ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 1997. Том 4, № 1, 33–45

УДК 519.873

МАГИСТРАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ НЕДЕЛИМОГО РЕСУРСА*)

Э. О. Рапопорт

Изучается динамическая экономическая система, состояния которой в каждый момент времени характеризуются целыми неотрицательными точками k-мерного векторного пространства. Имеется k различных видов производства, в каждом из которых состояние системы изменяется на некоторый случайный вектор с целыми компонентами. Под управлением понимается выбор в каждый момент времени одного из имеющихся видов производства. Рассматривается простой класс управлений, обобщающий «пожарное» управление, введенное Р. Раднером и М. Ротшильдом, и в этом классе ищется управление, оптимизирующее заданный функционал.

Введение

Одна из стандартных задач динамического управления экономикой — распределение в каждый момент времени ограниченного ресурса между конкурирующими производствами. Особо рассматривается эта задача в случае, когда ресурс неделим, т. е. когда имеющийся ресурс необходимо целиком отдавать только одному производству. Ясно, что нехватка ресурса в тех производствах, для которых ресурс не выделяется, ведет к ухудшению состояния, характеризующего результаты этого производства, в то время как выделение ресурса — к улучшению состояния. Такие задачи обычно решаются методами целочисленного программирования, динамического программирования и т. п. Наличие стохастических факторов, влияющих на выпуск продукции в каждом производстве, существенно усложняет задачу.

При изучении динамики экономической системы, функционирующей в случайной среде, одним из основных направлений является исследование существования магистралей, т. е. некоторых кривых, около которых сосредоточена траектория при оптимальном управлении. Такие результаты получены в случае, когда целевой функционал всей системы

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95–01–00925а).

является суммой функционалов в каждый момент времени (см., например, [6, 7]). Ситуация осложняется, когда этот функционал не аддитивен. В этом случае возможен подход, связанный с выбором магистралей (при условии, что магистраль существует) из некоторого класса. При этом полезно исследовать управления, «насильно» подводящие траекторию к этой магистрали — выбор магистрали можно рассматривать как стратегическое управление.

Интересный подход к решению этой проблемы был предложен Р. Раднером и М. Ротшильдом [8, 9]. В рассматриваемых авторами моделях необходимо распределить единичный неделимый ресурс между различными производствами, каждое из которых производит k видов продуктов. Выделение ресурса какому-либо производству приводит к увеличению запаса одних продуктов и уменьшению запаса других (увеличение и уменьшение зависят от случайных факторов).

Считается, что модели функционируют (живут) до тех пор, пока количество каждого продукта неотрицательно и хотя бы для одного — строго положительно. При этом ищется управление, которое максимизирует вероятность выживания, т. е. минимизирует вероятность выхода из положительного ортанта.

В [8, 9] было введено некоторое фиксированное («пожарное») управление и показано, что для существования управления, при котором вероятность выживания положительна, необходимо и достаточно, чтобы некоторая константа, порожденная этим управлением и зависящая только от математических ожиданий входящих в модель случайных величин, была положительна. Однако построить управление, оптимальное в каком-либо классе, авторам не удалось.

В [4] был предложен простой класс управлений, обобщающий понятие «пожарного» управления, и изучались модели, в которых (при весьма жестких предположениях о природе стохастических объектов) удалось найти оптимальное в этом классе управление.

В настоящей работе ослабляются ограничения на случайные величины, характеризующие модель, изучаются свойства возникающих при этом марковских процессов и исследуется асимптотика целевых функционалов при различных управлениях из описываемого класса.

§ 1. «с-пожарное» управление

Опишем подробнее рассматриваемый класс моделей и управлений.

Производитель может выбирать из k способов для производства k видов продуктов. Каждому продукту i ставятся в соответствие две случайные величины ξ_i и η_i с положительными математическими ожиданиями.

При выборе i-го способа количество i-го продукта увеличивается на величину η_i, а количество j-го ($j \neq i$) продукта уменьшается на ξ_i.

Пусть $a(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_k(t))$ — вектор управлений в момент t, причем $a_i(t)$ при каждом t равно либо 0, либо 1, $\sum_{i=1}^{k} a_i(t) = 1$.

