ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 1997. Том 4, № 2, 15–42

УДК 519.716

A-КЛАССИФИКАЦИЯ КОНЕЧНЫХ ИНЪЕКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ*)

С. С. Марченков

Рассматривается множество Δ_k частичных одноместных инъективных функций, заданных на подмножествах множества E_k. На множестве Δ_k определяется оператор A-замыкания, который состоит из операций суперпозиции, обращения и перехода к двойственным функциям для четных подстановок на множестве E_k. Путем задания A-базисов описываются все A-замкнутые классы функций из Δ_k. Находится число A-замкнутых классов, которое выражается квадратным полиномом от k.

Введение

В последние годы наметился определенный прогресс в вопросе построения эффективных классификаций функций многозначной логики. Успешная классификация функций, самодвойственных относительно подстановок из полной симметрической и знакопеременной групп, проведенная в работах [3–7, 16], дала основание предположить, что подобные классификации можно строить, если вместо самодвойственных функций рассматривать «самодвойственные замкнутые классы». Эта идея разрабатывалась с функциональной точки зрения Нгуен Ван Хоа [11–15], а на языке отношений с использованием теории Галуа для алгебр Поста [1] в [8–10]. Пока [8, 9, 11–13] основное внимание уделяется классификации, основанной на операции суперпозиции и операциях перехода к двойственным функциям для подстановок из полной симметрической группы (в терминологии работ [8, 9] — S-классификация). Результаты из [10, 14, 15] и опыт построения S-классификации показывают, что во многом сходная ситуация должна наблюдаться для A-классификации, которая базируется на операциях суперпозиции и перехода к двойственным функциям для подстановок из знакопеременной группы.

Отметим, что ввиду особого положения знакопеременной группы среди групп подстановок и в силу значительности объема выкладок

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00089).

A-классификация в ряду G-классификаций [10, 14], по-видимому, определяет границу, за которой выполнение всех построений и доказательств в полном объеме представляется нереальным.

Начало исследованиям по A-классификации функций многозначной логики положено в [10]. Так же, как и в [13], A-классификацию функций можно свести к A-классификации отношений. Последняя довольно определенно подразделяется на три части: A-классификация отношений, которые получаются сужением графиков подстановок, A-классификация остальных двуместных отношений и A-классификация n-местных отношений при $n \geqslant 3$.

В данной работе осуществляется первая часть A-классификации отношений. При этом в силу специфики изучаемых отношений оказывается удобным вместо отношений рассматривать соответствующие им одноместные инъективные функции. В отличие от A-классификации (одноместных) функций k-значной логики рассматриваемые одноместные инъективные функции на множестве E_k оказываются, вообще говоря, частичными. Кроме того, в данном случае к операциям суперпозиции и перехода к двойственным функциям для подстановок из знакопеременной группы необходимо добавить операцию обращения (инверсии). Таким образом, мы приходим к следующей классификационной задаче, которая имеет самостоятельный интерес.

Пусть $k \geqslant 3$. На множестве $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ рассматривается совокупность Δ_k частичных одноместных инъективных функций и на Δ_k определяется оператор $[\ ]_A$ A-замыкания, который включает в себя операции суперпозиции, обращения и перехода к двойственным функциям для подстановок из знакопеременной группы $\mathbf{A}_k$. Задача A-классификации функций из Δ_k состоит в том, чтобы в подходящих терминах охарактеризовать все A-замкнутые множества функций из Δ_k.

Ниже в Δ_k мы выделяем так называемые основные функции и показываем, что всякое множество функций из Δ_k A-эквивалентно (в смысле оператора $[\ ]_A$) некоторому набору основных функций. Иными словами, мы описываем все A-замкнутые множества функций из Δ_k с помощью указания их A-базисов.

Статья состоит из трех параграфов. В § 1 вводятся используемые понятия. В § 2 устанавливаются вспомогательные утверждения. Основные результаты содержатся в § 3.

§ 1. Основные понятия

Пусть $k \geqslant 3$, Δ_k — множество всех частичных одноместных инъективных функций на E_k, т. е. функций f вида $f : E \to F$, где $E \subseteq E_k$, $F \subseteq E_k$ и множества E, F равномощны. Если $f \in \Delta_k$, то через $\mathrm{Arg} f$

обозначаем область определения функции f, через $\mathrm{Val} f$ — область ее значений и через f^{-1} — функцию, обратную к f. Так как f инъективна, то определение функции f^{-1} корректно. Отметим, что $\mathrm{Arg} f^{-1} = \mathrm{Val} f$, $\mathrm{Val} f^{-1} = \mathrm{Arg} f$, а функции $f^{-1} f$ и $f f^{-1}$ тождественны соответственно на множествах $\mathrm{Arg} f$ и $\mathrm{Val} f$.

Если E — конечное множество, то через $|E|$ обозначаем число его элементов. Пусть $2 \leqslant |E| < \infty$. Через $\mathbf{S}(E)$ обозначим полную симметрическую группу подстановок на множестве E, а через $\mathbf{A}(E)$ — знакопеременную подгруппу в $\mathbf{S}(E)$. Для группы $\mathbf{A}(E_k)$ применяем также обозначение $\mathbf{A}_k$.

Если $f \in \Delta_k$ и $\pi \in \mathbf{S}(E_k)$, то функция $\pi^{-1} f \pi$ называется *двойственной* к функции f относительно подстановки π. Если функция f определена на всем множестве E_k и, следовательно, f есть подстановка на E_k, то подстановка $\pi^{-1} f \pi$ называется *сопряженной* с f посредством подстановки π. Для любого P, $P \subseteq \Delta_k$, через $[P]_A$ обозначим замыкание множества функций P относительно операций суперпозиции, обращения и перехода к двойственным функциям для подстановок из группы $\mathbf{A}_k$ (A-замыкание). Множества вида $[P]_A$ называем *A-замкнутыми*. Если $P, Q \subseteq \Delta_k$, то множества P и Q называем *A-эквивалентными*, если $[P]_A = [Q]_A$.

При любом k, $k \geqslant 3$, следующие функции из Δ_k называем *основными* (указаны лишь те значения аргумента, для которых функция определена):

(1) $\alpha_k^i(x) = x$, если $0 \leqslant x \leqslant i$ $(i \in E_k)$.

(2) $\mu_k^i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0; \\ 0, & \text{если } x = 1; \qquad (2 \leqslant i \leqslant k) \\ x, & \text{если } 2 \leqslant x \leqslant i-1. \end{cases}$

(3) $\nu_k^i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0; \\ x, & \text{если } 2 \leqslant x \leqslant i. \qquad (1 \leqslant i \leqslant k-1) \end{cases}$

(4) $\eta_k^i(x) = \begin{cases} x+1 \pmod 3, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ x, & \text{если } x \in \{3, \ldots, i-1\}. \qquad (3 \leqslant i \leqslant k) \end{cases}$

(5) $\theta_k(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x, & \text{если } 3 \leqslant x \leqslant k-1. \end{cases}$

(6) $\kappa_k(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \in \{0, 2\}; \\ x-1, & \text{если } x \in \{1, 3\}. \qquad (k \geqslant 4) \end{cases}$

(7) $\zeta_k(x) = x + 1$, если $x \in \{0, 2, \ldots, k-2\}$ $\quad$ (k четно).

(8) $\xi_k(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x = 2; \qquad (k \text{ кратно четырем}) \\ x+1, & \text{если } x \in \{4, 6, \ldots, k-2\}. \end{cases}$

(9) $\kappa_4^1 = \kappa_4 \alpha_4^2$.

