ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 1997. Том 4, № 1, 13–32

УДК 519.854

УЛУЧШЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДВУХМАШИННОЙ ЗАДАЧИ FLOW SHOP С НЕОДНОВРЕМЕННЫМ ПОСТУПЛЕНИЕМ РАБОТ*)

К. Н. Каширских, К. Н. Поттс, С. В. Севастьянов

Рассматривается задача flow shop с двумя машинами, произвольными временами поступления работ и критерием «минимум длины расписания». Известно, что данная задача NP-трудна, а из алгоритмов ее приближенного решения наилучшими на сегодняшний день были алгоритм Поттса (1985) с относительной погрешностью (т. е. отношением длины приближенного расписания к длине оптимального), в худшем случае не превосходящей 5/3, и трудоемкостью (т. е. числом шагов) $O(n^3 \log n)$, а также полиномиальная аппроксимационная схема Холл (1995), позволяющая находить решения с любой заданной точностью, что требует, однако, существенно большего времени счета. В настоящей работе на основе алгоритма Поттса разработан улучшенный алгоритм для нахождения расписания с относительной погрешностью, не превосходящей 3/2, при той же оценке трудоемкости.

Введение

Рассматривается следующая задача. Имеются машины A, B и множество работ $J = \{1, \dots, n\}$. Работа $j \in J$ состоит из двух последовательных операций: сначала выполняется операция O_A^j на машине A за a_j единиц времени, а затем — операция O_B^j на машине B за b_j единиц времени. Для каждой работы $j \in J$ ее первая операция не может начаться раньше заданного момента $r_j \geqslant 0$. В каждый момент времени на каждой машине может выполняться не более одной работы. Каждая операция O_X^j не может прерываться в процессе выполнения, т. е., начав выполняться в некоторый момент s_X^j, операция O_X^j выполняется до момента своего завершения. Таким образом, расписание выполнения работ

*) Работа третьего автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01591).

полностью определяется совокупностью $S = \{s^j_X \mid j \in J,\ X \in \{A, B\}\}$ моментов начала каждой операции. Величина

$$C_{\max}(S) \doteq \max_{j\in J}(s^j_B + b_j)$$

называется *длиной* расписания. Требуется найти расписание минимальной длины, т. е. такое расписание S_{opt}, что

$$C_{\max}(S_{\text{opt}}) = \min_S C_{\max}(S) \doteq C^*.$$

Согласно классификации из [5] сформулированная задача записывается как $F2|r_j|C_{\max}$.

Заметим, что в такой постановке существенно, что каждая работа состоит **ровно из двух** операций. В более общей постановке задачи (F^*2) допускается существование работ, состоящих из одной операции: только O^j_A или только O^j_B. В последнем случае возможно выполнение операции O^j_B, начиная с момента r_j, не дожидаясь, чтобы машина A закончила работу, начатую до момента r_j. В задаче $F2$ это невозможно, так как даже в случае $a_j = 0$ необходимо сначала поставить работу на машину A («отметиться»), когда A освободится, и лишь затем операция O^j_B поступит в очередь на машину B. Таким образом, в задаче $F2$ как бы предполагается, что все операции имеют *положительную* длительность (хотя, возможно, сколь угодно близкую к нулю, что численно может выражаться нулем).

Различие задач $F2|r_j|C_{\max}$ и $F^*2|r_j|C_{\max}$ хорошо иллюстрируется на следующем примере. Пусть $n = 2$, первая работа состоит из операций $\{O^1_A, O^1_B\}$, а вторая — из единственной операции O^2_B; $a_1 = 1$, $b_1 = 1/2$, $r_1 = 0$, $b_2 = 1/2$, $r_2 = 1/2$. Если предполагать, что работа 2 имеет операцию O^2_A нулевой длины (т. е. рассматривается задача $F2$), то $C_{\max}(S_{\text{opt}}) = 2$, в то время как оптимум задачи F^*2 равен $C_{\max}(S^*_{\text{opt}}) = 3/2$. Таким образом, отношение оптимумов этих задач достигает величины $C_{\max}(S_{\text{opt}})/C_{\max}(S^*_{\text{opt}}) = 4/3$. (Авторам не известно, является ли это значение отношения наихудшим.) Анализ подобной задачи с пропущенными операциями ($F^*2|no\ wait|C_{\max}$) содержится в [2]. Мы же в дальнейшем рассматриваем задачу $F2|r_j|C_{\max}$.

В частном случае, когда все r_j равны, задача решается известным алгоритмом Джонсона [3] за время $O(n \log n)$. В общем случае, когда моменты поступления работ различны, в [6] доказана NP-трудность задачи, что делает актуальным построение алгоритмов полиномиальной трудоемкости (эвристик) для приближенного решения этой задачи с гарантированными оценками точности. В качестве такой оценки ниже рассматривается ***оценка погрешности алгоритма H в наихудшем случае***, т. е. такая константа ρ, что при любом входе задачи длина расписания S^H, построенного алгоритмом H, удовлетворяет неравенству $C_{\max}(S^H)/C^* \leqslant \rho$.

В [7] было описано четыре эвристики. Для трех из них доказано, что их погрешность в худшем случае равна 2 при трудоемкости каждой эвристики $O(n \log n)$. Четвертая эвристика, основанная на итеративном использовании третьей эвристики, гарантирует построение расписания с лучшей оценкой погрешности, равной 5/3, при трудоемкости $O(n^3 \log n)$. Наконец, в работе [1] для решения рассматриваемой задачи была построена «полиномиально-временная аппроксимационная схема» (PTAS), т. е. серия алгоритмов, позволяющая для сколь угодно малого ε за полиномиальное время находить расписание с гарантированной погрешностью $1 + \varepsilon$. Для нахождения такого расписания достаточно некоторое число раз (довольно большое, но ограниченное константой при фиксированных m и ε) решить линейную систему уравнений с $O(n)$ переменными. Это можно сделать, например, алгоритмом Кармаркара [4], требующим выполнения не менее $O(n^{5.5} \log^3 n \log\log n)$ элементарных действий.

В данной работе мы представляем алгоритм, разработанный на основе четвертой эвристики из [7]. При той же (т. е. $O(n^3 \log n)$) оценке трудоемкости его погрешность не превосходит 3/2.

1. Исходные понятия и обозначения

Далее через $s(X, S)$ будем обозначать момент начала операции X в расписании S. Вместо $s(O_A^j, S)$ будем писать также $s(j, S)$ (обозначая момент начала работы j), а вместо $C_{\max}(S)$ — коротко $C(S)$.

Легко понять, что при решении задачи достаточно ограничиться рассмотрением расписаний, в которых порядки прохождения работ на машинах A и B совпадают. Таким образом, для каждой перестановки работ σ порядок выполнения операций этих работ задается сетью G_σ, изображенной на рис. 1.

Вершины этой сети соответствуют операциям, а дуги задают ограничения на порядок выполнения этих операций. Каждая вершина-операция имеет вес, равный длительности этой операции. Поступление работы j в момент r_j интерпретируется как выполнение некоторой *подготовительной* операции O_P^j длительности r_j, предшествующей операции O_A^j. Подготовительные операции не требуют никаких машин и могут выполняться независимо друг от друга.