Через $X_i(t)$ обозначим количество i-го продукта в момент t. Тогда при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant k$, динамика количества продуктов задается рекуррентным соотношением

$$X_i(t+1) = X_i(t) + a_i(t)\eta_i - (1 - a_i(t))\xi_i.$$

Для описания условий существования оптимального управления в [8] было введено так называемое «пожарное» управление («putting out fires»), заключающееся в следующем: весь имеющийся ресурс направляется на развитие того производства, которое увеличивает количество наименьшего в данный момент продукта. Формально это управление можно описать так.

Пусть

$$W(t) = \min_{1 \leqslant j \leqslant k} (X_j(t)).$$

Если $W(t) = X_i(t)$ при некотором i, то соответствующее управление $a_i(t) = 1$; если это равенство выполняется при нескольких значениях i, то среди таких i выбирается минимальное i_0 и полагается $a_{i_0} = 1$.

Положим

$$\zeta = \left(1 - \sum_i \frac{\mathrm{M}\xi_i}{\mathrm{M}\xi_i + \mathrm{M}\eta_i}\right)\left(\sum_i \frac{1}{\mathrm{M}\xi_i + \mathrm{M}\eta_i}\right)^{-1}.$$

Основные результаты работы [8] можно сформулировать следующим образом (теоремы 1 и 2).

Теорема 1. *Для существования управления с положительной вероятностью выживания необходимо и достаточно, чтобы величина ζ была положительна.*

Теорема 2. *При «пожарном» управлении вероятность того, что $X_i(t) = W(t)$, стремится к a_i при $t \to \infty$, где*

$$a_i = \frac{\zeta + \mathrm{M}\xi_i}{\mathrm{M}\eta_i + \mathrm{M}\xi_i}.$$

Понятие «пожарного» управления можно естественным образом обобщить. Пусть $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ — произвольный вектор такой, что $c_i > 0$ при $1 \leqslant i \leqslant k$.

Управление $a(t) = (a_1(t), a_2(t), \cdots, a_k(t))$ будем называть «с-пожарным», если $a_i(t) = 1$ только при таком i, при котором $X_i(t)/c_i$ совпадает с величиной

$$W(t) = \min_{1 \leqslant j \leqslant k} \left(\frac{X_j(t)}{c_j} \right).$$

Таким образом, возникает целый класс достаточно простых управлений, и в этом классе естественно искать такой вектор **c**, при котором некоторый функционал (например, вероятность выживания) достигает экстремума.

Отметим, что для «с-пожарного» управления остаются справедливыми результаты Р. Раднера и М. Ротшильда. Чтобы убедиться в этом, вместо случайных величин ξ_i и η_i достаточно ввести случайные величины α_i и β_i, математические ожидания которых определяются по формулам

$$\mathrm{M}\alpha_i = \frac{\mathrm{M}\xi_i}{c_i}; \quad \mathrm{M}\beta_i = \frac{\mathrm{M}\eta_i}{c_i}.$$

Если положить

$$\gamma = \left(1 - \sum_i \frac{\mathrm{M}\xi_i}{\mathrm{M}\xi_i + \mathrm{M}\eta_i}\right) \left(\sum_i \frac{c_i}{\mathrm{M}\xi_i + \mathrm{M}\eta_i}\right)^{-1},$$

$$a_i = \frac{\gamma c_i + \mathrm{M}\xi_i}{\mathrm{M}\eta_i + \mathrm{M}\xi_i},$$

то для «с-пожарного» управления справедливы следующие утверждения.

Теорема 1′. *Для существования управления с положительной вероятностью выживания необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* $\gamma > 0$.

Теорема 2′. *При «с-пожарном» управлении вероятность того, что* $X_i(t) = c_i W(t)$, *стремится к* a_i *при* $t \to \infty$.

Заметим, что $(a_1, \ldots, a_k, \gamma)$ — решение системы уравнений

$$a_i \mathrm{M}\eta_i - (1 - a_i)\mathrm{M}\xi_i = c_i \gamma, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = 1.$$

Компоненты вектора **c** характеризуют относительную ценность каждого продукта при выборе того или иного управления, что тесно связано с проблемами учета стохастических факторов при определении цен [2]. Однако эти вопросы здесь не рассматриваются.