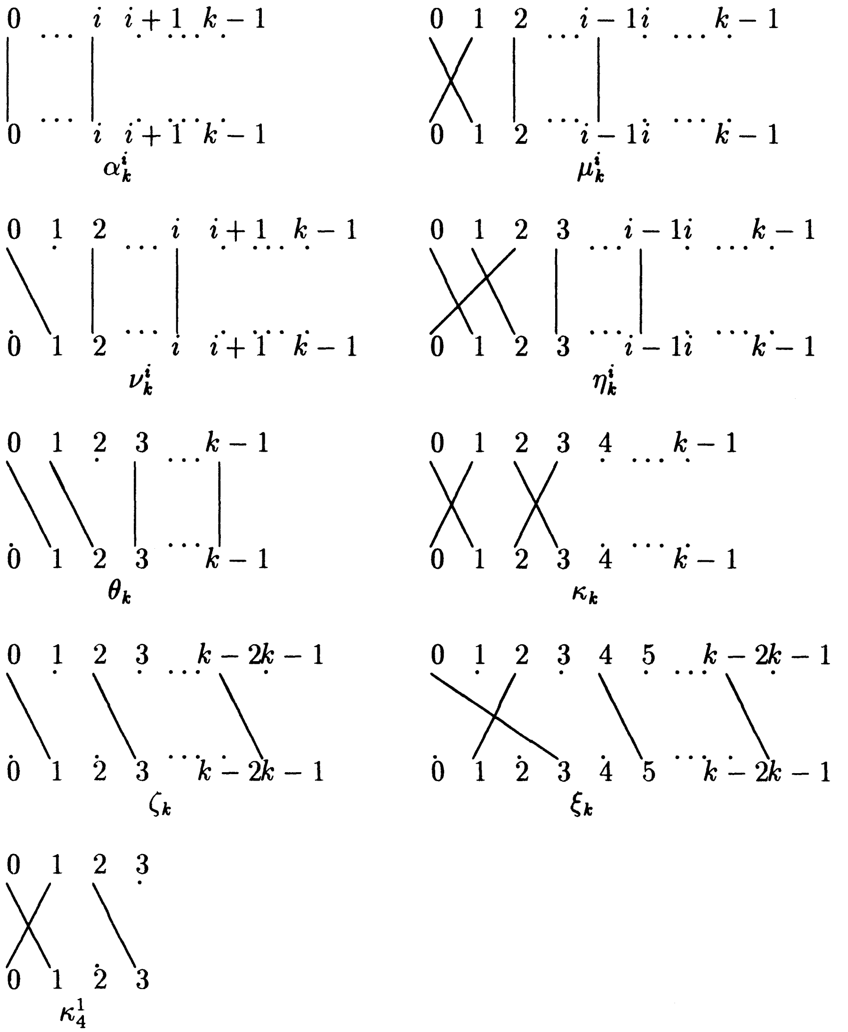

Рис. 1

На рис. 1 изображены графики введенных основных функций. Функции μ_k^i, ν_k^i, η_k^i, θ_k, κ_k, ζ_k, κ_4^1 соответствуют одноименным основным отношениям из [8, 9].

§ 2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Если $f \in \Delta_k$ и f тождественна на* $\mathrm{Arg} f$, *то множество* $[\{f\}]_A$ *при* $\mathrm{Arg} f = E_k$ *состоит из одной функции* $f = \alpha_k^{k-1}$, *а при* $\mathrm{Arg} \neq E_k$ *— из всех функций g таких, что* $|\mathrm{Arg} g| \leqslant |\mathrm{Arg} f|$ *и g тождественна на* $\mathrm{Arg} g$.

Доказательство. При $\mathrm{Arg}f = E_k$ утверждение леммы очевидно. Пусть $\mathrm{Arg}f \neq E_k$. Тогда всякая функция g из $[\{f\}]_A$, разумеется, удовлетворяет условиям: $|\mathrm{Arg}g| \leqslant |\mathrm{Arg}f|$, g тождественна на $\mathrm{Arg}g$. Далее, если E и F — равномощные подмножества множества E_k, то в группе $\mathbf{A}_k$ существует подстановка, отображающая E на F. Следовательно, если множеству $[\{f\}]_A$ принадлежит функция g такая, что $|\mathrm{Arg}g| \leqslant |\mathrm{Arg}f|$ и g тождественна на $\mathrm{Arg}g$, то все функции h такие, что $|\mathrm{Arg}h| = |\mathrm{Arg}g|$ и h тождественна на $\mathrm{Arg}h$, можно представить в виде $\pi^{-1}g\pi$, где $\pi \in \mathbf{A}_k$. Для завершения доказательства леммы остается отметить, что если функция h удовлетворяет условию $|\mathrm{Arg}h| < |\mathrm{Arg}f|$ и h тождественна на $\mathrm{Arg}h$, то h представима в виде $h = g_2g_1$, где $|\mathrm{Arg}g_1| = |\mathrm{Arg}g_2| = |\mathrm{Arg}h|+1$, $\mathrm{Arg}h = \mathrm{Arg}g_1 \cap \mathrm{Arg}g_2$, а функции g_1 и g_2 тождественны на множествах $\mathrm{Arg}g_1$ и $\mathrm{Arg}g_2$ соответственно. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $f \in \Delta_k$, $|\mathrm{Arg}f| = i$, $2 \leqslant i \leqslant k$, $\mathrm{Arg}f = \mathrm{Val}f$ и на множестве $\mathrm{Arg}f$ функция f является нечетной подстановкой. Тогда в множестве $[\{f\}]_A$ содержатся все функции g такие, что $|\mathrm{Arg}g| = i$ и $\mathrm{Arg}g = \mathrm{Val}g$.*

Лемма 3. *Пусть $f \in \Delta_k$, $|\mathrm{Arg}f| = i$, $3 \leqslant i \leqslant k$, $\mathrm{Arg}f = \mathrm{Val}f$ и на множестве $\mathrm{Arg}f$ функция f является нетождественной четной подстановкой, не входящей (при $i = 4$) в четверную группу Клейна. Тогда в множестве $[\{f\}]_A$ содержатся все функции g такие, что $|\mathrm{Arg}g| = i$, $\mathrm{Arg}g = \mathrm{Val}g$ и функция g на $\mathrm{Arg}g$ является четной подстановкой.*

Лемма 4. *Пусть $k \geqslant 4$, $f \in \Delta_k$, $|\mathrm{Arg}f| = 4$, $\mathrm{Arg}f = \mathrm{Val}f$ и на множестве $\mathrm{Arg}f$ функция f является нетождественной подстановкой из четверной группы Клейна. Тогда в множестве $[\{f\}]_A$ содержатся все функции g такие, что $|\mathrm{Arg}g| = 4$, $\mathrm{Arg}g = \mathrm{Val}g$ и функция g на $\mathrm{Arg}g$ является подстановкой из четверной группы Клейна.*

Доказательство. Леммы 2–4 представляют собой аналоги лемм 1–3 из [8] и доказываются по одной схеме. В качестве примера докажем лемму 2. Сначала рассмотрим случай, когда $i \leqslant k-2$. Положим $E = \mathrm{Arg}f$. Так как группа $\mathbf{A}_k$ является $(k-2)$-транзитивной, то совокупность всех подстановок из $\mathbf{A}_k$, сохраняющих множество E, образует группу $\mathrm{S}(E)$. Если рассматривать только функции, определенные на E, то мы имеем нечетную подстановку, которая получается ограничением функции f, и полную симметрическую группу $\mathrm{S}(E)$ подстановок на E, посредством которых можно задавать сопряженные подстановки. Так как группа $\mathrm{S}(E)$ не имеет нормальных подгрупп, содержащих нечетные подстановки, то множество $[\{f\}]_A$ содержит все функции h такие, что $\mathrm{Arg}h = \mathrm{Val}h = E$. Чтобы получить остальные функции g, удовлетворяющие условию леммы, достаточно рассмотреть все функции вида

$\pi^{-1}h\pi$, где $\pi \in \mathbf{A}_k$, и заметить, что любое i-элементное подмножество из E_k можно перевести в любое другое i-элементное подмножество подходящей четной подстановкой (последнее верно также для $i = k - 1$).

Теперь рассмотрим случай, когда $i \geqslant k - 1$. В этом случае совокупность всех подстановок из $\mathbf{A}_k$, сохраняющих множество E, образует группу $\mathbf{A}(E)$. В данном случае необходимо воспользоваться тем фактом [2], что группа $\mathbf{S}(E)$ порождается всеми подстановками, сопряженными с произвольной нечетной подстановкой посредством подстановок из группы $\mathbf{A}(E)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 5. *При любом* i, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, *множество* $[\{\nu_k^i\}]_A$ *состоит из всех функций* f *таких, что* $|\mathrm{Arg} f| \leqslant i$.

Доказательство. Очевидно, множество $[\{\nu_k^i\}]_A$ не может содержать функций f таких, что $|\mathrm{Arg} f| > i$.

Пусть $i = 1$. Если $k = 3$, то каждая функция f из Δ_3 такая, что $|\mathrm{Arg} f| = 1$ и $\mathrm{Arg} f \neq \mathrm{Val} f$, представима в виде $\pi^{-1}\nu_3^1\pi$ или в виде $\pi^{-1}(\nu_3^1)^{-1}\pi$, где $\pi \in \mathbf{A}_3$. Так как $\alpha_3^0 = (\nu_3^1)^{-1}\nu_3^1$, то из леммы 1 следует справедливость леммы 5 при $k = 3$.

Пусть $k \geqslant 4$, $f \in \Delta_k$, $\mathrm{Arg} f = \{a\}$, $\mathrm{Val} f = \{b\}$ и $a \neq b$. Так как $k \geqslant 4$, то группа $\mathbf{A}_k$ дважды транзитивна. Поэтому в $\mathbf{A}_k$ найдется такая подстановка π, что $\pi(a) = 0$ и $\pi(b) = 1$. Поэтому $f = \pi^{-1}\nu_k^1\pi$. Как и выше, из равенства $\alpha_k^0 = (\nu_k^1)^{-1}\nu_k^1$ и леммы 1 следует утверждение леммы 5 при $k \geqslant 4$.

