех графов, справедливо соотношение

$$\log_2 |X_n| = \left(1 - \frac{1}{c(X)}\right) \frac{n^2}{2} + o(n^2),$$

где $c(X)$ — натуральное число. Множество наследственных классов X, для которых $c(X) = 1$, называется унитарным слоем. Цель работы — исследование асимптотического поведения функции $\log_2 |X_n|$ для «нижней части» унитарного слоя.

Введение

Рассматриваются обыкновенные графы с нумерованными вершинами. Граф с множеством вершин $\{1, 2, \dots, n\}$ называется *стандартным*. Если X — некоторое множество графов, то через X_n обозначается множество всех стандартных n-вершинных графов из X.

Множество X графов называется *наследственным классом*, если каждый граф, изоморфный порожденному подграфу графа из X, принадлежит X. В [1] доказано, что для любого бесконечного наследственного класса X, отличного от класса всех графов, справедливо соотношение

$$\log_2 |X_n| = \left(1 - \frac{1}{c(X)}\right) \frac{n^2}{2} + o(n^2), \tag{1}$$

где $c(X)$ — натуральное число, названное в [1] индексом класса X. Если считать индекс конечного множества равным нулю, а индекс множества

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–00810).

всех графов бесконечным, то решетка наследственных классов оказывается разбитой на счетное множество *слоев*, каждый из которых состоит из классов с одним и тем же значением индекса. В [1] описаны также минимальные элементы каждого слоя. В частности, при $c = 2$ имеется только три минимальных элемента: класс двудольных графов, класс графов, дополнительных к двудольным, и класс так называемых расщепляемых графов. Поэтому слой с индексом 1 может быть охарактеризован как слой, состоящий из тех и только тех бесконечных наследственных классов, которые не содержат ни одного из трех перечисленных. Этот слой и классы этого слоя будем называть *унитарными*. Унитарный слой заслуживает особого внимания в связи с тем, что при $c = 1$ соотношение (1) не дает асимптотики для величины $\log_2 |X_n|$, знание которой важно, например, когда речь идет об экономном кодировании графов из класса X [2]. Вместе с тем этому слою принадлежат многие известные классы: леса, планарные графы, реберные графы, интервальные графы, кографы и др. Цель настоящей статьи — исследование асимптотического поведения функции $\log_2 |X_n|$ для классов из «нижней части» унитарного слоя.

Множества графов X и Y назовем *равновеликими*, если существуют положительные константы c_1, c_2, n_0 такие, что $|Y_n|^{c_1} \leqslant |X_n| \leqslant |Y_n|^{c_2}$ для всех $n > n_0$. Очевидно, равновеликость — отношение эквивалентности. Классы эквивалентности на множестве наследственных классов будем называть *ярусами*.

Все конечные наследственные классы составляют один ярус. Все наследственные классы, индекс которых больше 1, также составляют один ярус — для каждого из этих классов величина $\log_2 |X_n|$ по порядку равна n^2. Между этими крайними случаями лежит унитарный слой, и он разбивается на бесконечное множество ярусов. В этом можно убедиться, рассматривая класс Z^p всех двудольных графов, не содержащих $K_{p,p}$ в качестве подграфа. Из известных результатов о максимальном числе ребер в графах из Z^p (см., например, [3] или [4]) следуют оценки

$$c_1 n^{2-\frac{2}{p+1}} < \log_2 |Z_n{}^p| < c_2 n^{2-\frac{1}{p}} \log_2 n,$$

где c_1 и c_2 не зависят от n. Отсюда видно, что Z^p и Z^{2p} не равновелики.

В настоящей работе выделены четыре самых нижних яруса унитарного слоя, для которых $\log_2 |X_n|$ по порядку совпадает с одной из функций $1, \log_2 n,\ n,\ n \log_2 n$, и доказано, что никаких промежуточных типов поведения не существует. Для первых трех ярусов получены структурные описания и в каждом из четырех найдены все минимальные элементы.

В статье приняты следующие обозначения. VG обозначает множество вершин графа G, $\overline{G}$ — дополнительный граф. Для $v \in VG$, $A \subset VG$

через $d(v, A)$ обозначается число вершин из A, смежных с v, $N(v)$ — множество вершин, смежных с v. Подграф графа G, порожденный множеством вершин A, обозначается через $G\langle A\rangle$. Если A и B — непересекающиеся подмножества множества вершин графа G, то $G\langle A, B\rangle$ обозначает двудольный граф с множеством вершин $A \cup B$, ребрами которого являются все ребра графа G, у которых один конец лежит в A, другой — в B, и только они.