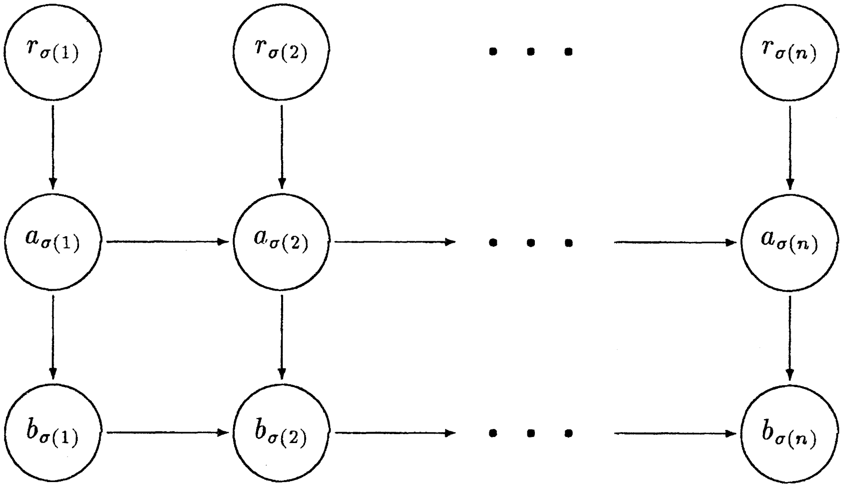

Рис. 1. Сеть G_σ

Длиной пути в сети G назовем сумму весов вершин, принадлежащих этому пути. В нашем случае длина пути равна сумме длительностей операций-вершин, принадлежащих этому пути. Каждая сеть G, определенная на некотором множестве операций, однозначно определяет наиболее раннее расписание S выполнения этих операций. Из сетевого планирования известно, что длина такого расписания S равна длине критического пути в сети G.

Учитывая вид критического пути в сети G_σ (см. рис. 1), длина $C(S_\sigma)$ раннего расписания S_σ, задаваемого сетью G_σ, выражается формулой

$$C(S_\sigma) = r_{\sigma(u)} + \sum_{i=u}^{v} a_{\sigma(i)} + \sum_{i=v}^{n} b_{\sigma(i)} \qquad (1)$$

при некоторых u и v ($1 \leqslant u \leqslant v \leqslant n$). В сети может быть несколько критических путей. Поэтому чтобы избежать неопределенности при задании формулы (1), будем считать, что u и v — минимально возможные индексы, при которых справедливо (1). Очевидно, что в расписании S_σ работа $\sigma(u)$ начинается в момент своего появления $r_{\sigma(u)}$, а момент окончания операции $O_A^{\sigma(v)}$ совпадает с моментом начала операции $O_B^{\sigma(v)}$. Работу $\sigma(v)$ будем называть *переходной* в расписании S_σ, поскольку по этой работе критический путь переходит с машины A на машину B. Кроме того, момент $r_{\sigma(u)}$ либо равен нулю, либо непосредственно перед этим моментом машина A простаивает (что вытекает из минимальности u). Следовательно, если перестановка работ σ получена каким-либо жадным алгоритмом (когда машина не простаивает, если есть работы, готовые к выполнению на ней), то можно утверждать, что каждая работа $\sigma(j)$, $j \geqslant u$, поступает в систему не раньше момента $r_{\sigma(u)}$. Это позволяет выписать нижние оценки для оптимума C^* при условии, что перестановка σ получена жадным алгоритмом:

$$C^* \geqslant r_{\sigma(u)} + \sum_{i=u}^{n} a_{\sigma(i)}, \tag{2}$$

$$C^* \geqslant r_{\sigma(u)} + \sum_{i=u}^{n} b_{\sigma(i)}. \tag{3}$$

Далее, следуя работе [7], по заданной перестановке σ определим четыре множества работ:

$$J_1 = \{\sigma(i) \mid u \leqslant i \leqslant v,\ a_{\sigma(i)} \leqslant b_{\sigma(i)}\}, \tag{4}$$

$$J_2 = \{\sigma(i) \mid u \leqslant i \leqslant v,\ a_{\sigma(i)} > b_{\sigma(i)}\}, \tag{5}$$

$$J_3 = \{\sigma(i) \mid v \leqslant i \leqslant n,\ a_{\sigma(i)} \leqslant b_{\sigma(i)}\}, \tag{6}$$

$$J_4 = \{\sigma(i) \mid v \leqslant i \leqslant n,\ a_{\sigma(i)} > b_{\sigma(i)}\}, \tag{7}$$

а также множества $J'_i = J_i \setminus \{\sigma(v)\}$, $i = 1, \ldots, 4$, и $J_\sigma = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4$. Положим $A_i = \sum\limits_{j \in J_i} a_j$, $B_i = \sum\limits_{j \in J_i} b_j$, $A'_i = \sum\limits_{j \in J'_i} a_j$, $B'_i = \sum\limits_{j \in J'_i} b_j$. Это позволяет записать формулы (1)–(3) в более простой форме:

$$C(S_\sigma) = r_{\sigma(u)} + A_1 + A_2 + B_3 + B_4, \tag{8}$$

$$C^* \geqslant r_{\sigma(u)} + A_1 + A_2 + A'_3 + A'_4, \tag{9}$$

$$C^* \geqslant r_{\sigma(u)} + B'_1 + B'_2 + B_3 + B_4. \tag{10}$$

В последующих выкладках в качестве нижней оценки для C^* мы будем, как правило, использовать длину того или иного пути в сети G_{σ^*}, задающей оптимальное расписание S_{σ^*}. Поскольку нам не известны оптимальная перестановка работ σ^* и сеть G_{σ^*}, путь будет задаваться выражением типа: «В оптимальном расписании S_{opt} рассмотрим путь, проходящий по работам из множества J' с переходной работой j'». Это будет означать, что путь в сети, определяющей расписание S_{opt}, начинается с подготовительной операции $O_P^{j''}$ веса $r_{j''} = \min_{j \in J'} r_j$, содержит операции $O_A^{j'}, O_B^{j'}$ работы j' (путь *переходит* по работе j' с машины A на машину B) и содержит по одной операции остальных работ из множества J'.

2. Три простых эвристики и их свойства

В **первой** эвристике, обозначаемой через R, работы упорядочиваются по неубыванию времен их появления ($r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_n$), после чего строится наиболее раннее расписание для данной последовательности работ.

Во **второй** эвристике, обозначаемой через J, работы упорядочиваются по правилу Джонсона, т. е. сначала выполняются работы с соотношением $a_j \leqslant b_j$ (будем называть их *малыми*) в порядке неубывания a_j, а затем — остальные (*большие*) работы в порядке невозрастания b_j. В случае, когда все работы имеют одинаковые времена появления, такое правило, как известно из [3], определяет оптимальную последовательность работ. Для рассматриваемой задачи этот алгоритм, как показано в [7], позволяет находить расписание с погрешностью, не превосходящей 2, причем оценка точна.

Третья эвристика, обозначаемая через RJ, объединяет идеи первых двух: каждый раз, когда требуется выбрать очередную работу на освободившуюся машину A, мы выбираем работу из уже поступивших, но еще не начавших выполняться работ по правилу Джонсона, т. е.

- любая малая работа приоритетнее любой большой;
- из двух малых работ приоритетнее та, которая имеет меньшую a-операцию;
- из двух больших приоритетнее та, которая имеет бóльшую b-операцию;
- при одинаковой длительности двух сравниваемых операций для определенности даем больший приоритет работе с меньшим номером.

Таким образом, на любом подмножестве работ однозначно определяется наиболее приоритетная работа.

Несмотря на попытку объединения идей эвристик R и J, эвристика RJ имеет ту же погрешность, в худшем случае равную 2.

Заметим, что эвристики R и RJ являются жадными (и значит, для построенных ими перестановок σ справедливы оценки (2), (3), равно как и (9), (10)), а эвристика J этим свойством не обладает.