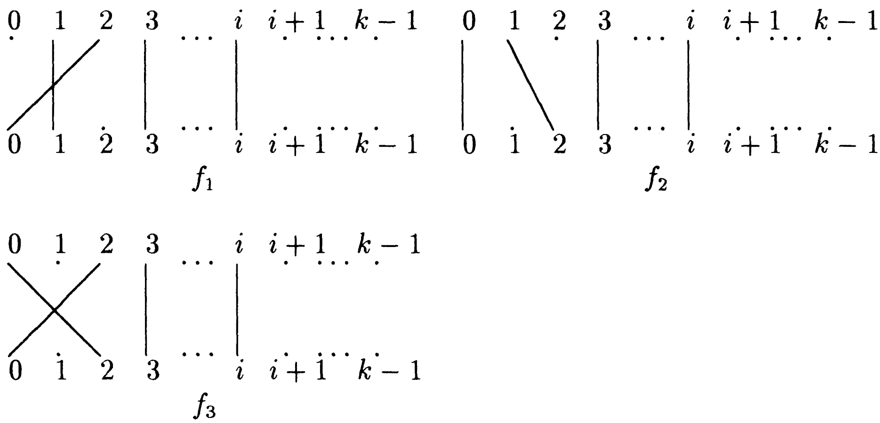

Рис. 2

Предположим, что $i \geqslant 2$. Сначала рассмотрим функции f такие, что $|\mathrm{Arg} f| = i$. Пусть функции f_1 и f_2 двойственны функции ν_k^i относительно четных подстановок $(012)(3)\ldots(k-1)$ и $(021)(3)\ldots(k-1)$ (рис. 2). Тогда функция $f_3 = f_2 f_1 \nu_k^i$ удовлетворяет условиям леммы 2. Следовательно, множеству $[\{\nu_k^i\}]_A$ принадлежат все такие функции g, что

$\mathrm{Arg}g = \mathrm{Val}g$ и $|\mathrm{Arg}g| = i$. Взяв в этом множестве функции g с условием $\mathrm{Arg}g = \{1, 2, \dots, i\}$ и полагая $h_1 = g\nu_k^i$, получаем все такие функции h_1, что $\mathrm{Arg}h_1 = \{0, 2, 3, \dots, i\}$ и $\mathrm{Val}h_1 = \{1, 2, \dots, i\}$. Переход к функциям, двойственным к h_1 относительно подстановок из группы $\mathbf{A}_k$, и взятие обратных функций дают все функции h_2 такие, что $|\mathrm{Arg}h_2| = i$, а множества $\mathrm{Arg}h_2$ и $\mathrm{Val}h_2$ отличаются ровно двумя элементами.

Далее по индукции предположим, что в множестве $[\{\nu_k^i\}]_A$ уже определены все функции g такие, что $|\mathrm{Arg}g| = i$, а множества $\mathrm{Arg}g$ и $\mathrm{Val}g$ отличаются $2m$ элементами. Пусть функция g_1 такова, что $|\mathrm{Arg}g_1| = i$, а множества $\mathrm{Arg}g_1$ и $\mathrm{Val}g_1$ отличаются $2(m+1)$ элементами. Выберем элемент a из $\mathrm{Arg}g_1 \setminus \mathrm{Val}g_1$ и элемент b из $\mathrm{Val}g_1 \setminus \mathrm{Arg}g_1$ и согласно индуктивному предположению в множестве $[\{\nu_k^i\}]_A$ найдем такие функции g_2 и g_3, что $\mathrm{Arg}g_2 = \mathrm{Arg}g_1$, $\mathrm{Val}g_2 = \mathrm{Arg}g_3 = (\mathrm{Arg}g_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\}$, $\mathrm{Val}g_3 = \mathrm{Val}g_1$ и выполняется равенство $g_1 = g_3 g_2$.

Так как функция $\nu_k^i(\nu_k^i)^{-1}$ тождественна на множестве $\{1, 2, \dots, i\}$, то согласно лемме 1 для любого j, $1 \leqslant j \leqslant i-1$, в множестве $[\{\nu_k^i\}]_A$ содержится такая функция p_j, что $\mathrm{Arg}p_j = \{1, 2, \dots, j\}$ и p_j тождественна на $\mathrm{Arg}p_j$. Так как $p_j \nu_k^i = \nu_k^j$, то для завершения доказательства леммы остается воспользоваться уже установленным утверждением леммы для множества $[\{\nu_k^j\}]_A$.

Лемма 6. *Пусть $f \in \Delta_k$, $|\mathrm{Arg}f| = i$, $2 \leqslant i \leqslant k$, $\mathrm{Arg}f = \mathrm{Val}f$ и функция f на множестве $\mathrm{Arg}f$ является нечетной подстановкой. Если $i = k$, то множество $[\{f\}]_A$ совпадает с $\mathbf{S}(E_k)$; если $i < k$, то множество $[\{f\}]_A$ состоит из всех функций g_1 и g_2 таких, что $|\mathrm{Arg}g_1| = i$, $\mathrm{Arg}g_1 = \mathrm{Val}g_1$ и $|\mathrm{Arg}g_2| < i$.*

Лемма 7. *Пусть $f \in \Delta_k$, $|\mathrm{Arg}f| = i$, $3 \leqslant i \leqslant k$, $\mathrm{Arg}f = \mathrm{Val}f$ и функция f на множестве $\mathrm{Arg}f$ является нетождественной четной подстановкой, не входящей (при $i = 4$) в четверную группу Клейна. Если $i = k$, то множество $[\{f\}]_A$ совпадает с $\mathbf{A}_k$; если $i < k$, то множество $[\{f\}]_A$ состоит из всех функций g_1 и g_2 таких, что $|\mathrm{Arg}g_1| = i$, $\mathrm{Arg}g_1 = \mathrm{Val}g_1$, функция g_1 на множестве $\mathrm{Arg}g_1$ является четной подстановкой и $|\mathrm{Arg}g_2| < i$.*

Лемма 8. *Пусть $k \geqslant 4$, $f \in \Delta_k$, $|\mathrm{Arg}f| = 4$, $\mathrm{Arg}f = \mathrm{Val}f$ и функция f на множестве $\mathrm{Arg}f$ является нетождественной подстановкой из четверной группы Клейна. Если $k = 4$, то множество $[\{f\}]_A$ совпадает с четверной группой Клейна; если $k > 4$, то множество $[\{f\}]_A$ состоит из всех функций g_1 и g_2 таких, что $|\mathrm{Arg}g_1| = 4$, $\mathrm{Arg}g_1 = \mathrm{Val}g_1$, функция g_1 на множестве $\mathrm{Arg}g_1$ является подстановкой из четверной группы Клейна и $|\mathrm{Arg}g_2| < 4$.*

Доказательство. Справедливость лемм 6–8 устанавливается по одной схеме. Докажем лемму 6. При $i = k$ утверждение леммы 6

следует из леммы 2. Пусть $i < k$. Очевидно, что множество $[\{f\}]_A$ не может содержать функций g таких, что либо $|\mathrm{Arg}g| > i$, либо $|\mathrm{Arg}g| = i$ и $\mathrm{Arg}g \neq \mathrm{Val}g$. Вместе с тем согласно лемме 2 в множестве $[\{f\}]_A$ содержатся все функции g_1 указанного в лемме 6 вида, в частности функции μ_k^i и α_k^{i-1}. По лемме 1 в множестве $[\{f\}]_A$ имеется функция h такая, что $\mathrm{Arg}h = \{1, 2, \ldots, i\}$, и функция h тождественна на $\mathrm{Arg}h$. Так как $h\mu_k^i = \nu_k^{i-1}$, то $\nu_k^{i-1} \in [\{f\}]_A$. Теперь с помощью леммы 5 устанавливаем принадлежность множеству $[\{f\}]_A$ функций вида g_2.

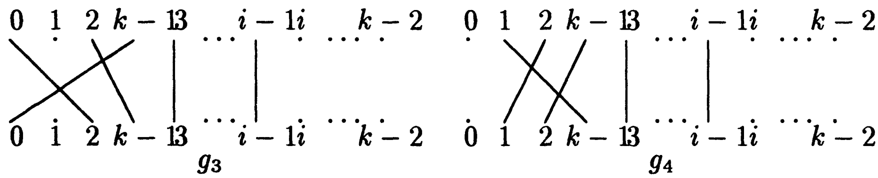

Рис. 3

Докажем лемму 7. При $i = k$ необходимо воспользоваться леммой 3 и тем фактом [2], что всякая подстановка, сопряженная с четной подстановкой, является четной подстановкой. Если $i < k$, то согласно лемме 3 в множестве $[\{f\}]_A$ содержатся все функции вида g_1, в частности функции g_3 и g_4 (рис. 3). Имеем $g_4 g_3 = \nu_k^{i-1}$. Далее применяем лемму 5.

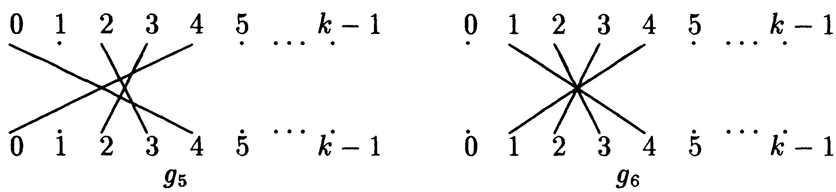

Рис. 4

При доказательстве леммы 8 пользуемся леммой 4 и тем фактом [2], что всякая подстановка, сопряженная с подстановкой из четверной группы Клейна, входит в четверную группу Клейна. При $k > 4$ в соответствии с леммой 4 в множестве $[\{f\}]_A$ выбираем функции g_5, g_6 (рис. 4). Так как $g_6 g_5 = \nu_k^3$, то применима лемма 5.

