ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 1997. Том 4, № 2, 3–14

УДК 519.6

ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИЕ ОПТИМУМЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ*)

В. А. Емеличев, Э. Гирлих, О. А. Янушкевич

Найдены достаточные, а также необходимые условия разрешимости проблемы поиска лексикографического множества векторной задачи оптимизации в классе алгоритмов линейной свертки критериев.

Введение

Постановка многокритериальной (векторной) задачи оптимизации, которую будем обозначать через (X, f), предполагает задание на множестве (допустимых) решений X векторного критерия

$$f = (f_1, f_2, ..., f_n), \text{ где } X \to \mathbf{R}^n, \quad n \geqslant 2,$$

компоненты которого (частные критерии), не уменьшая общности, можно считать минимизируемыми:

$$f_i(x) \to \min_X, \quad i \in N_n = \{1, 2, ..., n\}.$$

Обычно под векторной задачей (X, f) понимают задачу поиска одного, нескольких (определенных) или всех элементов паретовского множества

$$P(X, f) = \{x \in X \mid \overline{\exists} x' \in X \text{ такого, что } f(x) \geqslant f(x') \text{ и } f(x) \neq f(x')\}.$$

Элементы этого множества называются эффективными решениями задачи (X, f) или решениями, оптимальными по Парето.

Один из важнейших подходов к нахождению некоторых эффективных решений основан на использовании линейной свертки частных критериев $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$, сущность которого заключается в скаляризации задачи (X, f) и выражается в виде следующего вполне очевидного включения (см. [1, 10, 12, 16]):

$$\Lambda(X, f) \subseteq P(X, f),$$

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь, Международной Соровской программы образования в области точных наук, а также немецкого научного фонда DAAD.

где

$$\Lambda(X,f) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_n} \Lambda(X,f,\lambda),$$

$$\Lambda_n = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0 \text{ при всех } i \in N_n \right\},$$

$$\Lambda(X,f,\lambda) = \arg\min\{\Phi(x,\lambda) \mid x \in X\},$$

$$\Phi(x,\lambda) = \lambda f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)$$

— линейная свертка частных критериев, $\arg\min\{\ \}$ — множество всех оптимальных аргументов соответствующей задачи минимизации.

Другими словами, для всякого вектора $\lambda \in \Lambda_n$ оптимальное решение однокритериальной задачи минимизации функции

$$\Phi(x,\lambda) \text{ при } x \in X \tag{1}$$

является оптимальным по Парето решением задачи (X, f).

Однако для некоторых многокритериальных задач существуют такие элементы паретовского множества, которые не являются оптимальными решениями задачи (1) минимизации линейной свертки ни при каком векторе λ из множества Λ_n (см., например, [1, 4, 5, 7, 9, 12, 17, 18]), т. е. эти элементы не удается найти с использованием никакой линейной свертки критериев. Это обстоятельство ($\Lambda(X,f) \neq P(X,f)$) дает основание говорить о неразрешимости в общем случае проблемы нахождения паретовского множества с помощью алгоритма линейной свертки критериев (ЛСК). Заметим, что при определенных свойствах частных критериев $f_i(x)$, $i \in N_n$, и множества X эта проблема становится разрешимой с помощью указанного алгоритма (теоремы Купманса и Карлина [1, 12, 20, 22]).

Основной результат настоящей работы касается вопросов разрешимости с помощью алгоритма ЛСК проблемы нахождения лексикографического множества $L(X,f)$ векторной задачи (X,f), являющегося подмножеством паретовского множества $P(X,f)$. Найдены необходимые (§ 1), а также достаточные (§ 2) условия такой разрешимости. В случае двух частных критериев указано необходимое и достаточное условие разрешимости (§ 3).

§ 1. Необходимые условия

Лексикографическое множество $L(X,f)$ задачи (X,f) (множество лексикографически оптимальных решений) определяется следующим образом (см. [1, 11, 12, 14]).