3. Эвристика RJ'

В [7] была доказана

Лемма 1 [7]. *Пусть для заданного входа рассматриваемой задачи алгоритмом RJ построено раннее расписание S_σ и согласно (4)–(7) определены множества J_i, $i = 1, \dots, 4$. Тогда если $J_2 = \varnothing$ или $J_3 = \varnothing$, то $C(S_\sigma)/C^* \leqslant 3/2$.*

Утверждение леммы легко вытекает из соотношений (8)–(10) и неравенства $C^* \geqslant a_{\sigma(v)} + b_{\sigma(v)}$.

Четвертая эвристика, описанная в [7] и обозначаемая через RJ', работает в предположении, что построенное алгоритмом RJ расписание S_σ не удовлетворяет условиям леммы 1.

Алгоритм RJ' состоит из последовательности итераций, на каждой из которых (кроме первой) сначала переопределяется в сторону увеличения момент поступления одной из работ (называемой далее *изменяемая*), а затем применяется алгоритм RJ. Первая итерация состоит лишь в применении RJ. Опишем более подробно, как выбирается изменяемая работа и как изменяется момент ее появления в системе.

Если после очередного применения алгоритма RJ построенное расписание S_σ удовлетворяет условиям леммы 1 (т. е. $J_2 = \varnothing$ либо $J_3 = \varnothing$), то RJ' прекращает работу. В противном случае (т. е. если $J_2 \neq \varnothing$ и $J_3 \neq \varnothing$) выполняется следующая итерация, причем выполняемая последней работа $\sigma(t) \in J_2$ выбирается в качестве изменяемой. Новый момент $r_{\sigma(t)}$ появления работы $\sigma(t)$ полагается равным

$$r_{\sigma(t)} := \min_{i \in J_3}\{r_i + a_i\}, \tag{11}$$

и затем вновь строится расписание алгоритмом RJ.

В качестве результата работы алгоритма RJ' берется лучшее расписание из совокупности построенных расписаний. Алгоритм RJ' описан.

Замечаем, что до итерации I, на которой работа $\sigma(t)$ выбирается в качестве изменяемой, для каждой работы $i \in J_3$ выполнялось соотношение

$$r_{\sigma(t)} < r_i \tag{12}$$

(в противном случае согласно принципу алгоритма RJ малые работы из J_3 не могли оказаться в расписании S_σ после большой работы $\sigma(t)$). После же итерации I в результате присвоения (11) по крайней мере для одной работы $i \in J_3$ будет выполняться противоположное неравенство:

$$r_{\sigma(t)} \geqslant r_i. \tag{13}$$

Так как r_i изменяются только для больших работ и только в сторону увеличения, то однажды достигнутое для какой-то большой работы $\sigma(t)$ и какой-то малой работы i неравенство (13) не нарушится в ходе дальнейшей работы алгоритма. Отсюда следует, что не позднее чем через $n^2/4$ итераций одно из множеств J_2, J_3 окажется пустым и алгоритм RJ' закончит свою работу.

Представляемая ниже эвристика MRJ' является модификацией эвристики RJ'.

4. Эвристика MRJ'

Пусть j_b — наиболее приоритетная по Джонсону большая работа, а j_l — наименее приоритетная малая работа. По определению приоритета имеем:

- $b_{j_b} \geqslant b_j$ для любой большой работы j;
- $a_{j_l} \geqslant a_j$ для любой малой работы j.

Малую работу j_M назовем *монстром*, если

$$a_{j_M} > \sum a_j,$$

где сумма берется по всем остальным малым работам. Таким образом, если для заданного входа задачи работа-монстр существует, то она совпадает с работой j_l, т. е. является наименее приоритетной малой работой.

Схема G алгоритма MRJ' приведена на рис. 2. Нетрудно видеть, что G является деревом специального вида.

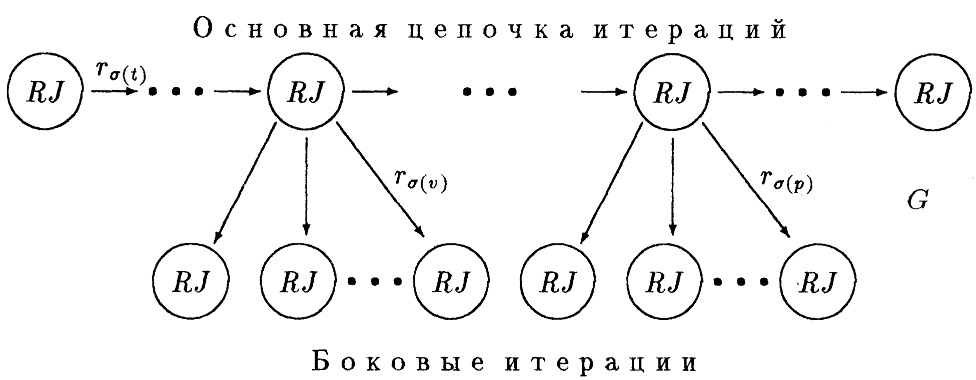

Рис. 2. Схема алгоритма MRJ'

Вершины дерева G соответствуют итерациям алгоритма RJ, а дуги задают порядок выполнения этих итераций. Кроме того, на каждой итерации, кроме первой, перед построением очередного расписания по алгоритму RJ переопределяется момент поступления одной из работ (так называемой *изменяемой* работы); номер этой работы проставляется в схеме на дуге, входящей в данную вершину-итерацию.

В дереве имеется *основная* (горизонтальная) цепочка итераций, совпадающая с цепочкой итераций алгоритма RJ'. Кроме того, от некоторых вершин основной цепочки (называемых *итерациями ветвления*) отходят вниз *боковые итерации*. Мы будем различать *итерации ветвления по большой работе* (ИВБР) и *итерации ветвления* *по малому монстру* (ИВММ). А именно, вершина-итерация основной цепочки является ИВБР, если

- в построенном на этой итерации расписании S_σ переходная работа $\sigma(v)$ является большой и совпадает с работой j_b;
- множество J_2' не пусто;
- множество J_3 не пусто.

Вершина-итерация основной цепочки является ИВММ, если

- переходная работа $\sigma(v)$ является малой и совпадает с работой-монстром j_M;
- множество J_3' не пусто;
- итерация не является последней итерацией основной цепочки.

Других итераций ветвления, кроме ИВБР и ИВММ, в дереве G не существует.

Боковое ветвление от каждой ИВБР I осуществляется следующим образом. В множестве J_2' находится работа $\sigma(p)$, выполняемая последней в расписании S_σ среди работ множества J_2'. Для каждой работы $i \in J_3$ определяется боковая итерация, отходящая от итерации I, с изменяемой работой $\sigma(p)$:

$$r_{\sigma(p)} := r_i + a_i.$$

Боковое ветвление от каждой ИВММ осуществляется аналогично с той разницей, что каждой работе $i \in J_3'$ ставится в соответствие боковая ветвь, на которой переопределяется $r_{\sigma(v)} = r_{j_M}$:

$$r_{j_M} := r_i + a_i.$$

В качестве результата работы алгоритма MRJ' из совокупности построенных расписаний выбирается расписание минимальной длины. Алгоритм MRJ' описан.

5. Анализ трудоемкости алгоритма MRJ'

Оценим число итераций алгоритма. Сначала убедимся, что число ИВБР в дереве G не превосходит $O(n)$. Действительно, на итерации основной цепочки, следующей за произвольной ИВБР, в результате переопределения момента $r_{\sigma(t)}$ происходит замена неравенства (12) на (13) для $\sigma(t) = j_b$ и хотя бы одной малой работы i. Таким образом, число ИВБР не превышает числа малых работ.