Мы интересуемся изучением асимптотического поведения функционалов на траекториях процесса в зависимости от начального состояния.

§ 2. Основная модель

Чтобы не загромождать изложение, будем рассматривать двумерный случай.

Имеется два продукта и два способа производства. Состояние системы отождествляется с целочисленными точками неотрицательного квадранта плоскости. В каждый дискретный момент времени инвестор может вкладывать неделимый единичный ресурс в одно из двух производств.

Пусть задан набор целочисленных векторов (a_i, b_i), $1 \leqslant i \leqslant k$. Система переходит из точки (x, y) в одну из точек $(x + a_i, y + b_i)$ с вероятностями p_i при вложении в первое производство и q_i при вложении во второе производство. Некоторые из вероятностей могут быть равны нулю, $\sum\limits_i p_i = \sum\limits_i q_i = 1$.

Естественно потребовать, чтобы первое управление (вложение ресурса в первое производство) было «лучше» для первого продукта, а второе управление — «лучше» для второго продукта. Формально это предположение можно записать так:

$$\begin{aligned} &\sum_i p_i b_i < 0, \quad \sum_i p_i(a_i + b_i) > 0, \\ &\sum_i q_i a_i < 0, \quad \sum_i q_i(a_i + b_i) > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Заметим, что из этих неравенств следует выполнение условия теоремы $1'$, которое в принятых обозначениях сводится к неравенству

$$\sum_i p_i b_i \cdot \sum_i q_i a_i < \sum_i p_i a_i \cdot \sum_i q_i b_i. \tag{2}$$

Под вырождением системы мы будем понимать попадание траектории в точку $(0,0)$ или выход ее из первого квадранта.

Итак, управление — это выбор способа производства. Зафиксируем некоторую прямую $y = dx$ (здесь вектор $\mathbf{c}$, определяющий «c-пожарную» политику, имеет вид $\mathbf{c} = (1, 1/d)$, $d > 0$.

Эта прямая разбивает квадрант на две области. В области $y \geqslant dx$ естественно вкладывать ресурс в производство, увеличивающее (в среднем) количество первого продукта, а в области $y \leqslant dx$ — в производство, увеличивающее количество второго продукта. При этом, не сильно ограничивая общность, можно считать, что d иррационально, так что общих целочисленных точек в этих областях (кроме точки $(0,0)$) нет (для рациональных d каждую целочисленную точку этой прямой можно рассматривать как двойную, в зависимости от того, из какой области квадранта в нее попали).

Таким образом, в первом квадранте мы имеем марковский процесс, порожденный двумя случайными блужданиями. Рассмотрим некоторые свойства этого процесса.

Пусть $T_n = Y_n - dX_n$. Следует заметить, что T_n является осциллирующим случайным блужданием, предельное распределение которого исследовано в [1]. Нам потребуются некоторые более слабые свойства этой последовательности.

Лемма 1. *Существуют такие константы K_1 и K_2, что для всех n*

$$|\mathbf{M}T_n| \leqslant K_1 \text{ и } \mathbf{D}(T_n) \leqslant K_2.$$

Доказательство. Положим $c_p = \sum\limits_i p_i(b_i - da_i)$, $c_q = \sum\limits_i q_i(b_i - da_i)$. Из (1) следует, что $c_p \leqslant 0$ и $c_q \geqslant 0$. Заметим, что $\mathbf{M}(T_{n+1}/T_n) = T_n + c_p$ при $T_n > 0$ и $\mathbf{M}(T_{n+1}/T_n) = T_n + c_q$ при $T_n < 0$.

Введем два новых случайных процесса, связанных с процессом T_n:

$$T_n^1 = \max(T_n, c_q), \quad T_n^2 = \min(T_n, c_p).$$

Очевидно, что

$$T_n^2 \leqslant T_n \leqslant T_n^1. \tag{3}$$

Если $T_n \geqslant c_q$, то $T_n^1 = T_n$ и $\mathbf{M}(T_{n+1}^1/T_n) = T_n + c_p \leqslant T_n^1$. Если $0 < T_n \leqslant c_q$, то $T_n^1 = c_q$ и $\mathbf{M}(T_{n+1}^1/T_n) = T_n + c_p \leqslant T_n^1$. Если же $T_n < 0$, то $T_n^1 = c_q$ и $\mathbf{M}(T_{n+1}^1/T_n) = T_n + c_q \leqslant T_n^1$. Таким образом, T_n^1 — супермартингал. Аналогично проверяется, что T_n^2 — субмартингал.