Пусть S_n — множество всех $n!$ перестановок чисел $1, 2, ..., n$. Для каждой перестановки $s = (s_1, s_2, ..., s_n) \in S_n$ на множестве допустимых решений X введем бинарное отношение

$$x \prec_s x',$$

которое справедливо тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

1) $f(x) = f(x')$;

2) существует $j \in N_n$ такое, что для любого $i \in N_{j-1}$

$$\delta_{s_j}(x, x') < 0 \text{ и } \delta_{s_i}(x, x') = 0,$$

где при всех $i \in N_n$

$$\delta_i(x, x') = f_i(x) - f_i(x').$$

Здесь и далее будем считать, что $N_0 = \varnothing$ (при $j = 1$).

Для каждой перестановки $s \in S_n$ введем множество

$$L(X, f, s) = \{x \in X \mid x \prec_s x' \text{ при любом } x' \in X\}.$$

Тогда лексикографическое множество $L(X, f)$ задачи (X, f) задается равенством

$$L(X, f) = \bigcup_{s \in S_n} L(X, f, s).$$

В дальнейшем, говоря о векторной задаче (X, f), будем предполагать, что непустое множество допустимых решений X и векторный критерий $f(x)$ имеют хотя и произвольную природу, но устроены так, что лексикографическое множество $L(X, f)$ непусто. В частности, например, $L(X, f)$ непусто, если множество векторных оценок $Y = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ ограничено и замкнуто.

Заметим, что в работах [8, 11, 15, 19, 23] были предложены алгоритмы нахождения одного из лексикографически оптимальных решений задачи (X, f) при определенных предположениях о структуре множества решений X и свойствах векторного критерия $f(x)$.

Будем говорить, что векторная задача (X, f) нахождения лексикографического множества $L(X, f)$ разрешима с помощью алгоритма ЛСК, если для любого $x^* \in L(X, f)$ существует $\lambda \in \Lambda_n$ такое, что

$$\Phi(x^*, \lambda) = \min\{\Phi(x, \lambda) \mid x \in X\},$$

т. е.

$$L(X, f) \subseteq \Lambda(X, f).$$

Следующий пример показывает, что существуют векторные задачи, для которых такое включение не выполняется.

Пример 1. Пусть $n = 2$, $X = [0,1] = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$,

$$f_1(x) = x \to \min_X,$$
$$f_2(x) = (1-x)^2 \to \min_X .$$

Очевидно, что $x^* = 1$ принадлежит множеству $L(X, f)$. Покажем, что $x^* \notin \Lambda(X, f)$. Предположим противное. Это означает существование такого вектора $\lambda = (\lambda_o, 1-\lambda_o) \in \Lambda_2$, что при любом $x \in X$

$$\Phi(x^*, \lambda) \leqslant \Phi(x, \lambda),$$

т. е. при любом $x \in X$

$$\lambda_o \leqslant \lambda_o x + (1-\lambda_o)(1-x)^2.$$

Тогда при каждом x, $0 \leqslant x < 1$, должны выполняться неравенства

$$1 - x \geqslant \frac{\lambda_o}{1-\lambda_o} > 0.$$

Однако это противоречит тому, что $1 - x \to 0$ при $x \to 1$.

Перед формулировкой необходимых условий разрешимости задачи нахождения множества $L(X, f)$ в классе алгоритмов ЛСК приведем известный результат А. М. Джоффриона.

Следуя [21] (см. также [12]), эффективное решение $x^* \in P(X, f)$ назовем *собственно эффективным*, или *оптимальным* по Джоффриону, если существует число $\Theta > 0$ такое, что для любых $x \in X$ и $i \in N_n$, для которых выполняется неравенство

$$\delta_i(x^*, x) > 0,$$

найдется такой индекс $j \in N_n$, что

$$\delta_j(x, x^*) > 0,$$
$$\frac{\delta_i(x^*, x)}{\delta_j(x, x^*)} \leqslant \Theta.$$

Напомним, что $\delta_i(x^*, x) = f_i(x^*) - f_i(x)$.