Лемма 9. *Множество* $[\{\theta_k\}]_A$ *состоит из всех функций* f_1 *и* f_2 *таких, что* $|\mathrm{Arg}f_1| = k - 1$, f_1 *является ограничением на* $\mathrm{Arg}f_1$ *подстановки из* $\mathbf{A}_k$ *и* $|\mathrm{Arg}f_2| \leqslant k - 2$.

Доказательство. Пусть $k = 3$. Тогда, как нетрудно проверить, функции $\theta_3(x)$, $\theta_3(x+1) + 2$, $\theta_3(x+2) + 1$ (сложение рассматривается по модулю 3) и обратные к ним функции являются функциями типа

f_1; они соответствуют подстановкам $x+1$, $x+2$ из группы $\mathbf{A}_3$. Для тождественной подстановки необходимо рассмотреть функцию $\theta_3^{-1}\theta_3 = \alpha_3^1$ и воспользоваться леммой 1. При получении функций типа f_2 достаточно взять функции вида $f_1 h_1$, где $h_1 \in [\{\alpha_3^1\}]_A$ и $|\mathrm{Arg} h_1| \leqslant 1$.

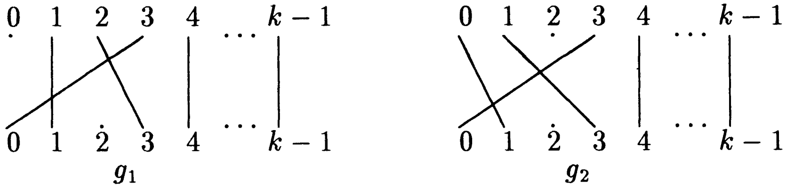

Рис. 5

Пусть $k \geqslant 4$. Обозначим через g_1 функцию, двойственную к θ_k относительно четной подстановки (02)(13) (рис. 5). Тогда при $i = k-1$ функция $g_2 = g_1\theta_k$ удовлетворяет условиям леммы 3. Пусть f_1 — функция указанного в лемме типа. Если $\mathrm{Arg} f_1 = \mathrm{Val} f_1$, то согласно лемме 3 имеем $f_1 \in [\{g_2\}]_A$. Предположим, что $\mathrm{Arg} f_1 \neq \mathrm{Val} f_1$. Используя неравенство $k \geqslant 4$ и $(k-2)$-транзитивность группы $\mathbf{A}_k$, выберем в $\mathbf{A}_k$ такую подстановку π, чтобы для функции $g_3 = \pi^{-1}\theta_k\pi$ выполнялись соотношения $\mathrm{Arg} g_3 = \mathrm{Arg} f_1$ и $\mathrm{Val} g_3 = \mathrm{Val} f_1$. Очевидно, что функция g_3 задает ограничение на $\mathrm{Arg} g_3$ некоторой подстановки из $\mathbf{A}_k$. Поэтому в силу леммы 3 в множестве $[\{g_2\}]_A$ имеется функция g_4 такая, что $\mathrm{Arg} g_4 = \mathrm{Val} g_4 = \mathrm{Val} g_3$ и $f_1 = g_4 g_3$.

Функции типа f_2 принадлежат множеству $[\{\theta_k\}]_A$, поскольку в силу леммы 7 они принадлежат множеству $[\{g_2\}]_A$.

Наконец, поскольку в силу равенства $|\mathrm{Arg}\theta_k| = k-1$ функция θ_k доопределяется до четной подстановки на E_k единственным образом, то в множестве $[\{\theta_k\}]_A$ не могут содержаться такие функции f, что $|\mathrm{Arg} f| = k-1$ и f является ограничением на $\mathrm{Arg} f$ нечетной подстановки из $\mathrm{S}(E_k)$. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Пусть $f \in \Delta_k$, $|\mathrm{Arg} f| = k-1$, $\mathrm{Val} f \neq \mathrm{Arg} f$ и f является ограничением на $\mathrm{Arg} f$ нетождественной подстановки из $\mathbf{A}_k$, не входящей (при $k=4$) в четверную группу Клейна. Тогда $\theta_k \in [\{f\}]_A$.*

Доказательство. Если $k=3$, то $\theta_3(x)$ совпадает с одной из функций $f(x)$, $f(x+1)+2$, $f(x+2)+1$, $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(x+1)+2$, $f^{-1}(x+2)+1$. Предполагая далее, что $k \geqslant 4$, обозначим через τ такую подстановку из $\mathbf{A}_k$, для которой функция f является ограничением. Пусть $\mathrm{Arg} f \setminus \mathrm{Val} f = \{a\}$, $\mathrm{Val} f \setminus \mathrm{Arg} f = \{b\}$ и $c_1, \ldots, c_m$ — такие элементы из $\mathrm{Arg} f \cap \mathrm{Val} f$, что $f(a) = c_1$, $f(c_1) = c_2, \ldots, f(c_m) = b$.

Сначала рассмотрим случай, когда $m = 0$, т. е. $f(a) = b$. Так как подстановка τ четна, то ограничение τ на множество $E_k \setminus \{a, b\}$ является нечетной подстановкой. Далее, поскольку при $k = 4$ подстановка τ не входит в четверную группу Клейна, случай $k = 4$ невозможен. Следовательно, цикловое разложение подстановки τ на множестве $E_k \setminus \{a, b\}$ содержит либо цикл $(d_1 \ldots d_n)$ при $n \geqslant 4$, либо по крайней мере два двухэлементных цикла $(d_1 d_2)$ и $(e_1 e_2)$.

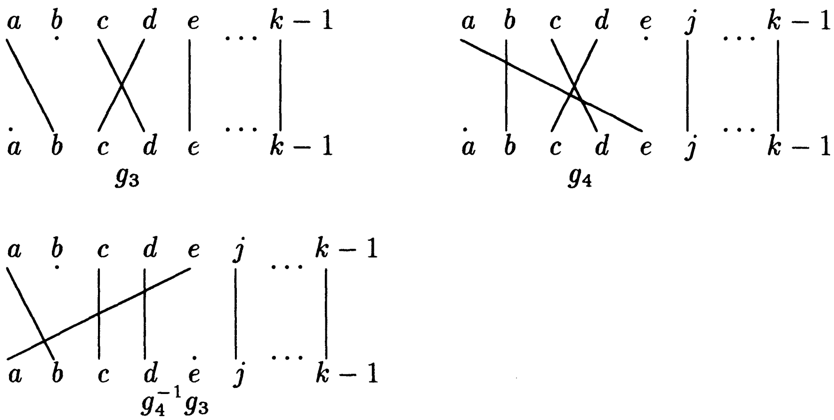

Рис. 6

В первом случае определим функцию g_1, которая является двойственной к функции f относительно четной подстановки $(ab)(d_1 d_2)$ (указываем лишь неодноэлементные циклы в цикловом разложении подстановки). Так как функция $g_1 f$ удовлетворяет условиям леммы 3, то в $[\{g_1 f\}]_A$ имеется такая функция g_2, что $\mathrm{Arg} g_2 = \mathrm{Val} f$, $g_2(b) = b$ и функция $g_3 = g_2 f$ имеет вид, изображенный на рис. 6. Теперь возьмем функцию g_4, двойственную к функции g_3 относительно четной подстановки $(be)(cd)$, где $e \in E_k \setminus \{a, b, c, d\}$. Ясно, что функция θ_k двойственна функции $g_4^{-1} g_3$ относительно любой четной подстановки, переводящей элементы 0, 1, 2 в элементы e, a, b соответственно (такие подстановки существуют, поскольку $n \geqslant 4$).

Допустим, что в цикловом разложении подстановки τ имеются циклы $(d_1 d_2)$, $(e_1 e_2)$, где $\{d_1, d_2, e_1, e_2\} \subseteq E_k \setminus \{a, b\}$. Если взять функцию g_5, двойственную к f относительно четной подстановки $(ab)(d_2 e_1)$, то функция $g_5 f$ будет удовлетворять условиям леммы 3. Далее рассуждаем так же, как при рассмотрении функции $g_1 f$.

Предположим, что $m = 1$. Если в цикловом разложении подстановки τ на множестве $E_k \setminus \{a, b, c_1\}$ имеется цикл $(d_1 \ldots d_n)$ при $n \geqslant 4$, то возьмем функцию g_6, двойственную к f относительно четной подстановки $(d_1 d_2 d_3)$, и образуем функцию $g_6^{-1} f$. Проверяем, что эта функция

удовлетворяет условиям леммы 3. Далее в множестве $[\{g_6^{-1}f\}]_A$ выбираем функцию g_7 такую, что $\mathrm{Arg}g_7 = \mathrm{Arg}f$, $g_7(a) = a$, $g_7(c_1) = c_1$ и функция fg_7 тождественна на множестве $E_k \setminus \{a, b, c_1\}$. Функция θ_k двойственна функции fg_7 относительно любой четной подстановки, переводящей элементы $0, 1, 2$ в a, c_1, b соответственно (такие подстановки существуют, поскольку в данном случае $k > 7$).