Поскольку T_n^2 — субмартингал, T_n^1 — супермартингал и согласно (3) $\mathbf{M}(T_n^2) \leqslant \mathbf{M}(T_n) \leqslant \mathbf{M}(T_n^1)$, то

$$\mathbf{M}(T_0^2) \leqslant \mathbf{M}(T_n^2) \leqslant \mathbf{M}(T_n) \leqslant \mathbf{M}(T_n^1) \leqslant \mathbf{M}(T_0^1).$$

Отсюда следует первое неравенство леммы.

Рассмотрим две случайные величины ξ_1 и ξ_2, принимающие значения $b_i - da_i$ с вероятностями p_i и q_i соответственно. Пусть σ_1^2 и σ_2^2 — их дисперсии, $\sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2)$. Так как

$$\mathbf{M}(T_{n+1} - \mathbf{M}(T_{n+1}/T_n)/T_n)^2 \leqslant \sigma^2,$$

то

$$\mathbf{M}(\mathbf{D}(T_{n+1}/T_n)) \leqslant \sigma^2,$$

т. е. справедливо второе неравенство леммы.

Известно (см., например, [5], с. 398), что крайние точки множества неотрицательных гармонических функций (граница Мартина) для случайного блуждания, порожденного целочисленными векторами a_i, b_i и вероятностями p_i, имеют вид

$$f(x, y) = \lambda^x \mu^y,$$

где λ и μ — положительные решения уравнения

$$\sum_i p_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} = 1.$$

Можно показать, что для рассматриваемого марковского процесса каждая точка границы Мартина отождествляется с парой (λ, μ), являющейся положительным решением системы

$$\begin{cases} \sum_i p_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} = 1 \\ \sum_i q_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Очевидно, что пара (1,1) является решением этой системы.

Предположим, что каждое уравнение системы (4) задает границу выпуклого множества. Покажем, что тогда при выполнении условий (1) и (2) система (4) имеет еще только одно решение (λ, μ) такое, что $\lambda < 1$, $\mu < 1$.

Действительно, легко проверить, что в окрестности точки (1,1) уравнения этой системы порождают функции $\lambda_p(\mu)$ и $\lambda_q(\mu)$, причем (как вытекает из условий (1))

$$\lambda_p'(1) = -\frac{\sum p_i b_i}{\sum p_i a_i} > 0, \ \lambda_p''(1) < 0,$$
$$\lambda_q'(1) = -\frac{\sum q_i b_i}{\sum q_i a_i} > 0, \ \lambda_q''(1) > 0,$$

т. е. около точки (1,1) первая функция — возрастающая и вогнутая, а вторая — возрастающая и выпуклая. Поскольку множества, ограниченные графиками этих функций, выпуклые и в общей точке (1,1) выпуклости направлены в разные стороны, у графиков этих функций есть еще только одна точка пересечения (λ_0, μ_0). Для функций λ_p и λ_q имеем

$$\lambda_p(\mu) = 1 - \frac{\sum p_i b_i}{\sum p_i a_i}(\mu - 1) + \lambda_p''(1 + \theta_1(\mu - 1))(\mu - 1)^2,$$
$$\lambda_q(\mu) = 1 - \frac{\sum q_i b_i}{\sum q_i a_i}(\mu - 1) + \lambda_q''(1 + \theta_2(\mu - 1))(\mu - 1)^2.$$

Поэтому при $\mu > 1$ и достаточно близких к единице в силу условия (2) справедливо неравенство

$$\lambda_p(\mu) < \lambda_q(\mu).$$

Значит, обе координаты второй точки пересечения должны быть меньше единицы.