Множество всех собственно эффективных решений задачи (X, f) будем обозначать через $G(X, f)$.

Теорема Джоффриона [21] (см. также [1, 12]). *Для каждой векторной задачи (X, f) справедливо включение*

$$\Lambda(X, f) \subseteq G(X, f).$$

Следствие 1. *Для того чтобы векторная задача (X, f) нахождения лексикографического множества $L(X, f)$ была разрешима с помощью алгоритма ЛСК, необходимо, чтобы всякое лексикографически оптимальное решение этой задачи было оптимальным по Джоффриону, т. е. $L(X, f) \subseteq G(X, f)$.*

Рассмотрим пример, показывающий, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 2. Пусть

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0,1], \\ -1, & \text{если } x = 2; \end{cases}$$
$$f_2(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \in [0,1], \\ 1/2, & \text{если } x = 2; \end{cases}$$
$$f_3(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in [0,1], \\ 0, & \text{если } x = 2. \end{cases}$$

Требуется минимизировать функцию

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)), \text{ где } x \in X = [0,1] \cup \{2\}.$$

Легко проверить, что $L(X, f) = \{0, 1, 2\} \subseteq G(X, f)$ (для любого $x^* \in \{0, 1, 2\}$ в качестве числа Θ можно взять, например, 2).

Покажем, что $0 \notin \Lambda(X, f)$. Предположим противное, т. е. существует вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda_3$ такой, что

$$\Phi(0, \lambda) \leqslant \Phi(x, \lambda) \text{ при каждом } x \in X.$$

Тогда должны выполняться неравенства

$$\lambda_1 x - \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 \geqslant 0, \text{ если } x \in (0,1],$$
$$\lambda_2 \geqslant 2\lambda_1 \text{ (при } x = 2),$$

из которых следует противоречивое (ввиду $\lambda_1/\lambda_3 > 0$) утверждение

$$(0,1] \subset [\lambda_1/\lambda_3; +\infty).$$

§ 2. Достаточные условия

Для того чтобы сформулировать достаточные условия для разрешимости рассматриваемой задачи, несколько видоизменим определение оптимального по Джоффриону решения.

Оптимальное по Джоффриону решение $x^* \in P(X, f)$ назовем *α-собственно эффективным*, если существует число $\Theta > 0$, удовлетворяющее следующему условию: при любых $x \in X$ и $i, j \in N_n$ таких, что

$$\delta_i(x^*, x) > 0,$$
$$\delta_j(x, x^*) > 0,$$

выполняется неравенство

$$\frac{\delta_i(x^*, x)}{\delta_j(x, x^*)} \leqslant \Theta.$$

Множество всех α-собственно эффективных решений задачи (X, f) будем обозначать через $G_\alpha(X, f)$.

Легко видеть, что $G_\alpha(X, f) \subseteq G(X, f)$ для любой задачи (X, f).

Для произвольного решения $x \in X$ рассмотрим выпуклый конус

$$K(x) = \mathrm{conv}\overline{U(x)},$$

где $\mathrm{conv}\overline{U(x)}$ — выпуклая оболочка множества $\overline{U(x)}$, являющегося замыканием в $\mathbf{R}^n$ множества лучей

$$U(x) = \{ay \mid a \in \mathbf{R}_+,\ y \in V(x)\},$$

порожденных векторами

$$y \in V(x) = \{f(x') - f(x) \mid x' \in X\} \cup \mathbf{R}^n_+.$$

Пусть $x^* \in L(X, f, s^*)$, где $s^* = (1, 2, \ldots, n)$. Тогда, очевидно, для любого ненулевого вектора $y \in U(x^*)$ существует $j \in N_n$ такое, что при любом $i \in N_{j-1}$

$$y_j > 0 \text{ и } y_i = 0. \qquad (2)$$

Легко также убедиться в справедливости следующего утверждения. Если $x^* \in G_\alpha(X, f)$, то существует такое число $\Theta^* > 0$, что для любых $y \in U(x^*) \setminus \mathbf{R}^n_+$ и $(i, j) \in J^-(y) \times J^+(y)$

$$y_i + \Theta^* y_j \geqslant 0, \qquad (3)$$

где

$$J^-(y) = \{k \in N_n \mid y_k < 0\}, \quad J^+(y) = \{k \in N_n \mid y_k > 0\}.$$