Если X — наследственный класс, то множество всех графов, дополнительных к графам из X, очевидно, тоже является наследственным классом. Этот класс будем называть *инверсным* к X.

Объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин обозначаем через $G_1 + G_2$. Если X_1 и X_2 — множества графов, то $X_1 + X_2 = \{G_1 + G_2 | G_1 \in X_1,\ G_2 \in X_2\}$.

Обозначим через $r(n)$ наибольшее число k такое, что в каждом графе с n вершинами имеется полный или пустой порожденный подграф с k вершинами. Из теоремы Рамсея следует, что $r(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

1. Константный ярус

Первый ярус унитарного слоя состоит из наследственных классов, в которых число графов с n вершинами ограничено величиной, не зависящей от n. Введем обозначения для некоторых специальных классов:

Co — класс всех полных графов;

Em — класс всех пустых графов;

St — класс, состоящий из всех пустых графов и всех звезд, т. е. графов вида $K_{1,n}$, $n \geqslant 1$;

E1 — класс всех графов не более чем с одним ребром.

Теорема 1. *Для наследственного класса X следующие утверждения равносильны*:

(1.1) $\log_2 |X_n| = O(1)$;

(1.2) *существует n_0 такое, что $X_n \setminus (\mathbf{Co}_n \cup \mathbf{Em}_n) = \varnothing$ при $n > n_0$*;

(1.3) *ни один из классов* **St**, **E1** *и инверсных к ним классов не является подмножеством класса X.*

Доказательство. Очевидно, что из (1.2) следует (1.1). Для доказательства импликации (1.1)$\Rightarrow$(1.3) достаточно заметить, что $|\mathbf{St}_n| = n + 1$ при $n \geqslant 3$ и $|\mathbf{E1}_n| = n(n-1)/2 + 1$.

Докажем импликацию (1.3)$\Rightarrow$(1.2). Допустим, что $Y = X \setminus (\mathbf{Co} \cup \mathbf{Em})$ содержит бесконечное число стандартных графов. По теореме Рамсея в нем имеются графы со сколь угодно большими пустыми либо со сколь угодно большими полными порожденными подграфами. Предположим, справедливо первое. Тогда для каждого k в Y найдется граф с пустым

k-вершинным порожденным подграфом. Так как сам этот граф не пустой, то в нем имеется порожденный подграф вида $K_{1,s}+O_{k-s}$, $s \geqslant 1$ (O_n обозначает пустой граф с n вершинами). Все эти графы тоже принадлежат множеству Y. Среди них имеются либо графы со сколь угодно большими значениями $k-s$, либо графы со сколь угодно большими значениями s. Но в первом случае в X содержатся все графы из **E1**, а во втором — все графы из **St**. Аналогично рассматривается случай, когда в Y имеются графы со сколь угодно большими полными подграфами. Теорема 1 доказана.

Так как число n-вершинных графов из каждого класса, указанного в (1.3), выражается полиномом от n, то следующим будет ярус, состоящий из классов, в которых число графов растет с полиномиальной скоростью.

2. Полиномиальный ярус

Две вершины графа назовем *подобными*, если не существует третьей вершины, которая смежна только с одной из них. Легко видеть, что подобие — отношение эквивалентности и каждый класс эквивалентности порождает полный или пустой подграф.

Обозначим через **Ma** класс всех графов, у которых каждая компонента связности содержит не более двух вершин.

Теорема 2. *Для наследственного класса X следующие утверждения равносильны*:

(2.1) $\log_2 |X_n| = O(\log_2 n)$;

(2.2) *существует k такое, что в каждом графе из X_n имеется класс подобия, содержащий не менее $n-k$ вершин*;

(2.3) *ни один из классов* **Ma**, **Co+Em**, **Co+Co**, **St+Em** *и инверсных к ним классов не является подмножеством класса X.*

Доказательство. Из (2.2) следует (2.1), так как имеется не более

$$\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}+2}$$

стандартных графов с n вершинами, среди которых $n-k$ подобны между собой.