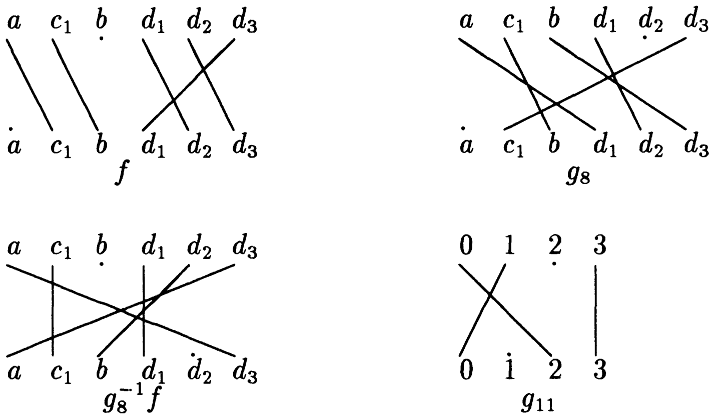

Рис. 7

Пусть в цикловом разложении подстановки τ имеется цикл $(d_1 d_2 d_3)$, где $\{d_1, d_2, d_3\} \subseteq E_k \setminus \{a, b, c_1\}$. Возьмем функцию g_8, являющуюся двойственной к функции f относительно четной подстановки $(c_1 d_1)(b d_2)$. Тогда (рис. 7, где указаны лишь элементы a, b, c_1, d_1, d_2, d_3) функцию $g_8^{-1}f$ можно рассматривать в качестве функции f при $m = 0$.

Пусть в цикловом разложении подстановки τ на множестве $E_k \setminus \{a, b, c_1\}$ имеется цикл $(d_1 d_2)$, но нет циклов большей длины. Определяя функцию g_9, являющуюся двойственной к f относительно четной подстановки $(bc_1)(d_1 d_2)$, замечаем, что функция $g_{10} = g_9^{-1}f$ тождественна на множестве $E_k \setminus \{a, b, c_1\}$ и $g_{10}(a) = b$, $g_{10}(c_1) = a$. Так как $k \geqslant 7$, то можно выбрать такую подстановку π из $\mathbf{A}_k$, что $\pi(0) = c_1$, $\pi(1) = a$ и $\pi(2) = b$. Поэтому $\theta_k = \pi^{-1} g_{10} \pi$.

Пусть цикловое разложение подстановки τ на множестве $E_k \setminus \{a, b, c_1\}$ состоит только из одноэлементных циклов. Если $k \geqslant 5$, то рассуждаем так же, как для функции g_{10}. Если $k = 4$, то пусть d — элемент, отличный от a, b и c_1. Возьмем такую четную подстановку π, что $\pi(\{0, 1\}) = \{a, c_1\}$ и $\pi(3) = d$. Тогда функция $g_{11} = \pi^{-1} f \pi$ либо совпадает с функцией θ_4, либо имеет вид, изображенный на рис. 7. Во втором случае функция θ_4 двойственна к функции g_{11}^{-1} относительно четной подстановки (021).

Наконец, предположим, что $m \geqslant 2$. Если функция g_{12} двойственна к функции f относительно четной подстановки (ac_1c_2), то функция $g_{12}f^{-1}$ уже рассматривалась при $m = 1$. Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Пусть* $f \in \Delta_k$ *и* $|\mathrm{Arg} f| = i$, $2 \leqslant i \leqslant k-1$. *Если* $\mathrm{Arg} f \neq \mathrm{Val} f$ *и выполняется хотя бы одно из условий*:

(a) $\mathrm{Arg} f \cup \mathrm{Val} f \neq E_k$,

(b) $1 \leqslant |\mathrm{Arg} f \cap \mathrm{Val} f| < k-2$,

(c) $|\mathrm{Arg} f| = k-1$ *и* f *есть ограничение (на* $\mathrm{Arg} f$*) нечетной подстановки из* $\mathbf{S}_k(E_k)$,

то $\nu_k^i \in [\{f\}]_A$.

Доказательство. Предположим, что выполняется условие (a). Выберем элемент a из $E_k \setminus (\mathrm{Arg} f \cup \mathrm{Val} f)$.

Случай 1. Пусть $|E_k \setminus (\mathrm{Arg} f \cup \mathrm{Val} f)| \geqslant 2$.

Обозначим через b элемент, отличный от a и не входящий в $\mathrm{Arg} f \cup \mathrm{Val} f$. Далее пусть $c \in \mathrm{Arg} f \setminus \mathrm{Val} f$, $d = f(c)$. Положим $f_1 = \pi_1^{-1} f \pi_1$, где четная подстановка π_1 имеет единственный неодноэлементный цикл (acb). Тогда функция f_1 отличается от функции f только тем, что принимает значение d не в точке c, а в точке a. Следовательно, функция $f_2 = f_1^{-1} f$ тождественна на множестве $\mathrm{Arg} f \setminus \{c\}$ и $f(c) = a$. Так как $|\mathrm{Arg} f| \geqslant 2$, $\mathrm{Arg} f \neq \mathrm{Val} f$ и $|E_k \setminus (\mathrm{Arg} f \cup \mathrm{Val} f)| \geqslant 2$, то $k \geqslant 5$. Поэтому имеется такая четная подстановка π_2, что $\pi_2(0) = c$, $\pi_2(1) = a$ и $\pi_2(\{2, \ldots, i\}) = \mathrm{Arg} f \setminus \{c\}$. Тогда будем иметь $\nu_k^i = \pi_2^{-1} f_2 \pi_2$.

Случай 2. $|\mathrm{Arg} f \setminus \mathrm{Val} f| \geqslant 2$.

Пусть $\{b, c\} \subseteq \mathrm{Arg} f \setminus \mathrm{Val} f$, $b \neq c$ и $f_3 = \pi_3^{-1} f \pi_3$, где π_3 — четная подстановка (abc) (остальные циклы подстановки π_3 одноэлементны). Если $d = f(b)$ и $e = f(c)$, то функция f_3 отличается от функции f тем, что полными прообразами элементов d, e вместо элементов b, c являются элементы a, b. Следовательно, если положить $f_4 = f_3^{-1} f$, то функция f_4 тождественна на множестве $\mathrm{Arg} f \setminus \{b, c\}$, $f_4(b) = a$ и $f_4(c) = b$. Так как $\mathrm{Arg} f_4 \cup \mathrm{Val} f_4 = \mathrm{Arg} f \cup \{a\}$ и $|\mathrm{Arg} f \setminus \mathrm{Val} f| \geqslant 2$, то $|E_k \setminus (\mathrm{Arg} f_4 \cup \mathrm{Val} f_4)| \geqslant 2$, т. е. имеет место случай 1.

Случай 3. $|E_k \setminus (\mathrm{Arg} f \cup \mathrm{Val} f)| = |\mathrm{Arg} f \setminus \mathrm{Val} f| = 1$.

Пусть $\mathrm{Arg} f \setminus \mathrm{Val} f = \{b\}$ и $\mathrm{Val} f \setminus \mathrm{Arg} f = \{c\}$. Обозначим через $a_1, \ldots, a_m$ такие элементы из $\mathrm{Arg} f \cap \mathrm{Val} f$, что $f(b) = a_1$, $f(a_1) = a_2, \ldots$, $f(a_m) = c$.

Сначала предположим, что $m = 0$, т. е. $f(b) = c$. Допустим, что функция f тождественна на $\mathrm{Arg} f \setminus \{b\}$. Если $k \geqslant 5$, то возьмем такую четную подстановку π_4, что $\pi_4(0) = b$, $\pi_4(1) = c$ и $\pi_4(\{2, \ldots, i\}) = \mathrm{Arg} f \setminus \{b\}$. Тогда $\nu_k^i = \pi_4^{-1} f \pi_4$.

При $k = 4$ предполагаем, что подстановка π_4 удовлетворяет лишь условиям $\pi_4(0) = b$ и $\pi_4(1) = c$. Тогда функция $f_5 = \pi_4^{-1} f \pi_4$ либо совпадает с функцией ν_4^2, либо имеет вид, изображенный на рис. 8. Во втором случае определяем функции f_6 и f_7, двойственные к f_5 относительно четных подстановок (013)(2) и (031)(2). Ясно, что функция $f_7 f_6 f_5$ удовлетворяет условиям леммы 2. Далее полагаем $f_8 = f_6 f_5$, по лемме 2 в множестве $[\{f_7 f_6 f_5\}]_A$ выбираем функцию f_9 и образуем функцию $f_{10} = f_9 f_8$. Ясно, что функция ν_4^2 двойственна функции f_{10} относительно четной подстановки (032)(1).