Лемма. *Для каждого решения $x^* \in L(X, f) \cap G_\alpha(X, f)$ выпуклый замкнутый конус $K(x^*)$ не содержит прямых (является острым).*

Доказательство. Пусть $x^* \in L(X, f) \cap G_\alpha(X, f)$. Не нарушая общности, будем считать, что $x^* \in L(X, f, s^*)$, где $s^* = (1, 2, \ldots, n)$. Очевидно, для доказательства леммы достаточно показать, что для всякого ненулевого вектора $y \in K(x^*)$ справедливо (2).

Вначале убедимся в справедливости (2) для любого ненулевого вектора $y \in \overline{U(x^*)}$. Как отмечалось выше, (2) выполняется для любого ненулевого вектора $y \in U(x^*)$.

Далее доказательство проведем методом от противного. Пусть существует такой ненулевой вектор $y^* \in \overline{U(x^*)} \setminus U(x^*)$, что $y^*_l = a < 0$, где $l = \min\{i \in N_n \mid y^*_i \neq 0\}$. Так как вектор y^* является пределом последовательности

$$y^* = \lim_{t \to \infty} y^t, \quad y^t \in U(x^*),$$

то для любого числа $\Theta > 0$ существует натуральное число $t(\Theta)$, удовлетворяющее условиям

$$y_l^t \leqslant \frac{a}{2} \text{ при любом } t > t(\Theta), \tag{4}$$

$$y_i^t < -\frac{a}{2\Theta} \text{ при всех } i < l \text{ и } t > t(\Theta). \tag{5}$$

Кроме этого, из (2) следует, что для любого $t > t(\Theta)$ существует $j(t) < l$ такое, что $j(t) \in J^+(y^t)$. Поэтому в силу конечности множества N_n из последовательности $\{y^t\}$ можно выбрать бесконечную подпоследовательность $\{y^{t_k}\}$ такую, что

$$\exists j < l \ \ \forall t_k > t(\Theta) \ \ (j \in J^+(y^{t_k})). \tag{6}$$

С другой стороны, так как $x^* \in G_\alpha(X, f)$, то существует такое число $\Theta^* > 0$, что справедливы неравенства (3). Поэтому ввиду (6) при любом $t_k > t(\Theta^*)$ и $\Theta = \Theta^*$ справедливо неравенство

$$y_l^{t_k} + \Theta^* y_j^{t_k} \geqslant 0.$$

Отсюда и из (4) при любом $t_k > t(\Theta^*)$ следуют неравенства $y_j^{t_k} \geqslant -a/(2\Theta^*)$, противоречащие условию (5).

Теперь покажем, что (2) выполняется для любого ненулевого вектора $y \in K(x^*)$. Пусть ненулевой вектор y принадлежит конусу $K(x^*)$. Тогда с учетом выпуклости конуса $K(x^*)$, определения множества $U(x^*)$ и теоремы Каратеодори [3, 13] справедливо представление

$$y = \sum_{k=1}^{m} y^k, \text{ где } y^k \in \overline{U(x^*)}, \ m \leqslant n + 1.$$

Поэтому по доказанному выше для любого числа $k \in N_m$ существует $j(k)$ такое, что для любого $i \in N_{j(k)-1}$

$$y_{j(k)}^k > 0, \ \ y_i^k = 0.$$

Отсюда получаем, что для любого $i \in N_{j-1}$

$$y_j = \sum_{k=1}^{m} y_j^k > 0, \ \ y_i = 0,$$

где $j = \min\{j(k) \mid k \in N_m\}$, т. е. для вектора $y \in K(x^*)$ выполняется (2).