Докажем, что из (2.1) следует (2.3). В классе **Co + Em** имеется $2^n - n$, в классе **Co + Co** имеется 2^{n-1}, а в классе **St + Em** имеется $n2^{n-1} - n(n+1)/2 + 1$ стандартных графов с n вершинами. Графы из **Ma** находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями множества вершин на подмножества, в каждом из которых содержится не более двух элементов. Число таких разбиений не меньше $\lfloor n/2 \rfloor !$. Итак, в каждом классе, о котором говорится в (2.3), число графов растет по крайней мере с экспоненциальной скоростью.

Остается доказать, что из (2.3) следует (2.2). Пусть X — бесконечный наследственный класс, не содержащий ни одного класса из (2.3). Обозначим через $\alpha(G)$ число независимости графа G (наибольшее число вершин в независимом множестве, т. е. в множестве, порождающем пустой подграф) и рассмотрим множество Y всех графов из X таких, что $\alpha(G) \geqslant \alpha(\overline{G})$.

Возьмем $G \in Y$, и пусть множество вершин A порождает в G наибольший пустой подграф, а $B = VG \setminus A$. Выберем произвольное натуральное число s и выделим в B подмножества B_1, B_2, B_3 такие, что B_1 состоит из всех вершин x таких, что $d(x, A) < s$; B_2 — из всех вершин таких, что $d(x, A) > |A| - s$; B_3 — из всех вершин, не вошедших в $B_1 \cup B_2$. Пусть $|A| = a$ и $|B_i| = b_i$, $i = 1, 2, 3$.

Для каждой вершины $y \in B_3$ в множестве A есть s смежных и s несмежных с ней. Эти $2s$ вершин вместе с y порождают в G подграф $K_{1,s} + O_s$. Так как класс $\mathbf{St} + \mathbf{Em}$ не включен в X, то при некотором s множество B_3 должно оказаться пустым для любого $G \in Y$. Зафиксируем такое s.

Положим $t = \min(\lfloor a/s \rfloor,\ r(b_2))$. Тогда в B_2 найдется подмножество D из t вершин, порождающее полный или пустой подграф. Каждая вершина из D несмежна не более чем с $s - 1$ вершиной из A. Поэтому в A есть не менее $k - t(s - 1) \geqslant t$ вершин, каждая из которых смежна со всеми вершинами из D. Таким образом, в G имеется порожденный подграф $K_{t,t}$ или подграф $\overline{K_t + O_t}$. Заметим, что $a \geqslant r(b_2)$ — это следует из выбора Y и A. Поэтому если b_2 могло бы быть произвольно большим для графов из Y, то это было бы верно и для t. Но тогда Y включал бы один из классов, инверсных к $\mathbf{Co}+\mathbf{Co}$ или $\mathbf{Co}+\mathbf{Em}$. Значит, существует q такое, что $b_2 \leqslant q$ для каждого $G \in Y$.

Теперь рассмотрим множество B_1. Если в нем имеется полный подграф с $r(b_1)$ вершинами, то, рассуждая как выше, приходим к выводу, что в G есть порожденный подграф $K_t + O_t$, где $t = \min(\lfloor a/s \rfloor,\ r(b_1))$. Допустим, в B_1 есть подмножество C мощности $r = r(b_1)$, порождающее пустой подграф. В двудольном графе $G\langle A, C\rangle$ множество A является наибольшим независимым множеством. Поэтому C — наименьшее вершинное покрытие. Из теоремы Кенига — Холла следует, что в этом графе имеется паросочетание, насыщающее все вершины из C. Возьмем паросочетание и в множестве A выберем подмножество A', состоящее из всех вершин, инцидентных ребрам паросочетания, для которых $d(x, C) < s$. Так как число ребер в $G\langle A, C\rangle$ не больше $r(s-1)$ и не меньше $(r - |A'|)s$, то $|A'| \geqslant r/s$. Пусть C' — множество вершин, поставленное паросочетанием в соответствие с A'. В графе $G\langle A', C'\rangle$ найдем порожденный подграф H, изоморфный графу mK_2 с наибольшим m. В $A' \cup C'$ имеется не более $2m(s-1)$ вершин, смежных с вершинами подграфа H. С другой стороны, среди двух вершин в $G\langle A', C'\rangle$, инцидентных одному ребру паросочетания, хотя бы одна вершина должна быть смежна с какой-нибудь вершиной из H (иначе можно было бы увеличить H, добавив это ребро). Значит, $2m(s-1) \geqslant |A'|$ и $m \geqslant r/(2s(s-1))$. Таким образом, если b_1 принимало бы сколь угодно большие значения для графов из Y, то в Y содержался бы один из классов $\mathbf{Co} + \mathbf{Em}$ или $\mathbf{Ma}$. Следовательно, существует p такое, что $b_1 \leqslant p$ для всех графов из Y.