Установим аналогичную оценку для числа ИВММ. Для этого убедимся, что после каждой ИВММ на следующей итерации основной цепочки происходит замена неравенства (12) на (13) для некоторой большой работы $\sigma(t)$ и малой работы $i = j_M$. Действительно, если минимум в (11) достигается на работе $i = j_M$, то в результате присвоения (11) получаем (13) при $i = j_M$. Если же минимум достигается при $i \in J_3'$, то после присвоения (11) неравенство $r_{\sigma(t)} > r_{j_M}$ вытекает из соотношений $r_{\sigma(t)} \geqslant r_i > s(j_M, S_\sigma) \geqslant r_{j_M}$. (Последние неравенства следуют из того, что любая работа $i \in J_3'$ приоритетнее работы j_M, но выполняется в расписании S_σ позже j_M.) Таким образом, число ИВММ не превосходит числа больших работ в исходной совокупности. (Заметим, что такие ИВММ отсутствуют, если исходная совокупность работ не содержит малого монстра.)

Суммарное число ИВБР и ИВММ не превосходит n. Поскольку число боковых ветвей при каждой ИВБР не превосходит $|J_3|$, а при каждой ИВММ не превосходит $|J_3| - 1$, то суммарное число боковых итераций не превосходит $O(n^2)$. Таково же по порядку число итераций основной цепочки, поэтому трудоемкость алгоритма не превосходит $O(n^3 \log n)$ операций.

6. Анализ точности алгоритма MRJ'

Докажем, что хотя бы для одного из $O(n^2)$ расписаний, построенных на итерациях алгоритма MRJ', справедлива оценка

$$C(S_\sigma)/C^* \leqslant 3/2. \tag{14}$$

Очевидно, что увеличение сроков поступления работ, происходящее на итерациях алгоритма MRJ', вообще говоря, приводит к увеличению оптимума задачи. Если же после выполнения основной цепочки итераций оптимум задачи остался неизменным, то расписание S_σ, полученное на последней итерации основной цепочки (и следовательно, удовлетворяющее условиям леммы 1), может быть взято в качестве искомого. Из леммы 1 следует, что для него выполняется оценка (14).

Теперь предположим, что увеличение сроков поступления работ, происходящее на итерациях основной цепочки, приводит к увеличению оптимума. Пусть I — последняя итерация основной цепочки, после которой оптимум C^* все еще совпадает с оптимумом исходной задачи. (Такая итерация I существует, поскольку на самой первой итерации величи́ны r_j, а следовательно, и оптимум, остаются неизменными.) Ясно, что I — не последняя итерация основной цепочки. Выведем нижние оценки оптимума, опираясь на факт, что изменение момента $r_{\sigma(t)}$ на итерации основной цепочки, следующей за I, приводит к увеличению оптимума.

Пусть S_σ — расписание, построенное на итерации I. В [7] было замечено, что в любом оптимальном расписании работа $\sigma(t)$ выполняется раньше всех работ из J_3. Действительно, предположим противное, т. е. в каком-то оптимальном расписании $S_{\rm opt}$ работа $\sigma(t)$ выполняется после некоторой работы $i \in J_3$. Тогда работа $\sigma(t)$ выполняется и после $r_i + a_i$. Поэтому присвоение (11) оставляет расписание $S_{\rm opt}$ допустимым, и значение оптимума не меняется. Противоречие.

Возьмем произвольное оптимальное расписание S_{opt} и рассмотрим в нем путь, содержащий операции всех работ из J_σ (т. е. работ, пришедших после момента $r_{\sigma(u)}$), с переходной работой $\sigma(t)$. В этом пути все работы из J_3 представлены своими b-операциями, поскольку они идут после работы $\sigma(t)$. Следовательно, эти работы дают вклад в длину пути, равный B_3. Так как каждая работа из $J_1', (J_2' \cup J_4) \setminus \{\sigma(t)\}$ представлена в пути некоторой своей операцией, то все работы из этого множества дают вклад в длину пути не меньше $A_1' + B_2' - b_{\sigma(t)} + B_4$. Таким образом, получаем оценку

$$C^* \geqslant r_{\sigma(u)} + a_{\sigma(t)} + B_3 + A_1' + B_2' + B_4. \tag{15}$$

(Возвращаясь к обсуждению задач $F2$ и F^*2 из введения, замечаем, что для оптимума задачи F^*2 эта оценка не верна.)

Другую оценку оптимума выведем для множества работ (J'), приходящих после момента $s(\sigma(t), S_\sigma)$. Обозначим через $\check{J}_1$ и $\hat{J}_1$ подмножества работ из J_1', выполняемых в S_σ до и после работы $\sigma(t)$. Тогда $J' \supset \hat{J}_1 \cup J_3$. Пусть $\sigma(w)$ — работа из J_3, выполняемая в S_{opt} раньше других работ из J_3. Оценим C^* через длину пути, проходящего по работам из J' с переходной работой $\sigma(w)$. В этом пути все работы из J_3 представлены своими b-операциями, а каждая работа из $\hat{J}_1$ — некоторой своей операцией, дающей вклад в длину пути, как минимум равный длине a-операции этой работы (поскольку $\hat{J}_1$ состоит из малых работ). Поэтому

$$\begin{aligned} C^* &\geqslant s(\sigma(t), S_\sigma) + \hat{A}_1 + a_{\sigma(w)} + B_3 \geqslant r_{\sigma(u)} + \check{A}_1 + A_2 - a_{\sigma(t)} + \hat{A}_1 + a_{\sigma(w)} + B_3 \\ &\geqslant r_{\sigma(u)} + A_1' + A_2 - a_{\sigma(t)} + a_{\sigma(w)} + B_3. \end{aligned} \tag{16}$$

Дальнейший анализ разбивается на два случая в зависимости от того, какой работой (большой или малой) является переходная работа $\sigma(v)$ в расписании S_σ.

Случай 1: $a_{\sigma(v)} > b_{\sigma(v)}$, т. е. $\sigma(v) \in J_2$ и $\sigma(v) \in J_4$.

В этом случае $\sigma(t) = \sigma(v)$, $J_1' = J_1$. Поэтому (15) и (16) можно переписать в виде

$$C^* \geqslant r_{\sigma(u)} + a_{\sigma(v)} + A_1 + B_3 + B_4 + B_2'. \tag{17}$$

$$C^* \geqslant r_{\sigma(u)} + A_1 + A_2' + B_3. \tag{18}$$

Складывая (9), (17) и (18), с учетом (8) получаем

$$\begin{aligned} 3C^* &\geqslant 3r_{\sigma(u)} + 3A_1 + (A_2 + a_{\sigma(v)} + A_2') + 2B_3 + (A_4' + B_4) + A_3' + B_2' \\ &\geqslant 3r_{\sigma(u)} + 3A_1 + 2A_2 + 2B_3 + (2B_4 - b_{\sigma(v)}) + A_3 + B_2' \\ &= 2C(S_\sigma) + (r_{\sigma(u)} + B_2' + A_1 + A_3 - b_{\sigma(v)}). \end{aligned} \tag{19}$$

Следовательно, если $b_{\sigma(v)} \leqslant r_{\sigma(u)} + B'_2 + A_1 + A_3$, то из (19) получаем оценку погрешности расписания S_σ: $C(S_\sigma)/C^* \leqslant 3/2$. Далее считаем, что

$$b_{\sigma(v)} > r_{\sigma(u)} + B'_2 + A_1 + A_3. \tag{20}$$

Из (20) следует, что работа $\sigma(v)$ приоритетнее любой работы из J'_2. Кроме того, для любой большой работы $j \in J \backslash J_\sigma$ из (20) получаем $b_{\sigma(v)} > r_{\sigma(u)} > a_j > b_j$. Отсюда следует, что работа $\sigma(v)$ приоритетнее работы j. Наконец, рассмотрим множество J'_4, содержащее остальные большие работы. Предположим, что в J'_4 найдется работа j, более приоритетная, чем $\sigma(v)$ (откуда $b_j \geqslant b_{\sigma(v)}$). Тогда $r_j > s^{**} \doteq s(\sigma(v), S_\sigma)$. Следовательно,

$$C^* > s^{**} + B_3 + b_j \geqslant r_{\sigma(u)} + A_1 + A'_2 + B_3 + b_{\sigma(v)}.$$

Сложив эту оценку с (9) и (17), получим

$$\begin{aligned} 3C^* > 3r_{\sigma(u)} + 3A_1 + (A_2 + A'_2 + a_{\sigma(v)}) + 2B_3 + (B_4 + A'_4 b_{\sigma(v)}) + A'_3 + B'_2 \\ = (2r_{\sigma(u)} + 2A_1 + 2A_2 + 2B_3 + 2B_4) \\ + (r_{\sigma(u)} + A_1 + A'_4 - B'_4 + A'_3 + B'_2) \geqslant 2C(S_\sigma). \ \blacksquare \end{aligned}$$

(Мы используем символ $\blacksquare$ для обозначения того, что в рассматриваемом случае найдено расписание, погрешность которого не превосходит 3/2.)