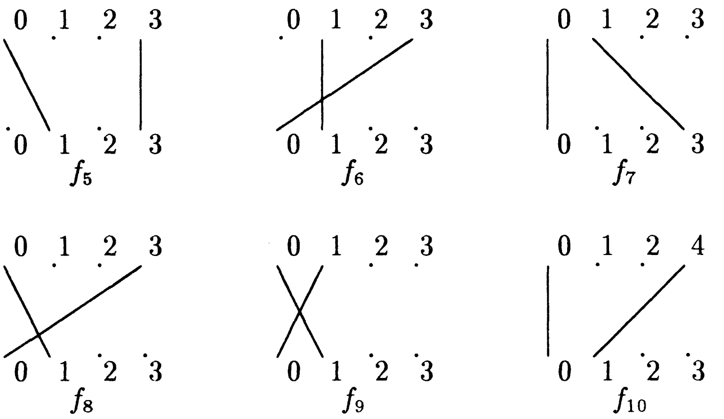

Рис. 8

Предположим, что функция f не является тождественной на $\mathrm{Arg} \setminus \{b\}$, но на этом множестве разлагается в произведение одно- и двухэлементных циклов. Положим $f_{11} = \pi_5^{-1} f \pi_5$, где π_5 — четная подстановка (acb). Тогда $\mathrm{Arg} f_{11} = (\mathrm{Arg} f \setminus \{b\}) \cup \{c\}$, $f_{11}(c) = a$ и функция f_{11} совпадает с функцией f на множестве $\mathrm{Arg} f \setminus \{b\}$. Если положить $f_{12} = f_{11} f$, то $\mathrm{Arg} f_{12} = \mathrm{Arg} f$, $f_{12}(b) = a$ и f_{12} тождественна на множестве $\mathrm{Arg} f_{12} \setminus \{b\}$. Таким образом, приходим к рассмотренному выше случаю, когда $m = 0$ и $f(b) = c$.

Предположим, что цикловое разложение функции f на множестве $\mathrm{Arg} f \setminus \{b\}$ содержит цикл длины $\geqslant 3$. Пусть d, e — элементы этого цикла, π_6 — четная подстановка $(bc)(de)$. Тогда функция $f_{13} = \pi_6^{-1} f \pi_6 f$ обладает следующими свойствами: $\mathrm{Arg} f_{13} = \mathrm{Val} f_{13} = \mathrm{Arg} f$, $f_{13}(b) = b$ и f_{13} нетождественна на $\mathrm{Arg} f_{13}$. Следовательно, функция f_{13} удовлетворяет условиям лемм 2 или 3. Согласно этим леммам в множестве $[\{f_{13}\}]_A$ имеется такая функция f_{14}, что $\mathrm{Arg} f_{14} = \mathrm{Val} f_{14} = \mathrm{Arg} f$, $f_{14}(b) = b$ и цикловое разложение функции $f f_{14}$ на множестве $\mathrm{Arg} f$ содержит только циклы длины 1 и 2. Далее обращаемся к рассмотренным выше случаям.

Пусть $m = 1$. Обозначим через f_{15} и f_{16} функции, двойственные к f относительно четных подстановок $(ac)(ba_1)$ и (ba_1c) (см. рис. 9, на котором изображены лишь точки a, b, c, a_1). Тогда функция $f_{16}^{-1}f_{15}^{-1}$ удовлетворяет рассмотренному случаю $m = 0$.

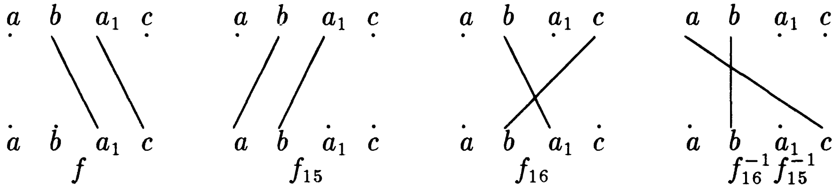

Рис. 9

Пусть $m \geqslant 2$. Если функция f_{17} двойственна к f относительно четной подстановки (ba_1a_2), то функция $f_{17}f^{-1}$ (рис. 10) приводит к случаю $m = 1$.

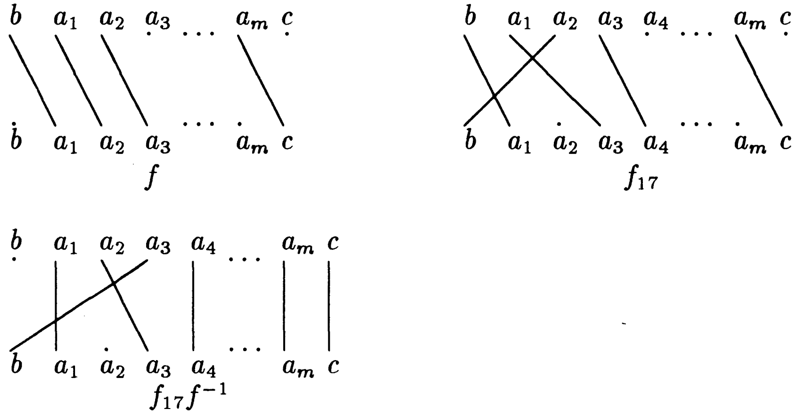

Рис. 10

Предположим, что выполняется условие (b) леммы. Будем также считать, что условие (a) не выполняется, т. е. $\mathrm{Arg}f \cup \mathrm{Val}f = E_k$. Поэтому в множестве $\mathrm{Arg}f \setminus \mathrm{Val}f$ можно выбрать два различных элемента a и b.

Обозначим через $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n, c, d$ такие элементы, что $f(a) = a_1$, $f(a_1) = a_2, \dots, f(a_m) = c$, $f(b) = b_1$, $f(b_1) = b_2, \dots, f(b_n) = d$ и $\{c, d\} \subseteq \mathrm{Val}f \setminus \mathrm{Arg}f$ (случаи $m = 0$ и $n = 0$ не исключаются). Если $m \geqslant 2$, то, взяв функцию f_{18}, являющуюся двойственной к f относительно четной подстановки (aa_1a_2), видим, что функция $f_{18}f^{-1}$ удовлетворяет условию (a) леммы (см. рис. 10).

Аналогичным образом поступаем при $n \geqslant 2$. Следовательно, можно считать, что $m, n \leqslant 1$. Рассмотрим эти случаи.

Пусть $m = n = 0$. По условию множество $\mathrm{Arg} f \cap \mathrm{Val} f$ непусто. Значит, найдутся такие элементы $e_1, \ldots, e_p$ из $\mathrm{Arg} f \cap \mathrm{Val} f$, $(p \geqslant 1)$, что либо $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3, \ldots, f(e_p) = e_1$, либо для подходящих элементов $l \in \mathrm{Arg} f \setminus \mathrm{Val} f$ и $i \in \mathrm{Val} f \setminus \mathrm{Arg} f$ имеем $f(l) = e_1$, $f(e_1) = e_2, \ldots, f(e_p) = i$.

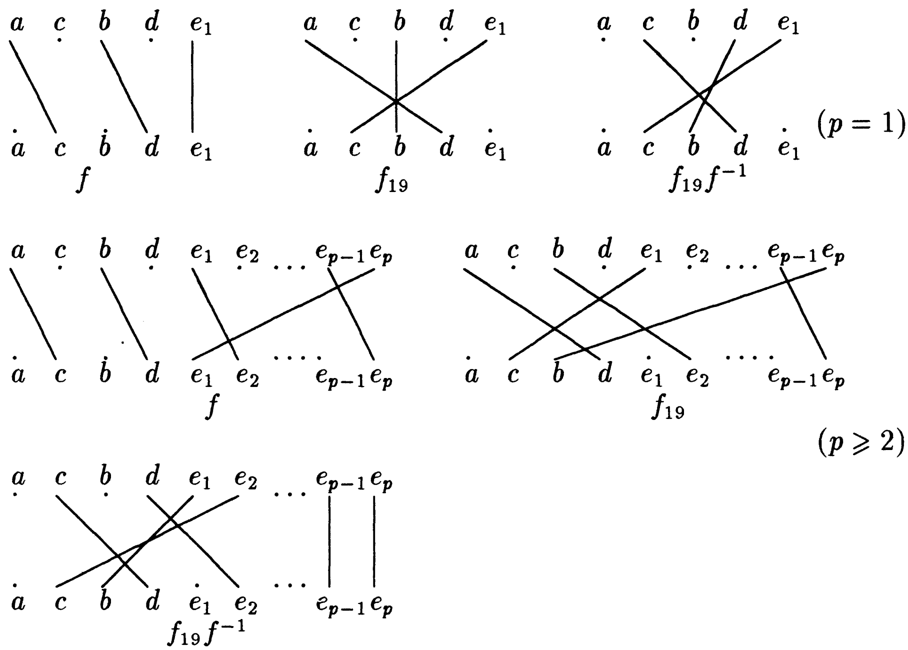

Рис. 11

Если имеет место первая возможность и функция f_{19} двойственна к f относительно четной подстановки (abe_1), то условию (а) леммы будет удовлетворять функция $f_{19}f^{-1}$ (рис. 11).

Изучим вторую возможность. Если $p \geqslant 2$, то, как и в случае функции f_{18}, рассматриваем функцию f_{20}, являющуюся двойственной к f относительно четной подстановки (le_1e_2). Ясно, что функция $f_{20}f^{-1}$ удовлетворяет условию (а) леммы.

При $p = 1$ придем к аналогичному результату, если возьмем функцию f_{21}, двойственную к f относительно четной подстановки $(ab)(le_1)$, и рассмотрим функцию $f_{21}f^{-1}$ (рис. 12).