Итак, существуют s, p, q такие, что если в любом графе $G \in Y$ выбрать множества A, B_1, B_2, B_3 указанным способом, то $B_3 = \varnothing$, $|B_1| \leqslant p$, $|B_2| \leqslant q$. При этом в множестве A имеется не более $p(s-1)$ вершин, каждая из которых смежна с какой-либо вершиной из B_1, и не более $q(s-1)$ вершин, каждая из которых несмежна с какой-либо вершиной из B_2. Все остальные вершины из A, число которых не меньше $n-(p+q)s$, несмежны со всеми вершинами из B_1 и смежны со всеми вершинами из B_2. Значит, они принадлежат одному классу подобия. Из соображений симметрии ясно, что это верно и для $X \setminus Y$. Теорема 2 доказана.

Итак, полиномиальный ярус характеризуется восемью «запрещенными» классами. Из приведенных в доказательстве подсчетов и оценок видно, что для каждого из этих классов функция $\log_2 |X_n|$ растет не медленнее чем линейно. Поэтому следующим ярусом будет ярус с экспоненциальным ростом числа графов.

3. Экспоненциальный ярус

Пусть X — произвольное множество двудольных графов. Сопряженным к X назовем множество графов G, у которых множество вершин можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 такие, что граф $G\langle V_1\rangle$ — пустой, граф $G\langle V_2\rangle$ — полный, граф $G\langle V_1, V_2\rangle$ принадлежит множеству X.

Введем в рассмотрение еще два класса двудольных графов:

Mc — класс всех двудольных графов, у которых каждая вершина одной доли смежна со всеми вершинами другой доли, кроме, может быть, одной; иначе говоря, $G \in \mathbf{Mc}$ тогда и только тогда, когда существует граф $H \in \mathbf{Ma}$ с тем же множеством вершин, дополняющий G до полного двудольного графа;

Lo — класс всех двудольных графов, у которых для любых двух вершин из одной доли окрестность одной из них включена в окрестность другой; **Lo** можно определить как класс всех графов, не содержащих C_3, C_5 и паросочетания на четырех вершинах в качестве порожденных подграфов.

Теорема 3. *Для наследственного класса X следующие утверждения равносильны:*

(3.1) $\log_2 |X_n| = O(n)$;

(3.2) *существует такое k, что во всяком графе из X имеется не более k классов подобия вершин;*

(3.3) *ни один из классов* **Ma**, **Mc**, **Lo**, *а также из сопряженных и инверсных к ним классов не является подмножеством класса X.*

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение. Введем обозначения для некоторых двудольных графов, имеющих в каждой доле по n вершин, занумерованных числами от 1 до n:

L_n^1 — граф, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда их номера совпадают;

L_n^2 — граф, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда их номера различны;

L_n^3 — граф, в котором вершина с номером i из первой доли смежна с теми и только теми вершинами второй доли, номера которых не превосходят i;

L_n^4 — граф, в котором вершина с номером i из первой доли смежна с теми и только теми вершинами второй доли, номера которых меньше i.

Ясно, что $L_n^1 \in$ **Ma**, $L_n^2 \in$ **Mc**, L_n^3 и L_n^4 — графы из **Lo**, причем L_n^3 содержит L_{n-1}^4, а L_n^4 содержит L_{n-1}^3 в качестве порожденного подграфа. Легко также убедиться, что любой граф из **Lo** изоморфен порожденному подграфу графа L_n^3 при некотором n. Поэтому если какой-либо наследственный класс содержит бесконечное число графов вида L_n^3 или L_n^4, то в нем содержатся все графы из **Lo**.

Обозначим через $t_i(G)$ наибольшее n такое, что граф G содержит порожденный подграф, изоморфный графу L_n^i. Пусть $t(G) = \sum\limits_{i=1}^{4} t_i(G)$.