Далее считаем, что работа $\sigma(v)$ приоритетнее любой работы из J'_4. Таким образом, $\sigma(v)$ есть самая приоритетная большая работа, т. е. $\sigma(v) = j_b$.

Если $J'_2 = \varnothing$, то $A_2 = a_{\sigma(v)}$ и из (17) и (8) получаем $C^* \geqslant C(S_\sigma)$, т. е. расписание S_σ оптимально. Далее рассматриваем случай $J'_2 \neq \varnothing$. Поскольку I — не последняя итерация основной цепочки, $J_3 \neq \varnothing$. Таким образом, итерация I есть ИВБР.

Пусть $\sigma(p)$ — работа, выполняемая в S_σ последней среди работ из J'_2; $\check{J}_5$ и $\hat{J}_5$ — подмножества работ из J_1, выполняемых в расписании S_σ до и после работы $\sigma(p)$. Поскольку $\sigma(v)$ приоритетнее работы $\sigma(p)$, но $\sigma(v)$ выполняется после $\sigma(p)$ в расписании S_σ, то

$$r_{\sigma(v)} > s^* \doteq s(\sigma(p), S_\sigma) = r_{\sigma(u)} + A'_2 - a_{\sigma(p)} + \check{A}_5. \tag{21}$$

Пусть J^* — множество работ из J_σ, поступающих после момента s^*. Очевидно, что $\hat{J}_5 \subset J^*$, $J_3 \subset J^*$ и $\sigma(v) \in J^*$. Оценим оптимум через длину пути, проходящего по работам из J^* с переходной работой $\sigma(v)$. Работы из J_3 представлены в этом пути своими b-операциями, а каждая работа из $\hat{J}_5$ — некоторой своей операцией, дающей вклад в длину пути, как минимум равный длине a-операции этой работы. Отсюда с учетом (21) получаем оценку

$$C^* > s^* + a_{\sigma(v)} + b_{\sigma(v)} + B_3 + \hat{A}_5 = r_{\sigma(u)} + A_1 + A'_2 - a_{\sigma(p)} + a_{\sigma(v)} + b_{\sigma(v)} + B_3. \tag{22}$$

Сначала предположим, что в некотором оптимальном расписании работа $\sigma(p)$ предшествует работе $\sigma(v)$. Тогда, оценивая оптимум через длину пути, проходящего по работам из J_σ с переходной работой $\sigma(v)$, получаем оценку

$$C^* \geqslant r_{\sigma(u)} + a_{\sigma(p)} + a_{\sigma(v)} + b_{\sigma(v)} + B_3 + A_1 + B_4', \tag{23}$$

где работы из J_1 и J_4' вновь представлены своими меньшими операциями. Сложив (22), (23) и (9), получим

$$3C^* \geqslant (3r_{\sigma(u)} + 3A_1 + 2A_2 + 2B_3 + 2B_4) + A_3' + a_{\sigma(v)} \geqslant 2C(S_\sigma). \blacksquare$$

Теперь предположим, что в некотором оптимальном расписании работа $\sigma(p)$ следует за работой $\sigma(v)$, но предшествует любой работе из J_3. Оценивая оптимум через длину пути, проходящего по работам из J^* с переходной работой $\sigma(p)$, с учетом (21) получаем

$$C^* \geqslant s^* + a_{\sigma(v)} + a_{\sigma(p)} + b_{\sigma(p)} + B_3 + \hat{A}_5 = r_{\sigma(u)} + A_1 + A_2 + b_{\sigma(p)} + B_3. \tag{24}$$

Сложив (9), (17) и (24), получим

$$3C^* \geqslant 3r_{\sigma(u)} + 3A_1 + 2A_2 + 2B_3 + (A_4' + a_{\sigma(v)} + B_4) + A_3' + B_2' + b_{\sigma(p)} \geqslant 2C(S_\sigma). \blacksquare$$

Наконец, рассмотрим случай, когда подмножество работ из J_3, предшествующих работе $\sigma(p)$ в оптимальном расписании S_{opt}, непусто. (Это подмножество обозначим через $\check{J}_3$.) Пусть ν — работа из $\check{J}_3$, на которой достигается $\max_{i \in \check{J}_3}(r_i + a_i)$. Рассмотрим боковую ветвь $\tilde{I}$ итерации I, соответствующую присвоению

$$\tilde{r}_{\sigma(p)} := r_\nu + a_\nu. \tag{25}$$

Такое присвоение имеет два полезных свойства. Во-первых, оно не увеличивает оптимума (так как в оптимальном расписании S_{opt} работа $\sigma(p)$ начинается не раньше момента $\tilde{r}_{\sigma(p)}$). Во-вторых, в полученном на итерации $\tilde{I}$ расписании $S_{\tilde{\sigma}} \doteq \widetilde{S}$ работа $\sigma(p)$ выполняется после работ из J_1 и $\check{J}_3$. Отсюда следует, что все малые работы, выполняемые в $\widetilde{S}$ после работы $\sigma(p)$, выполняются после $\sigma(p)$ и в расписании S_{opt}. Это позволяет выписывать нижние оценки для C^*.

Кроме того, с учетом присвоения (25) мы можем выписать оценку

$$\tilde{r}_{\sigma(p)} \geqslant r_\nu > s^{**} = r_{\sigma(u)} + A_1 + A_2'. \tag{26}$$

Замечание 1. Так как на итерации $\tilde{I}$ увеличивается только время поступления работы $\sigma(p)$, то расписания S_σ и $\widetilde{S}$ до момента $s^* = s(\sigma(p), S_\sigma)$ совпадают. (Точнее, $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$, $i = 1, \ldots, p-1$.)

Рассмотрим случай $r_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})} < r_{\sigma(u)}$.

Так как в интервале $[r_{\tilde\sigma(\tilde u)}, s(O_B^{\tilde\sigma(\tilde v)}, \widetilde S)]$ (на «левом участке» критического пути в расписании $\widetilde S$) машина A работает без простоев, а непосредственно перед моментом $r_{\sigma(u)}$ в расписании $\widetilde S$ (как и в расписании S_σ согласно замечанию 1) на A есть простой, то $s(O_B^{\tilde\sigma(\tilde v)}, \widetilde S) < r_{\sigma(u)}$. Следовательно,

$$C(\widetilde S) \leqslant s(O_B^{\tilde\sigma(\tilde v)}, \widetilde S) + B_{\tilde\sigma} < r_{\sigma(u)} + C^*,$$

т. е. $C^* > C(\widetilde S) - r_{\sigma(u)}$. Складывая эту оценку с (9) и (17), получаем для погрешности искомую оценку 3/2:

$$3C^* > C(\widetilde S) + C(S_\sigma) + A_3 + A_4' + a_{\sigma(v)} + A_1 + B_2'. \blacksquare$$

Далее считаем, что $r_{\tilde\sigma(\tilde u)} \geqslant r_{\sigma(u)}$. Отсюда вытекает соотношение $J_{\tilde\sigma} \subseteq J_\sigma$, очень важное для последующего анализа. Это соотношение означает, что в критическом пути расписания $\widetilde S$ не содержится новых работ, не участвующих в критическом пути расписания S_σ. В частности, $\tilde J_1 \cup \tilde J_3 \subset J_1 \cup J_3$ и $\tilde J_2 \cup \tilde J_4 \subset J_2 \cup J_4$.