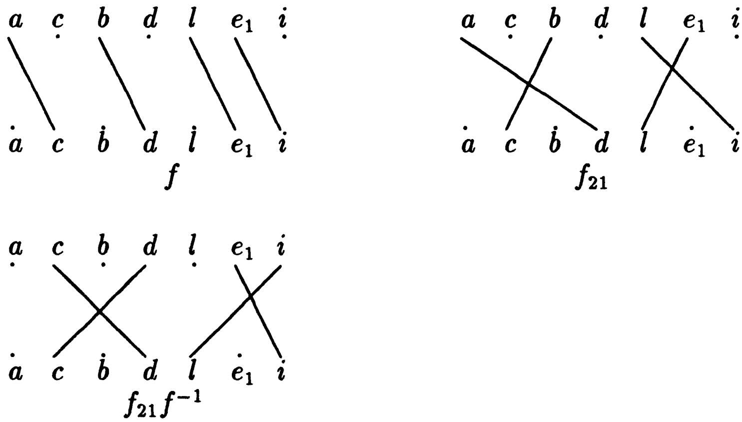

Рис. 12

В случаях $m = 1$, $n = 0$ и $m = n = 1$ возьмем функцию f_{22}, двойственную к f относительно четной подстановки (aa_1b). Тогда функция $f_{22}f^{-1}$ (рис. 13) удовлетворяет условию (а) леммы.

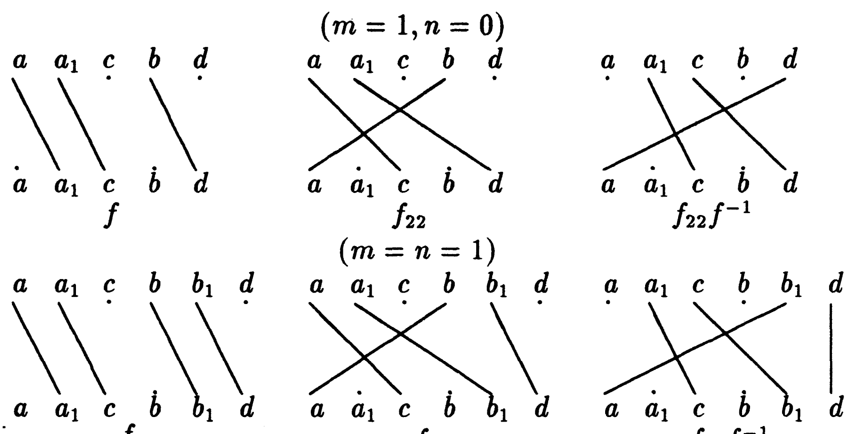

Рис. 13

Предположим, что выполняется условие (с) леммы. Пусть f есть ограничение на $\mathrm{Arg} f$ нечетной подстановки π из $\mathrm{S}(E_k)$. Так как $\mathrm{Arg} f \neq \mathrm{Val} f$, то $|\mathrm{Arg} f| = k - 1$. Пусть $a \in \mathrm{Arg} f \setminus \mathrm{Val} f$, $b \in \mathrm{Val} f \setminus \mathrm{Arg} f$ и $a_1, \dots, a_m$ — такие элементы из $\mathrm{Arg} f \cap \mathrm{Val} f$, что $f(a) = a_1$, $f(a_1) = a_2, \dots, f(a_m) = b$.

Сначала рассмотрим случай, когда $m = 0$, т. е. $f(a) = b$. Если $k \geqslant 4$ и функция f тождественна на $\mathrm{Arg} f \cap \mathrm{Val} f$, то функция ν_k^{k-1} двойственна функции f относительно любой четной подстановки, переводящей 0 в a

и 1 в b. Если $k = 3$, то функция ν_3^2 двойственна одной из функций f, f^{-1} относительно одной из четных подстановок x, $x+1$, $x+2$. Таким образом, далее можно предполагать, что $k \geqslant 4$ и функция f нетождественна на множестве $\mathrm{Arg} f \cap \mathrm{Val} f$.

Допустим, что в цикловом разложении подстановки π на множестве $\mathrm{Arg} f \cap \mathrm{Val} f$ содержится цикл длины не менее трех. Пусть, например, это будет цикл $(c_1 \ldots c_n)$. Если $n \geqslant 4$, то рассмотрим функцию f_{23}, двойственную к f относительно четной подстановки $(ab)(c_1c_2)$. Функция $f_{24} = f_{23}f$ переводит a в a и является нетождественной четной подстановкой на множестве $\mathrm{Arg} f \cap \mathrm{Val} f$. Согласно лемме 3 в множестве $[\{f_{24}\}]_A$ имеется такая функция f_{25}, что $\mathrm{Arg} f_{25} = \mathrm{Val} f_{25} = \mathrm{Arg} f$ и ограничение f_{25} на множество $\mathrm{Arg} f \cap \mathrm{Val} f$ является четной подстановкой, обратной к такой четной подстановке, которая образована ограничением функции f на $\mathrm{Arg} f \cap \mathrm{Val} f$. Следовательно, функция ff_{25} переводит a в b и является тождественной на множестве $\mathrm{Arg} f \cap \mathrm{Val} f$. Этот случай уже рассмотрен выше.

Если $n = 3$, но имеется еще один неодноэлементный цикл $(d_1 \ldots d_p)$, то функцию f_{23} определяем двойственной к функции f относительно четной подстановки $(ab)(d_1d_2)$. Далее продолжаем как и в случае $n \geqslant 4$.

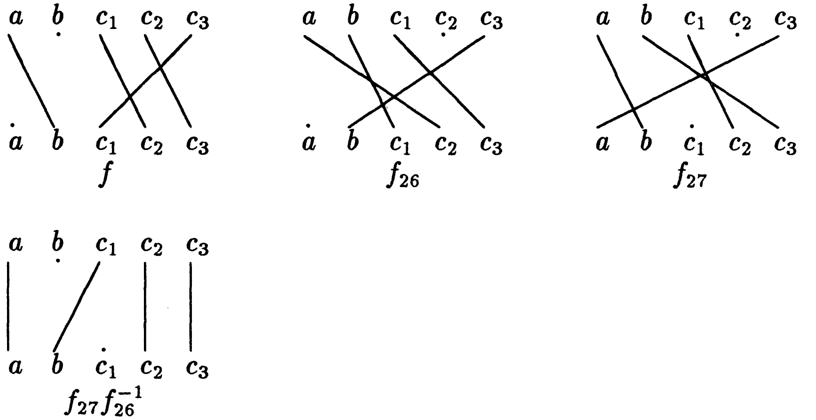

Рис. 14

Предположим, что в цикловом разложении подстановки π на множестве $\mathrm{Arg} f \cap \mathrm{Val} f$ присутствует только один неодноэлементный цикл $(c_1c_2c_3)$.

Пусть функции f_{26}, f_{27} двойственны функции f относительно четных подстановок (bc_3c_2), $(ac_1)(bc_2)$ (рис. 14). Тогда функция $f_{27}f_{26}^{-1}f$ двойственна функции ν_k^{k-1} относительно любой четной подстановки, переводящей 0 в c_1 и 1 в b.

Предположим, что цикловое разложение подстановки π содержит лишь циклы длины 1 и 2. Так как подстановка π нечетна, а элементы a и b входят в один цикл, то число двухэлементных циклов на множестве

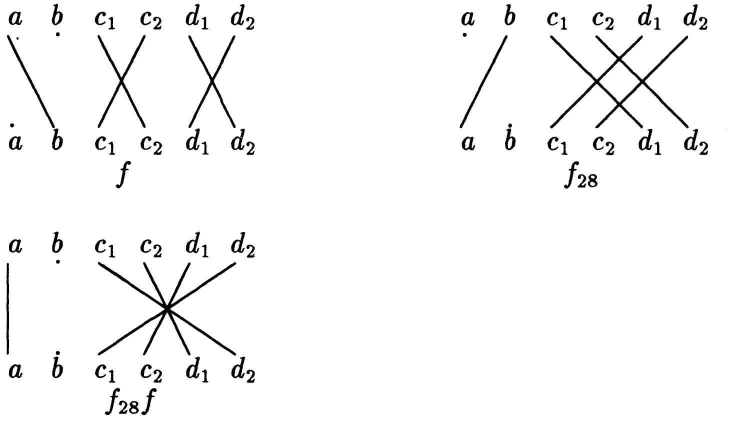

Рис. 15

$\mathrm{Arg} f \cap \mathrm{Val} f$ четно. Пусть (c_1c_2), (d_1d_2) — два таких цикла. Обозначим через f_{28} функцию, двойственную к f относительно четной подстановки $(ab)(c_2d_1)$ (рис. 15). Тогда функция $f_{28}f$ удовлетворяет условию леммы 3 (вне множества $\{a, b, c_1, c_2, d_1, d_2\}$ функция $f_{28}f$ тождественна). Далее рассуждаем так же, как при рассмотрении функции f_{24}.