Лемма 1. *Если в двудольном графе G одна из долей имеет n вершин, окрестности которых попарно различны, то $t(G) \geqslant \log_2 \log_2 2n$.*

Доказательство. Индукция по n. При $n > 1$ пусть G — двудольный граф с долями A и B, $|A| = n$ и окрестности вершин доли A попарно различны. Выберем такую вершину $b \in B$, которая смежна хотя бы с одной, но не со всеми вершинами из A, и положим $A_1 = N(b)$, $A_2 = A \setminus A_1$. Допустим, что $|A_1| \geqslant |A_2|$. Для произвольной вершины a из A_2 положим $B_1 = N(a)$, $B_2 = B \setminus (B_1 \cup \{b\})$ и рассмотрим подграфы $G_1 = G\langle A_1 \cup B_1\rangle$, $G_2 = G\langle A_1 \cup B_2\rangle$. Пусть число попарно различных окрестностей вершин из A_1 в графе G_1 равно k_1, а в графе G_2 равно k_2. Так как в G все окрестности вершин из A_1 попарно различны, то $k_1 k_2 \geqslant |A_1| \geqslant n/2$. Значит, $\max(k_1 k_2) \geqslant \sqrt{n/2}$. Возьмем в графе G_1 подграф типа L_p^2 с наибольшим p и добавим к нему вершины a и b. Получим подграф типа L_{p+1}^2 в графе G. Аналогично из подграфа типа L_q^4 в графе G_2 получаем подграф типа L_{q+1}^4 в графе G. Следовательно, $t(G) \geqslant \max(t(G_1), t(G_2)) + 1$. Но по предположению индукции имеем $\max(t(G_1), t(G_2)) \geqslant \log_2 \log_2 2\max(k_1, k_2) \geqslant \log_2 \log_2 2\sqrt{n/2} = \log_2 \log_2 2n - 1$.

Случай $|A_2| > |A_1|$ рассматривается аналогично, только вершина a выбирается в множестве A_1, а в подграфах $G\langle A_2 \cup B_1\rangle$, $G\langle A_2 \cup B_2\rangle$ следует взять подграфы типов L_p^1 и L_q^3 соответственно. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Имеется не более $k^n 2^{\binom{k}{2}+k}$ графов, в каждом из которых содержится не более k классов подобия вершин. Поэтому из (3.2) следует (3.1).

Оценка числа графов с n вершинами из **Ma**, приведенная в доказательстве теоремы 2, верна и для **Mc**. Такого же вида оценка получается для числа графов из **Lo**, если заметить, что из графа L_n^3 перенумерованием вершин можно получить $n!$ различных графов из $\mathbf{Lo}_{2n}$. Эти оценки, распространяемые на инверсные и сопряженные классы, очевидно, доказывают, что из (3.1) следует (3.3).

Докажем, что из (3.3) следует (3.2). Если условие (3.2) не выполняется для класса X, то для любого k в X есть граф G_k, содержащий не менее k классов подобия. Из каждого класса в G_k выберем по одной вершине, а затем в множестве выбранных вершин найдем подмножество W_k из $r(k)$ вершин, порождающих полный или пустой подграф. Положим $U_k = VG_k \setminus W_k$.

Окрестности вершин из W_k попарно различны. Поэтому к двудольному графу $G_k\langle W_k, U_k\rangle$ можно применить лемму 1, из которой следует, что в нем имеется порожденный подграф, изоморфный одному графу из L_p^i с $p \geqslant (\log_2 \log_2 2r(k))/4$. Применив теорему Рамсея к графу $G_k\langle U_k\rangle$, приходим к выводу, что для любого n в X имеется граф G с множеством вершин $A \cup B$, $|A| = |B| = n$, в котором каждый подграф $G\langle A\rangle, G\langle B\rangle$ — пустой или полный, а $G\langle A, B\rangle$ изоморфен одному из L_n^i. Так как один из четырех вариантов реализуется бесконечно много раз, то в X содержится один из классов, перечисленных в (3.3). Теорема 3 доказана.