Случай 1.1: $\sigma(p) \notin \tilde J_4'$.

В этом случае все работы из $\tilde J_3$ выполняются после работы $\sigma(p)$ в расписании $\widetilde S$, а следовательно, и в расписании S_{opt}. Отсюда с учетом (26) получаем

$$C^* \geqslant \tilde r_{\sigma(p)} + a_{\sigma(p)} + b_{\sigma(p)} + \widetilde B_3 > r_{\sigma(u)} + A_1 + A_2' + a_{\sigma(p)} + b_{\sigma(p)} + \widetilde B_3. \quad (27)$$

Определим

$$x = \begin{cases} b_{\tilde\sigma(\tilde v)}, & \text{если } \tilde\sigma(\tilde v) \text{ — большая работа;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$C(\widetilde S) = r_{\tilde\sigma(\tilde u)} + \tilde A_1 + \tilde A_2 + \widetilde B_3 + \widetilde B_4' + x \leqslant r_{\tilde\sigma(\tilde u)} + A_{\tilde\sigma} + \widetilde B_3 + x \leqslant C^* + \widetilde B_3 + b_{\sigma(v)}.$$

Следовательно,

$$C^* \geqslant C(\widetilde S) - \widetilde B_3 - b_{\sigma(v)}. \quad (28)$$

Складывая (27), (28), (9), (22) и дважды (17), получаем

$$\begin{aligned} 6C^* > C(\widetilde S) - \widetilde B_3 - b_{\sigma(v)} + 5r_{\sigma(u)} + 5A_1 + 3A_2 + 3B_3 + 3B_4 \\ + a_{\sigma(p)} + b_{\sigma(p)} + \widetilde B_3 + A_3 + a_{\sigma(v)} + B_2' - a_{\sigma(p)} \geqslant C(\widetilde S) + 3C(S_\sigma). \blacksquare \end{aligned}$$

Случай 1.2: $\sigma(p) \in \tilde J_4'$.

Случай 1.2.1: в $\tilde J_2$ нет работ из J_4.

Так как и $\sigma(p) \notin \tilde{J}_2$, то $\tilde{J}_2 \subset J_2'' \doteq J_2 \setminus \{\sigma(v), \sigma(p)\}$, $\tilde{J}_1 \subset J_1 \cup J_3$. Поэтому

$$C(\widetilde{S}) = r_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})} + \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \widetilde{B}_3 + \widetilde{B}_4 \leqslant C^* + \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 \leqslant C^* + A_1 + A_3 + A_2''.$$

Сложив полученную оценку оптимума с (17), (18), (22) и дважды (9), получим

$$6C^* > C(\widetilde{S}) - A_1 - A_3 - A_2'' + 5r_{\sigma(u)} + 5A_1 + 4A_2 + 3B_3 + 3B_4 + 2A_3 \\ - b_{\sigma(v)} - a_{\sigma(p)} \geqslant C(\widetilde{S}) + 3C(S_\sigma). \ \blacksquare$$

Случай 1.2.2:

$$\tilde{J}_2 \cap J_4 \neq \varnothing. \tag{29}$$

Так как все работы из J_4 выполняются в $\widetilde{S}$ после момента s^*, а значит, после всех работ из J_2'', то из (29) следует, что

$$\tilde{J}_4 \cap J_2'' = \varnothing. \tag{30}$$

Обозначим $\hat{J} = \tilde{J}_2 \setminus \{\sigma(v)\}$. Если $\tilde{J}_2 = \varnothing$, то из леммы 1 вытекает, что погрешность расписания $\widetilde{S}$ не превосходит 3/2. Если $\tilde{J}_2 = \{\sigma(v)\}$, то

$$C(\widetilde{S}) = r_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})} + \tilde{A}_1' + a_{\sigma(v)} + \widetilde{B}_3 + \widetilde{B}_4 + x,$$

где

$$x = \begin{cases} a_{\tilde{\sigma}(\tilde{v})}, & \text{если } \tilde{\sigma}(\tilde{v}) \in \tilde{J}_1, \\ 0 & \text{в противном случае, т. е. при } \tilde{\sigma}(\tilde{v}) = \sigma(v). \end{cases}$$

В любом случае $x \leqslant A_1 + A_3$. Следовательно,

$$C(\widetilde{S}) \leqslant r_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})} + B_{\tilde{\sigma}} + a_{\sigma(v)} + A_1 + A_3 \leqslant C^* + a_{\sigma(v)} + A_1 + A_3.$$

Складывая эту оценку с (9) и (17), получаем

$$3C^* \geqslant C(\widetilde{S}) + C(S_\sigma) + A_4' + B_2'. \ \blacksquare$$

Таким образом, в случае $\hat{J} = \varnothing$ получаем оценку 3/2. Далее рассматриваем случай $\hat{J} \neq \varnothing$. Пусть q — работа из $\hat{J}$, выполняемая в $\widetilde{S}$ последней. Покажем, что $\hat{J} \cap J_4' \neq \varnothing$. Действительно, в противном случае из (29) имеем $\tilde{J}_2 \cap J_4 = \{\sigma(v)\}$ и $\hat{J} \subset J_2''$, $q \in J_2''$. При этом работа q завершается до момента s^*, а работа $\sigma(v)$ начинается позднее s^*, и между q и $\sigma(v)$ не выполняется других больших работ. В то же время ни одна малая работа из $\hat{J}_5 \cup J_3$ не может начинаться в момент s^*, так как эти работы имеют более поздние моменты появления. Поэтому сразу после s^* на A возникает простой между q и $\sigma(v)$, что противоречит условию непрерывной работы машины A на левом участке критического пути в расписании $\widetilde{S}$. Отсюда следует, что $\hat{J} \cap J_4' \neq \varnothing$ и

$$q \in J_4'. \tag{31}$$

Пусть $\tilde{J}_5$ — множество малых работ, выполняемых в $\widetilde{S}$ после работы q. Ясно, что в S_{opt} работы из $\tilde{J}_5$ также выполняются после момента $\tilde{s} \doteq s(q, \widetilde{S})$. Далее, если $\sigma(v)$ выполняется в $\widetilde{S}$ после работы q, то $r_{\sigma(v)} > \tilde{s}$ и $\tilde{r}_{\sigma(p)} > r_{\sigma(v)} > \tilde{s}$. В этом случае работы $\sigma(v)$ и $\sigma(p)$ выполняются после момента $\tilde{s}$ как в расписании $\widetilde{S}$, так и в расписании S_{opt}. Определим переменную y, которая равна 1, если $\sigma(v)$ в $\widetilde{S}$ выполняется после q, и $y = 0$ — в противном случае. Тогда имеем

$$C^* \geqslant \tilde{s} + \widetilde{B}_5 + (b_{\sigma(v)} + b_{\sigma(p)})y, \tag{32}$$

$$C(\widetilde{S}) \leqslant \tilde{s} + \widetilde{B}_5 + A_4' + b_{\sigma(p)} + a_{\sigma(v)}y + x. \tag{33}$$