Следовательно, в случае, когда ненулевой вектор y принадлежит конусу $K(x^*)$, вектор $-y$ не принадлежит конусу $K(x^*)$. Это означает, что конус $K(x^*)$ не содержит прямых. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если лексикографически оптимальное решение задачи (X, f) является α-собственно эффективным, то оно принадлежит множеству $\Lambda(X, f)$.*

Доказательство. Пусть $x^* \in L(X, f) \cap G_\alpha(X, f)$. Тогда согласно лемме замкнутый выпуклый конус $K(x^*)$ не содержит прямых. Поэтому точка $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$ является крайней точкой конуса $K(x^*)$. Но никакая другая точка конуса не может быть крайней, а тем более выступающей. Пользуясь этим фактом и тем, что всякая крайняя точка замкнутого выпуклого множества по теореме Страшевича [13] является пределом некоторой последовательности выступающих точек, приходим к выводу, что начало координат есть выступающая точка конуса $K(x^*)$. Поэтому существует вектор $\lambda^* \in \mathbf{R}^n$ такой, что для любого $y \in K(x^*) \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* y_i > 0. \tag{7}$$

Легко видеть, что все компоненты вектора λ^* положительны. Действительно, если бы существовал такой индекс $s \in N_n$, что $\lambda_s^* \leqslant 0$, то для вектора $y^* \in K(x^*)$, где $y_i^* = 0$ при $i \neq s$ и $y_s^* = 1$, выполнялось бы неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* y_i^* = \lambda_s^* \leqslant 0,$$

которое противоречит неравенству (7). Таким образом, $\lambda_i^* > 0$ при любом $i \in N_n$.

Далее из (7) с учетом определения конуса $K(x^*)$ получаем, что при любом $x \in X$

$$\Phi(x^*, \lambda^*) \leqslant \Phi(x, \lambda^*).$$

Следовательно, при любом $x \in X$

$$\Phi(x^*, \lambda) \leqslant \Phi(x, \lambda),$$

где $\lambda = \lambda^* / \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^*$. Так как $\lambda \in \Lambda_n$, то $x^* \in \Lambda(X, f)$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Для того чтобы векторная задача (X, f) нахождения лексикографического множества $L(X, f)$ была разрешима с помощью алгоритма ЛСК, достаточно, чтобы всякое лексикографически оптимальное решение этой задачи было α-собственно эффективным, т. е.*

$$L(X, f) \subseteq G_\alpha(X, f).$$

Приведем пример, показывающий, что утверждение, обратное теореме 2, вообще говоря, неверно.

Пример 3. Пусть $n = 3$, $X = [0,1] \cup \{2\}$,

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in [0,1], \\ 0, & \text{если } x = 2; \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \in [0,1], \\ -1, & \text{если } x = 2; \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0,1], \\ 1, & \text{если } x = 2. \end{cases}$$

Легко видеть, что $L(X,f) = \{0,2\}$.

Пусть $\lambda = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Тогда при любом $x \in (0,1]$ имеем

$$\Phi(x,\lambda) = \frac{1}{3}x^2 > 0 = \Phi(0,\lambda) = \Phi(2,\lambda).$$

Поэтому $L(X,f) \subseteq \Lambda(X,f)$. Однако 0 не принадлежит множеству $G_\alpha(X,f)$, поскольку

$$\frac{\delta_2(0,x)}{\delta_1(x,0)} = \frac{1}{x} \to \infty \text{ при } x \to 0.$$

Резюмируя приведенные выше результаты, можно утверждать, что

1) справедлива цепочка импликаций

$$L(X,f) \subseteq G_\alpha(X,f) \Longrightarrow L(X,f) \subseteq \Lambda(X,f) \Longrightarrow L(X,f) \subseteq G(X,f);$$

2) утверждения, обратные этим импликациям, вообще говоря, неверны;

3) существуют такие задачи (X,f), что $G(X,f) \neq. G_\alpha(X,f)$.