Частный случай, когда указанные множества выпуклые, рассмотрен в [4]. Другой интересный частный случай выпуклости возникает в случае, когда для всех i выполняется условие $a_i b_i = 0$. Устанавливается это рассмотрением второй производной функции

$$g(\alpha) = \sum_i p_i(\alpha(x_1 - x_2) + x_2)^{a_i}(\alpha(y_1 - y_2) + y_2)^{b_i},$$

где точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) лежат на границе множества (функция $g(\alpha)$ равна 1 на концах промежутка $[0, 1]$).

Теорема 3. *Пусть система (4) имеет только два решения: $\lambda_1 = \mu_1 = 1$ и $\lambda_2 < 1$, $\mu_2 < 1$. Тогда случайный вектор (X_n, Y_n) почти всюду стремится либо к (∞, ∞), либо к $(-\infty, -\infty)$.*

Доказательство. На траекториях рассматриваемого марковского процесса рассмотрим функционал Z_n, определяемый по формуле

$$Z_n = \lambda^{X_n}\mu^{Y_n},$$

где λ и μ — решения системы (4) такие, что $\lambda < 1$, $\mu < 1$. Покажем, что Z_n — мартингал.

Действительно,

$$\mathbf{M}(Z_{n+1}/T_n) = \sum_i s_i \lambda^{X_n + a_i}\mu^{Y_n + b_i} = \lambda^{X_n}\mu^{Y_n}\sum_i s_i \lambda^{a_i}\mu^{b_i} = Z_n,$$

где s_i равно p_i или q_i в зависимости от того, в какой полуплоскости находится вектор (X_n, Y_n).

По теореме о сходимости мартингалов последовательность Z_n сходится к некоторой случайной величине Z. Покажем, что Z почти всюду равна либо 0, либо ∞. Если это не так, то на некотором множестве траекторий ненулевой меры величина Z равна постоянной, отличной от 0. Но поскольку X_n и Y_n принимают только целочисленные значения, то на множестве траекторий ненулевой меры, начиная с некоторого момента, X_n и Y_n постоянны, что невозможно. Так как Z принимает лишь значения 0 и ∞, то X_n и Y_n могут стремиться только к ∞ или к $-\infty$, поскольку λ и μ меньше единицы.

Теперь покажем, что возможны только случаи, когда X_n и Y_n ведут себя одинаково, т. е. стремятся к одному и тому же значению.

Действительно, если $X_n \leqslant 0$ и $Y_n \to \infty$ на некотором множестве траекторий ненулевой меры, то $\mathbf{M}T_n \to \infty$, что противоречит лемме 1. Поэтому почти для всех траекторий

$$\text{либо } X_n \to -\infty \text{ и } Y_n \to -\infty,$$
$$\text{либо } X_n \to \infty \text{ и } Y_n \to \infty.$$

Предположим теперь, что d удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\sum_i b_i q_i}{-\sum_i a_i q_i} > d > \frac{-\sum_i b_i p_i}{\sum_i a_i p_i}. \tag{5}$$

Существование таких d следует из (2).

Рассмотрим случайную величину $S_n = dX_n + Y_n$. Очевидно, что

$$\mathbf{M}(S_{n+1} - S_n) \geqslant \min\left(\sum_i (da_i + b_i)p_i,\ \sum_i d(a_i + b_i)q_i\right) = t > 0.$$

Поэтому $\mathbf{M}S_n \geqslant nt$. Отсюда следует, что X_n и Y_n не могут стремиться к $-\infty$ на множестве положительной меры.

Вследствие леммы 1 и неравенства Чебышева для любого ε существует такая константа r, что

$$\mu(\omega : |T_n| > r) < \varepsilon.$$

Так как $X_n \to \infty$ почти всюду, то для любого $\varepsilon > 0$ существует множество Ω_1 такое, что $\mu(\Omega_1) > 1 - \varepsilon$ и на Ω_1

$$\frac{Y_n - dX_n}{X_n} \to 0.$$

Тем самым доказана

Теорема 4. *Если d удовлетворяет условиям (5), то для каждого $\varepsilon > 0$ существует Ω_ε такое, что $\mu(\Omega_\varepsilon < \varepsilon)$ и на дополнении Ω_ε*

$$\frac{Y_n}{X_n} \to d,$$

т. е. сходимость Y_n/X_n к d почти равномерная.