В оценке (33) все большие работы, выполняемые в $\widetilde{S}$ после $\tilde{s}$ (кроме $\sigma(v)$ и $\sigma(p)$), оценены своими a-операциями (ввиду (30) и (31) их суммарная длина не превосходит A_4'), все малые — своими b-операциями, $\sigma(p)$ представлена b-операцией, так как $\sigma(p) \in \tilde{J}_4'$, а

$$x = \begin{cases} b_{\sigma(v)}, & \text{если } \tilde{\sigma}(\tilde{v}) = \sigma(v), \\ b_{\tilde{\sigma}(\tilde{v})}, & \text{если } \tilde{\sigma}(\tilde{v}) \in J_4', \\ a_{\tilde{\sigma}(\tilde{v})}, & \text{если } \tilde{\sigma}(\tilde{v}) \in \hat{J}_5 \cup J_3. \end{cases}$$

В любом случае выполнено $x \leqslant b_{\sigma(v)}$, так как $\sigma(v)$ — самая приоритетная работа из больших и из (20) имеем $b_{\sigma(v)} \geqslant A_1 + A_3$. Из (32), (33) следует, что

$$C^* \geqslant C(\widetilde{S}) + (b_{\sigma(v)} + b_{\sigma(p)})y - A_4' - b_{\sigma(p)} - a_{\sigma(v)}y - b_{\sigma(v)}.$$

Складывая эту оценку с (9) и (17), получаем

$$\begin{aligned} 3C^* \geqslant C(\widetilde{S}) + r_{\sigma(u)} + A_1 + A_2 + B_3 + B_4 + (a_{\sigma(v)} - b_{\sigma(v)}) - (a_{\sigma(v)} - b_{\sigma(v)})y \\ + (B_2' - b_{\sigma(p)}) + b_{\sigma(p)}y + A_1 + A_3 \geqslant C(\tilde{S}) + C(S_\sigma). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Случай 2: $a_{\sigma(v)} \leqslant b_{\sigma(v)}$, т. е. $\sigma(v) \in J_1$ и $\sigma(v) \in J_3$.

Суммируя (9), (15) и (16), получаем

$$3C^* \geqslant (2r_{\sigma(u)} + 2A_1 + 2A_2 + 2B_3 + 2B_4) + (r_{\sigma(u)} + A_1' + A_3' + B_2 + a_{\sigma(w)} - a_{\sigma(v)}).$$

В случае $a_{\sigma(v)} \leqslant r_{\sigma(u)} + A_1' + A_3' + a_{\sigma(w)}$ из последнего неравенства следует, что погрешность расписания S_σ не превосходит $3/2$. Далее предполагаем выполненным неравенство

$$a_{\sigma(v)} > r_{\sigma(u)} + A_1' + A_3' + a_{\sigma(w)}. \tag{34}$$

Из (34) следует, что, во-первых, $\sigma(v) \neq \sigma(w)$ (т. е. работа $\sigma(v)$ выполняется в S_{opt} не первой среди работ из J_3 и, следовательно, $J_3' \neq \varnothing$) и, во-вторых, $\sigma(v)$ — определенный ранее малый монстр. Таким образом, рассматриваемая итерация I есть ИВММ.

Так как $\sigma(v)$ есть наименее приоритетная малая работа, то все работы из J_3' поступают позже момента $s^{**} = s(\sigma(v), S_\sigma)$. Кроме того, работа $\sigma(v)$ выполняется в S_{opt} после работы $\sigma(w) \in J_3'$ и, значит, после момента s^{**}. Это позволяет выписать следующую оценку:

$$C^* \geqslant s^{**} + B_3 \geqslant r_{\sigma(u)} + A_1' + A_2 + B_3. \tag{35}$$

Пусть J_7 — множество работ из J_3', выполняемых в S_{opt} раньше работы $\sigma(v)$. (Нам известно, что $J_7 \neq \varnothing$.) Пусть μ — работа из J_7, на которой достигается $\max\limits_{i \in J_7}(r_i + a_i)$. Рассмотрим боковую ветвь $\tilde{I}$ итерации I, соответствующую присвоению

$$r_{\sigma(v)} := r_\mu + a_\mu. \tag{36}$$

Значение $r_{\sigma(v)}$ на итерации $\tilde{I}$ обозначим через $\tilde{r}_{\sigma(v)}$. Аналогично тому, как это делалось в случае 1 с присвоением (25), убеждаемся в том, что присвоение (36) не увеличивает оптимума и что в расписании $\widetilde{S}$, полученном на итерации $\tilde{I}$, после работы $\sigma(v)$ будут выполняться только те малые работы, которые и в S_{opt} выполняются после нее.

Из (36) и того факта, что работа μ приоритетнее $\sigma(v) = j_M$, вытекают соотношения

$$\tilde{r}_{\sigma(v)} \geqslant r_\mu > s^{**} = r_{\sigma(u)} + A_1' + A_2. \tag{37}$$

Замечание 2. До момента s^{**} расписания S_σ и $\widetilde{S}$ совпадают.

Как и в случае 1, приходим к условию $r_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})} \geqslant r_{\sigma(u)}$ и соотношениям $J_{\tilde{\sigma}} \subseteq J_\sigma$, $\tilde{J}_1 \cup \tilde{J}_3 \subseteq J_1 \cup J_3$, $\tilde{J}_2 \cup \tilde{J}_4 \subseteq J_2 \cup J_4$.

Случай 2.1: $\tilde{J}_2 \cap J_4 = \varnothing$.

Тогда $\tilde{J}_2 \subseteq J_2$ и $\tilde{A}_2 \leqslant A_2$. Так как возможный простой в расписании между работами из J_2 и работой $\sigma(v)$ (образующийся сразу после s^{**} в результате присвоения (36)) способны заполнить только работы из J_4, то левый участок критического пути в $\widetilde{S}$ не содержит либо работ из J_2, либо работы $\sigma(v)$. В первом случае получаем $\tilde{J}_2 = \varnothing$, и по лемме 1 погрешность расписания $\widetilde{S}$ не превосходит 3/2. Во втором случае $\sigma(v) \notin \tilde{J}_1$ и $\tilde{A}_1 \leqslant A_1' + A_3'$. Следовательно,

$$C(\widetilde{S}) = r_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})} + \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \widetilde{B}_3 + \widetilde{B}_4 \leqslant r_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})} + B_{\tilde{\sigma}} + A_2 + x \leqslant C^* + A_2 + x, \tag{38}$$

где

$$x = \begin{cases} a_{\tilde{\sigma}(\tilde{v})}, & \text{если } \tilde{\sigma}(\tilde{v}) \in \tilde{J}_1; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку $x \leqslant \tilde{A}_1 \leqslant A_1' + A_3'$, то, сложив (38), (9) и (35), получим, что погрешность одного из расписаний $S_\sigma, \widetilde{S}$ не превосходит 3/2.