Для множества эффективных векторных оценок задачи (X,f) введем обозначение

$$P(Y) = f(P(X,f)) = \{f(x) \mid x \in P(X,f)\}.$$

Следуя [12], множество $P(Y)$ назовем ***внешне устойчивым***, если для каждого $y \in Y \setminus P(Y)$ существует $y^* \in P(Y)$ такое, что $y \geqslant y^*$.

Из теоремы 2 вытекает ряд известных результатов.

Следствие 2. *Пусть множество $P(Y)$ внешне устойчиво. Тогда векторная задача (X,f) нахождения лексикографического множества $L(X,f)$ разрешима с помощью алгоритма ЛСК, если выполняется одно из условий:*

(i) $|P(Y)| < \infty$;

(ii) $P(X,f) = L(X,f)$.

Доказательство. Импликация $(ii) \Longrightarrow (i)$ вытекает из очевидного неравенства

$$|f(L(X,f))| \leqslant n!.$$

Поэтому осталось доказать достаточность условия (i).

Пусть $|P(Y)| < \infty$. Тогда всякое оптимальное по Парето решение является α-собственно эффективным. Действительно, при $|P(Y)| = 1$ в силу внешней устойчивости множества $P(Y)$ справедливо равенство $P(X,f) = G(X,f)$ (см. примеры 2 и 3 из [12, § 1.6]), а следовательно, и равенство $P(X,f) = G_\alpha(X,f)$.

Пусть $|P(Y)| > 1$. Ввиду внешней устойчивости множества $P(Y)$ в определении α-собственно эффективного решения множество X можно заменить на паретовское множество $P(X,f)$. Поэтому для любого эффективного решения x^* в качестве числа Θ, фигурирующего в определении α-собственно эффективного решения, можно взять число

$$\max\left\{\frac{\delta_i(x^*,x)}{\delta_j(x,x^*)} \mid x \in P(X,f), i,j \in N_n, \delta_i(x^*,x) > 0, \delta_j(x,x^*) > 0\right\},$$

которое существует в силу неравенств $1 < |P(Y)| < \infty$.

Итак, $P(X,f) = G_\alpha(X,f)$. Отсюда с учетом включения $L(X,f) \subseteq P(X,f)$, справедливого для любой векторной задачи (X,f), заключаем, что имеет место включение $L(X,f) \subseteq G_\alpha(X,f)$. Для завершения доказательства следствия 2 осталось воспользоваться теоремой 2.

Из следствия 2 получаем

Следствие 3 [2, 11]. *Проблема нахождения лексикографического множества $L(X,f)$ любой задачи (X,f) с конечным множеством векторных оценок Y разрешима с помощью алгоритма ЛСК.*

Действительно, из конечности множества Y следует конечность и внешняя устойчивость множества $P(Y)$. Далее следует воспользоваться утверждением (i) следствия 2.

Из следствия 3 вытекает известный результат (см., например, [6]) о том, что проблема нахождения лексикографического множества $L(X,f)$ любой многокритериальной задачи (X,f) с конечным множеством решений X разрешима с помощью алгоритма ЛСК.

§ 3. Случай двух частных критериев

Как уже отмечалось, $G_\alpha(X,f) \subseteq G(X,f)$. Однако при $n = 2$ справедливо равенство $G_\alpha(X,f) = G(X,f)$. Отсюда, а также из следствия 1 и теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Для того чтобы двухкритериальная задача (X,f), $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ нахождения лексикографического множества $L(X,f)$ была разрешима с помощью алгоритма ЛСК, необходимо и достаточно, чтобы всякое лексикографически оптимальное решение было решением, оптимальным по Джоффриону.*