Следствие. *В условиях теоремы* 4

$$\frac{Y_n}{X_n} \to d \text{ почти всюду.}$$

Положим $\varepsilon = 1/r$ и рассмотрим семейство множеств $\{\Omega_{1/r}, r = 1, 2, \ldots\}$. Очевидно, что расходимость имеет место лишь на множестве $A = \bigcap_r \Omega_{1/r}$, мера которого равна 0.

В дальнейшем будем считать, что случайные блуждания P и Q удовлетворяют следующему дополнительному предположению, являющемуся усилением (1).

Условие А: $p_i = 0$ при $b_i > 0$ и $q_i = 0$ при $a_i > 0$.

Это условие означает, что в каждом рассматриваемом случайном блуждании возможно увеличение только одной координаты.

Теорема 5. *При выполнении условия* A *вероятность* $R(x,y)$ *вырождения (выхода из первого квадранта) процесса, начинающегося в состоянии* (x,y), *при* $(x,y)\to(\infty,\infty)$ *задается выражением*

$$R(x,y)=O(\lambda^x\mu^y),$$

где (λ,μ) — *решение системы* (4) *такое, что* $\lambda<1$, $\mu<1$.

Доказательство. Отметим, что $R(x,y)$ уменьшается с сужением множества, попадание в которое определяет вырождение. Сначала оценим вероятность попадания из точки (x,y) в полуплоскость

$$x\ln\lambda+y\ln\mu>0.$$

Так как $\lambda<1$ и $\mu<1$, то эта полуплоскость содержится в объединении открытых второго, третьего, четвертого квадрантов и точки (0,0). Вероятность попадания в это множество будем искать, сводя двумерное блуждание к одномерному.

Рассмотрим случайный процесс $V_n=X_n\ln\frac{1}{\lambda}+Y_n\ln\frac{1}{\mu}$. Отметим, что

$$V_{n+1}=V_n+\xi_n,$$

где случайная величина ξ_n принимает значения $h_i=a_i\ln\frac{1}{\lambda}+b_i\ln\frac{1}{\mu}$ с вероятностями p_i или q_i в зависимости от знака величины $T_n=Y_n-dX_n$. Найдем асимптотику вероятности попадания величины V_n на отрицательную полуось.

Пусть $L_n=\beta^{V_n}$, где

$$\beta=\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{(\ln\lambda)^2+(\ln\mu)^2}}\right).$$

Положим $\operatorname{tg}\phi=\frac{\ln\mu}{\ln\lambda}$. Тогда

$$\beta^{\cos\phi}=\lambda,\quad \beta^{\sin\phi}=\mu.$$

Проверим, что L_n — мартингал. Сначала заметим, что

$$\mathbf{M}(L_{n+1}/T_n)=L_n\mathbf{M}\beta^{\xi_n}.$$

Если $T_n>0$, то

$$\mathbf{M}\beta^{\xi_n}=\sum_i p_i\beta^{a_i\ln\frac{1}{\lambda}+b_i\ln\frac{1}{\mu}}=\sum_i p_i\lambda^{a_i}\mu^{b_i}=1.$$

Если же $T_n<0$, то

$$\mathbf{M}\beta^{\xi_n}=\sum_i q_i\beta^{a_i\ln\frac{1}{\lambda}+b_i\ln\frac{1}{\mu}}=\sum_i q_i\lambda^{a_i}\mu^{b_i}=1.$$

Пусть τ — случайный момент попадания V_n на отрицательную полуось, $\hat{L}_n$ — остановленный процесс, т. е.

$$\hat{L}_n = L_{\min(n,\tau)}.$$

Заметим, что $\hat{L}_n$ является мартингалом (см., например, [3], с. 65).

Поскольку множество значений величины h_i конечно и $V_{\tau-1} \geqslant 0$, мартингал $\hat{L}_n$ ограничен и сходится к случайной величине $\hat{L}$, принимающей значения либо 0 при $V_n \to \infty$, либо число из некоторого интервала $[1, l_0]$, так как мартингал L_n почти всюду сходится к нулю.

Если $V_0 = v$, то $\mathbf{M}\hat{L}_0 = \mathbf{M}\hat{L}_n = \mathbf{M}\hat{L}$.