4. Факториальный ярус

Для каждого класса, фигурирующего в (3.3), функция $\log_2 |X_n|$ имеет порядок $n \log_2 n$, т. е. по порядку совпадает с $\log_2 n!$. Это дает основание назвать следующий ярус факториальным. Таким образом, в факториальном ярусе имеется девять минимальных элементов и это почти все, что известно автору об этом ярусе. Вместе с тем факториальный ярус значительно интереснее предыдущих хотя бы тем, что содержит многие известные классы: леса, планарные графы, реберные графы и т. д. К тому же этот ярус и в чисто количественном отношении богаче предыдущих. Используя теорему 3, нетрудно показать, что каждый экспоненциальный (а тем более полиномиальный или константный) класс определяется конечным множеством запрещенных подграфов. Поэтому множество таких классов счетно. С другой стороны, уже в классе всех лесов содержится континуальное семейство факториальных подклассов. Действительно, определим мост как дерево, в котором степени вершин не превосходят 3, причем имеется точно две вершины степени 3 и каждая из них смежна точно с двумя вершинами степени 1. Если X — произвольное множество мостов, то класс всех деревьев, не содержащих графов из X в качестве порожденных подграфов, включает множество **Ма** и, следовательно, является факториальным. Эти классы, соответствующие различным X, различны, так как ни один мост не является подграфом другого моста.

Для более сильного типа наследственности можно охарактеризовать все факториальные классы, определяемые конечными множествами запрещенных подграфов.

Класс X назовем *сильно наследственным*, если всякий граф, изоморфный некоторому подграфу графа из X, принадлежит X. Всякий сильно наследственный класс может быть задан множеством запрещенных подграфов, минимальных по отношению «быть подграфом» графов, не содержащихся в этом классе [2]. Если это множество конечно, класс назовем *конечно определенным.*

Лемма 2. *Если X — сильно наследственный класс и существует дерево T, не принадлежащее X, то $\log_2 |X_n| = O(n \log_2 n)$.*

Доказательство. Если в графе G степень каждой вершины не меньше чем k, то любое дерево с $k+1$ вершиной является подграфом графа G. Это легко доказать индукцией по k. Поэтому если t — число вершин в T, то в любом графе $G \in X$ имеется вершина степени не более $t-2$. Если такую вершину удалить из G, то в оставшемся графе также будет вершина, степень которой не превосходит $t-2$, и т. д. Отсюда следует, что в каждом графе из X_n число ребер не превосходит $n(t-2)$. Поэтому

$$|X_n| \leqslant \binom{\binom{n}{2}}{n(t-2)} < n^{2tn}.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любого конечно определенного наследственного класса X, содержащего все леса, величина $\log_2|X_n|/(n\log_2 n)$ стремится к ∞ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Пусть k — длина наибольшего цикла, встречающегося в запрещенных подграфах для класса X. Тогда X содержит все графы, обхват которых не меньше $k+1$. Известно (см., например, [5]), что среди таких графов имеется граф, в котором число ребер по порядку не меньше $n^{1+1/k}$. Каждый остовный подграф этого графа либо не содержит циклов, либо имеет обхват не меньше чем $k+1$. Следовательно, такой подграф принадлежит классу X. Поэтому $|X_n| \geqslant 2^{cn^{1+1/k}}$ при некотором $c > 0$.

Теорема 4. *Для конечно определенного сильно наследственного класса X равенство $\log_2|X_n| = O(n\log_2 n)$ справедливо тогда и только тогда, когда класс всех лесов не является подмножеством класса X.*

Утверждение теоремы следует из лемм 2 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е.** Область значений энтропии наследственных классов графов // Дискрет. математика. 1992. Т. 4, № 2. С. 148–157.
2. **Алексеев В. Е.** Наследственные классы и кодирование графов // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1982. Вып. 39. С. 151–164.
3. **Эрдеш П., Спенсер Дж.** Вероятностные методы в комбинаторике. М.: Мир, 1976.
4. **Bollobas B.** Extremal graph theory. London: Acad. Press, 1978.
5. **Lazebnik F., Ustimenko V. A., Woldar A. J.** A new series of dense graphs of high girth // Bull. Amer. Math. Soc. 1995. V. 32, N 1. P. 73–79.

Адрес автора:

Нижегородский
государственный университет,
пр. Гагарина, 23, корп. 2,
603600 Нижний Новгород,
ГСП-20, Россия

Статья поступила
24 января 1997 г.