Таким образом, при $n = 2$ имеет место критерий

$$L(X,f) \subseteq \Lambda(X,f) \Longleftrightarrow L(X,f) \subseteq G(X,f)(= G_\alpha(X,f)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н.** Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М.: Наука, 1986.
2. **Емеличев В. А., Гладкий А. А., Янушкевич О. А.** О многокритериальных задачах нахождения лексикографических оптимумов // Изв. АН Белоруси. Сер. физ.-мат. наук. 1996. № 3. С. 82–86.
3. **Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.** Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
4. **Емеличев В. А., Кравцов М. К.** О неразрешимости векторных задач дискретной оптимизации на системах подмножеств в классе алгоритмов линейной свертки критериев // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 1. С. 9–11.
5. **Емеличев В. А., Кравцов М. К.** О задачах векторной дискретной оптимизации на системах подмножеств, неразрешимых с помощью алгоритмов линейной свертки // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34, № 7. С. 1082–1094.
6. **Емеличев В. А., Кравцов М. К., Янушкевич О. А.** Лексикографические оптимумы многокритериальной задачи дискретной оптимизации // Мат. заметки. 1995. Т. 58, вып. 3. С. 365–371.
7. **Емеличев В. А., Перепелица В. А.** Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискрет. математика. 1994. Т. 6, вып. 1. С. 3–33.
8. **Кравцов М. К., Шерман А. Х.** О решении комбинаторных задач оптимизации с минимаксными критериями // Кибернетика. 1989. № 3. С. 71–77.
9. **Меламед И. И., Сигал И. Х.** Исследование линейной свертки критериев в многокритериальном дискретном программировании // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35. № 8. С. 1260–1270.
10. **Михалевич В. С., Волкович В. Л.** Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М.: Наука, 1982.
11. **Подиновский В. В., Гаврилов В. М.** Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: Сов. радио, 1975.
12. **Подиновский В. В., Ногин В. Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
13. **Рокафеллер Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
14. **Сергиенко И. В.** Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Киев: Наук. думка, 1985.
15. **Червак Ю. Ю.** Поиск лексикографически максимальной дискретно определенной точки выпуклого множества // Мат. методы решения экон. задач. М.: Наука, 1979. Вып. 8. С. 69–75.
16. **Штойер Р.** Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992.

17. **Burkard R. E., Keiding H., Krarup J., Pruzan P. M.** A relationship between optimality and efficiency in multicriteria 0-1 programming problems // Comput. Oper. Res. 1981. V. 8, N 4. P. 241–247.
18. **Emelichev V. A., Perepelitsa V. A.** Complexity of vector optimization problems on graphs // Optimization. 1991. V. 22, N 6. P. 903–918.
19. **Burkard R. E., Rendl F.** Lexicographic bottleneck problems // Oper. Res. Lett. 1991. V. 10, N 5. P. 303–308.
20. **Charnes A., Cooper W. W.** Managment Models and Industrial Application of Linear Pragramming. N. Y.: Wiley, 1961.
21. **Geoffrion A. M.** Proper efficiency and the theory of vector maximization // J. Math. Anal. Appl. 1968. V. 22, N 3. P. 618–630.
22. **Koopmans T. C.** Activity Analysis Production and Allocation. N. Y.: Wiley, 1951.
23. **Zimmermann U.** Some partial orders related to Boolean optimization and the greedy algorithm // Ann. of Discrete Math. Amsterdam: North-Holland, 1977. V. 1. P. 539–550.

Адреса авторов:

В. А. Емеличев
Белорусский
государственный университет,
пр. Скорины, 4,
220050 Минск, Беларусь.
E-mail: eva@mmf.bsu.minsk.by
Э. Гирлих
Otto-von-Guericke-Universität,
PSF 4120, 39016 Magdeburg,
Deutschland. E-mail:
eberhard.girlich@mathematik.
uni-magdeburg.d400.de
О. А. Янушкевич
Институт технической
кибернетики АН Беларуси,
ул. Сурганова, 6,
220012 Минск, Беларусь.
E-mail:
gladky@newman.basnet.minsk.by

Статья поступила
16 января 1996 г.
переработанный вариант —
7 апреля 1997 г.