Для каждого l из интервала $[1, l_0]$ пусть $P_v(l)$ — вероятность того, что $L \leqslant l$, если $V_0 = v > 0$. Тогда

$$\mathbf{M}\hat{L}_0 = \beta^v = \int\limits_{l\geqslant 1} l dP_v(l).$$

Так как вероятность $p\,(v)$ попадания на отрицательную полуось, исходя из состояния v, определяется по формуле

$$p\,(v) = \int\limits_{l\geqslant 1} dP_v(l),$$

то

$$\frac{\beta^v}{l_0} \leqslant p\,(v) \leqslant \beta^v.$$

Отсюда следует нижняя оценка для $R(x,y)$.

Аналогично показывается, что такой же вид имеет вероятность попадания в полуплоскость $x \ln\lambda + y \ln\mu \geqslant K$ для любого $K > 0$.

Заметим, что условие A при получения нижней оценки не используется.

Для получения верхней оценки можно рассмотреть объединение областей

$$A_K = \{(x,y) : x\ln\lambda + y\ln\mu \geqslant K\},$$
$$B_r = \{(x,y) : |y - dx| \geqslant r\},$$

где r выбирается таким, чтобы вероятность попадания в область B_r была равна 0 (возможность такого выбора обеспечивается условием A), а K выбирается настолько большим, чтобы объединение этих областей содержало второй, третий и четвертый квадранты.

Вероятность попадания в область $A_K \cup B_r$ не превосходит суммы вероятностей попадания в каждую область. Но при любом фиксированном

K вероятность попадания в A_K из точки (x, y) при $(x, y) \to (\infty, \infty)$ есть $O(\lambda^x \mu^y)$, а вероятность попадания в B_r равна 0.

Таким образом, вероятность $R(x, y)$ вырождения системы, исходящей из точки (x, y), задается выражением

$$R(x, y) = O(\lambda^x \mu^y).$$

Поскольку при «с-пожарном» управлении величина Y_n/X_n стремится к d, если процесс не вырождается и функционирует достаточно долго, можно считать, что при $t_n \to \infty$

$$X_n = t_n \cos v_n, \; Y_n = t_n \sin v_n,$$

где $\operatorname{tg} v_n \to d$, и при достаточно больших t_n вероятность вырождения $R(X_n, Y_n)$ равна

$$R(X_n, Y_n) = O((\lambda^{\cos v_n} \mu^{\sin v_n})^{t_n}),$$

где $\cos v_n \to \cos v$, $\sin v_n \to \sin v$, $\operatorname{tg} v = d$. Поэтому для минимизации асимптотического поведения этой вероятности мы должны выбрать такое d, чтобы минимизировать выражение $\lambda^{\cos v} \mu^{\sin v}$. Отсюда следует, что

$$d = \frac{\ln \mu}{\ln \lambda}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боровков А. А.** Предельное распределение для осциллирующего случайного блуждания // Теория вероятностей и ее применения. 1980. Т. 25, № 3. С. 663–665.
2. **Кардаш В. А.** Экономика оптимального погодного риска в АПК. М.: Агропромиздат, 1988.
3. **Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А.** Счетные цепи Маркова. М.: Наука, 1987.
4. **Рапопорт Э. О.** Об одной стохастической модели распределения неделимого ресурса // Труды Сибирской конференции по прикладной и индустриальной математике. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1995. С. 197–206.
5. **Спицер Ф.** Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969.
6. **Majumdar M., Zilcha I.** Optimal growth in a stochastic environment: some sensitivity and turnpike results // J. Economic Theory. 1987. V. 43, N 1. P. 358–376.

7. **Majumdar M., Radner R.** Stationary optimal policies with discounting in a stochastic activity analysis model // Econometrica. 1983. V. 51, N 6. P. 1821–1837.
8. **Radner R., Rothschild M.** On the allocation of effort // J. Economic Theory. 1975. V. 10, N 3. P. 358–376.
9. **Radner R.** A behavioral model of cost reduction // Bell J. Economics. 1975. V. 6, N 1. P. 196–215.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
Университетский пр., 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
15 июля 1996 г.