Случай 2.2:

$$\tilde{J}_2 \cap J_4 \neq \varnothing. \tag{39}$$

Так как согласно замечанию 2 в расписании $\widetilde{S}$ все работы из J_2 и J_1' выполняются раньше s^{**}, а все работы из J_3 и J_4 — позже s^{**}, то из (39) следует, что

$$\tilde{J}_3 \subseteq J_3. \tag{40}$$

Длина расписания $\widetilde{S}$ может быть оценена следующим образом:

$$C(\widetilde{S}) = r_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})} + \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \widetilde{B}_3' + \widetilde{B}_4' + b_{\tilde{\sigma}(\tilde{v})} \leqslant r_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})} + A_{\tilde{\sigma}} + b_{\tilde{\sigma}(\tilde{v})} + \widetilde{B}_3' - \tilde{A}_3'$$
$$\leqslant C^* + b_{\tilde{\sigma}(\tilde{v})} + \widetilde{B}_3' - \tilde{A}_3'. \tag{41}$$

Если $\tilde{\sigma}(\tilde{v})$ — малая работа, то из (41) вытекает оценка

$$C(\widetilde{S}) \leqslant C^* + a_{\tilde{\sigma}(\tilde{v})} + \widetilde{B}_3 - \widetilde{A}_3. \tag{42}$$

Из (41), (42) с учетом (40) получаем оценку

$$C^* \geqslant C(\widetilde{S}) + A_3 - B_3 - x, \tag{43}$$

где

$$x = \begin{cases} a_{\tilde{\sigma}(\tilde{v})}, & \text{если } \tilde{\sigma}(\tilde{v}) \text{ — малая работа;} \\ b_{\tilde{\sigma}(\tilde{v})}, & \text{если } \tilde{\sigma}(\tilde{v}) \text{ — большая работа.} \end{cases}$$

Сложив (43), (15) и (16), получим

$$3C^* \geqslant C(\widetilde{S}) + C(S_\sigma) + (A_3 - a_{\sigma(v)} - x + B_2). \tag{44}$$

Если выражение в скобках неотрицательно, то погрешность одного из расписаний $\widetilde{S}$, S_σ не превосходит 3/2. Пусть

$$A_3 - a_{\sigma(v)} + B_2 < x. \tag{45}$$

Случай 2.2.1: $\tilde{\sigma}(\tilde{v})$ — большая работа.

Тогда $x = b_{\tilde{\sigma}(\tilde{v})}$ и из (45) получаем, что $\tilde{\sigma}(\tilde{v})$ приоритетнее любой работы из J_2, в частности работы $\sigma(t)$. Следовательно, $\tilde{\sigma}(\tilde{v}) \in J_4$ и $r_{\tilde{\sigma}(\tilde{v})} > s(\sigma(t), S_\sigma)$. Оценивая C^* через длину пути, проходящего по b-операциям работ из множества $\hat{J}_1 \cup J_3 \cup \{\tilde{\sigma}(\tilde{v})\}$ (все они поступают после момента $s(\sigma(t), S_\sigma)$), получаем

$$C^* \geqslant s(\sigma(t), S_\sigma) + \widehat{B}_1 + B_3 + b_{\tilde{\sigma}(\tilde{v})} \geqslant r_{\sigma(u)} + \check{A}_1 + A_2 - a_{\sigma(t)} + \hat{A}_1 + B_3 + x$$
$$\geqslant r_{\sigma(u)} + A_1' + A_2 - a_{\sigma(t)} + B_3 + x. \tag{46}$$

Складывая (46), (43) и (15), получаем оценку погрешности 3/2. ■

Случай 2.2.2: $\tilde{\sigma}(\tilde{v})$ — малая работа.

Тогда из (40) следует, что $\tilde{\sigma}(\tilde{v}) \in J_3$. Но из (45) имеем $a_{\tilde{\sigma}(\tilde{v})} > A'_3$. Следовательно, $\tilde{\sigma}(\tilde{v}) = \sigma(v)$.

В расписаниях $\widetilde{S}$ и S_{opt} все работы из $\tilde{J}'_3$ выполняются позже $\sigma(v)$. Отсюда с учетом (37) получаем оценку

$$C^* \geqslant \tilde{r}_{\sigma(v)} + a_{\sigma(v)} + b_{\sigma(v)} + \widetilde{B}'_3 > r_{\sigma(u)} + A_1 + A_2 + \widetilde{B}_3. \tag{47}$$

Складывая (47), (42) и (15), получаем оценку погрешности 3/2. ■

Таким образом, во всех случаях для одного из расписаний, построенных на итерациях алгоритма MRJ', выполняется оценка (14).

Теорема 1. *Для любого входа задачи $F2|r_j|C_{\max}$ с n работами алгоритм MRJ' строит расписание S с погрешностью $C_{\max}(S)/C^* \leqslant 3/2$ за время $O(n^3 \log n)$. Обе оценки (точности и трудоемкости) являются наилучшими для данного алгоритма.*

Доказательство. В процессе анализа алгоритма (в данном и предыдущем разделах) мы уже убедились в справедливости приведенных оценок точности и трудоемкости. Осталось привести пример, подтверждающий достижимость этих оценок.

Пусть k — целое, $\varepsilon = 1/(2k+3)$ и $\delta = \varepsilon/k$. Исходная совокупность работ состоит из множества малых работ $J_l = \{0, 1, \dots, k\}$ и множества больших работ $J_b = \{k+1, \dots, 2k+1\}$, $n = 2k+2$.

В множестве J_l выделяется работа $j_l = 0$. Остальные работы из $J'_l = J_l \setminus \{j_l\}$ идентичны. Аналогично в J_b выделяется работа $j_b = 2k+1$; остальные работы из $J'_b = J_b \setminus \{j_b\}$ идентичны. Значения параметров a_j, b_j, r_j всех работ приведены в таблице.

	j_l	$i \in J'_l$	J'_b	j_b
a_j	δ	δ	$2\varepsilon + 2\delta$	1
b_j	$1 - \varepsilon$	2δ	2ε	$2\varepsilon + \delta$
r_j	$1 + 2k\delta + \delta$	$1 - \delta + 2\delta i$	ε	0

На таком входе алгоритм MRJ' работает как алгоритм RJ', поскольку не имеет боковых итераций. (Основная цепочка не содержит ИВБР, так как на каждой итерации становится переходной одна из работ множества J'_b.) Нетрудно убедиться, что основная цепочка содержит ровно $k^2 + 1$ итераций. Таким образом, достигается оценка трудоемкости $O(n^3 \log n)$ из теоремы 1. Наилучшее расписание, построенное на итерациях, имеет длину $3 + \delta$, в то время как оптимальное расписание (соответствующее перестановке работ $(k+1, \dots, 2k, 1, \dots, k, 0, 2k+1)$) имеет длину $C^* = 2 + 5\varepsilon + \delta$. Таким образом, при $k \to \infty$ достигается оценка погрешности 3/2. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hall L. A.** Approximability of flow shop scheduling // 36th annual symposium on foundations of computer science. Proceedings. Los Alamitos: IEEE Comput. Soc. Press, 1995. P. 82–91.
2. **Glass C. A., Gupta J. N. D., Potts C. N.** Two machine no-wait flow shop scheduling with missing operations. England, Univ. of Southampton, 1995. 21 p. (Preprint Ser., N OR75).
3. **Johnson S. M.** Optimal two- and three-stage production schedules with setup times included // Naval Res. Logist. Quart. 1954. V. 1, N 1. P. 61–68.
4. **Karmarkar N.** A new polynomial-time algorithm for linear programming // Combinatorica. 1984. V. 4, N 4. P. 373–395.
5. **Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Shmoys D. B.** Sequencing and scheduling: algorithms and complexity // Handbooks in Operations Research and Management Science. Amsterdam: North-Holland, 1993. V. 4. P. 445–522.
6. **Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Brucker P.** Complexity of machine scheduling problems // Studies in integer programming. Amsterdam: North-Holland, 1977. P. 343–362. (Ann. Discrete Math.; V. 1).
7. **Potts C. N.** Analysis of heuristics for two-machine flow-shop sequencing subject to release dates // Math. Oper. Res. 1985. V. 10, N 4. P. 576–584.

Адреса авторов:

К. Н. Каширских
Новосибирский
государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090 Новосибирск, Россия

C. N. Potts
University of Southampton,
Southampton S09 5NH UK.
E-mail: cnp@maths.soton.ac.uk

С. В. Севастьянов
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
Университетский пр., 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: seva@math.nsc.ru

Статья поступила
19 декабря 1996 г.