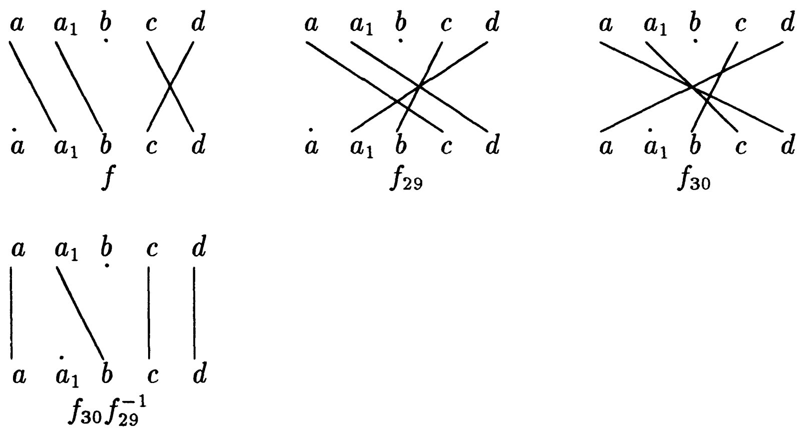

Рис. 16

Допустим, что $m = 1$. Так как подстановка π нечетна, то в цикловом разложении π на множестве $E_k \setminus \{a, a_1, b\}$ имеется цикл четной длины. Сначала рассмотрим случай, когда цикл имеет длину 2 и состоит, например, из элементов c и d. Обозначим через f_{29} и f_{30} функции,

двойственные к функции f относительно четных подстановок (a_1dc) и (aca_1) (рис. 16). Тогда функцию $f_{30}f_{29}^{-1}$ можно взять в качестве функции f при $m=0$.

Предположим далее, что длина цикла не меньше четырех и c_1, c_2, c_3 — три непосредственно следующих друг за другом элемента этого цикла. Обозначим через f_{31} функцию, двойственную к f относительно четной подстановки $(c_1c_2c_3)$. Тогда функция $f_{31}^{-1}f$ удовлетворяет условиям леммы 3. Мы придем к рассмотренному выше циклу длины 2, если в множестве $[\{f_{31}^{-1}f\}]_A$ выберем такую функцию f_{32}, что $\mathrm{Arg} f_{32} = \mathrm{Val} f_{32} = \mathrm{Arg} f$, $f_{32}(a) = a$, $f_{32}(a_1) = a_1$ и на множестве $E_k \setminus \{a, a_1, b\}$ функция ff_{32} представляет собой транспозицию двух элементов.

Пусть, наконец, $m \geqslant 2$. Если $k \geqslant m+4$, то возьмем элементы c, d из множества $E_k \setminus \{a, a_1, \dots, a_m, b\}$ и определим функцию f_{33}, которая является двойственной к функции f относительно четной подстановки $(a_1a_2)(cd)$. Тогда функция $f_{33}^{-1}f$ будет удовлетворять условиям леммы 3. Следовательно, в множестве $[\{f_{33}^{-1}f\}]_A$ имеется такая функцию f_{34}, что $\mathrm{Arg} f_{34} = \mathrm{Val} f_{34} = \mathrm{Arg} f$ и функция ff_{34} удовлетворяет условиям из случая 3 при $m \leqslant 1$.

Заметим, что в силу нечетности подстановки π при нечетном m обязано выполняться неравенство $|E_k \setminus \{a, a_1, \dots, a_m, b\}| \geqslant 2$. Поэтому пусть m четно. Если $m \geqslant 4$, то возьмем функцию f_{35}, двойственную к f относительно четной подстановки $(a_1a_1)(a_3a_4)$. Тогда функция $f_{35}^{-1}f$ удовлетворяет условиям леммы 4. Далее проводим рассуждения как в предыдущем случае.

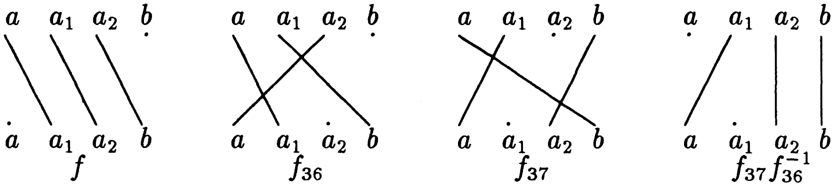

Рис. 17

Пусть $m=2$ и $k \in \{4,5\}$. Обозначим через f_{36} и f_{37} функции, двойственные к функции f относительно четных подстановок (aa_1a_2) и $(aa_1)(a_2b)$ (рис. 17). Тогда функция $f_{37}f_{36}^{-1}$ удовлетворяет условиям из случая 3 при $m=0$. Лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Пусть k четно, $f \in \Delta_k$, $|\mathrm{Arg} f| = k/2$ и $\mathrm{Arg} f \cap \mathrm{Val} f = \varnothing$. Если $k/2$ нечетно, то множество $[\{f\}]_A$ состоит из всех функций g_1 и g_2 таких, что $|\mathrm{Arg} g_1| = k/2$, $\mathrm{Arg} g_1 = \mathrm{Val} g_1$ или $\mathrm{Arg} g_1 \cap \mathrm{Val} g_1 = \varnothing$, $|\mathrm{Arg} g_2| < k/2$. Если $k/2$ четно, то функция f двойственна одной из функций ζ_k, ξ_k*

относительно подходящей четной подстановки; функции ζ_k, ξ_k не являются A-эквивалентными. Множество $[\{\zeta_k\}]_A$ состоит из всех функций g_1 и g_2 таких, что $|\mathrm{Arg} g_1| = k/2$ и либо g_1 двойственна к ζ_k относительно четной подстановки, либо g_1 является четной подстановкой на множестве $\mathrm{Arg} g_1$, $\mathrm{Arg} g_1 = \mathrm{Val} g_1$, а $|\mathrm{Arg} g_2| < k/2$. Аналогичное утверждение справедливо для множества $[\{\xi_k\}]_A$.

Доказательство. При любом четном k пусть π — такая подстановка из $\mathbf{A}_k$, что $\pi(\{0, 2, \dots, k-2\}) = \mathrm{Arg} f$, и $f_1(4) = 5, \dots, f_1(k-2) = k-1$, где $f_1 = \pi^{-1} f \pi$. Тогда функция f_1 совпадает с одной из функций ζ_k, ξ_k.

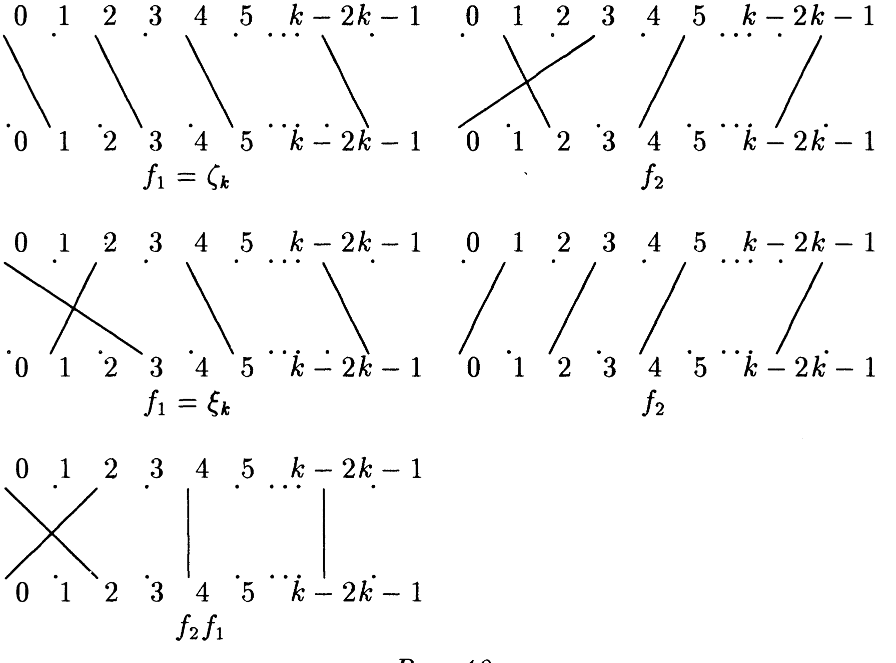

Рис. 18

В случае нечетности числа $k/2$ возьмем функцию f_2, двойственную к f_1 относительно четной подстановки $(0123)(45)\dots(k-2, k-1)$ (рис. 18). Так как функция $f_2 f_1$ удовлетворяет условиям леммы 2, то множеству $[\{f\}]_A$ приналежат все функции g_1 такие, что $|\mathrm{Arg} g_1| = k/2$ и $\mathrm{Arg} g_1 = \mathrm{Val} g_1$.

Кроме того, в силу леммы 6 в $[\{f\}]_A$ содержатся также все функции вида g_2. Оставшиеся функции типа g_1 получаем в виде $\varphi^{-1} f g_3 \varphi$, где $g_3 \in [\{f\}]_A$, $\mathrm{Arg} g_3 = \mathrm{Val} g_3 = \mathrm{Arg} f$ и $\varphi \in \mathbf{A}_k$.

Пусть $k/2$ четно, $k \geqslant 8$. Обозначим через f_3 функцию, двойственную к f_1 относительно четной подстановки $(012345)(67)\dots(k-2, k-1)$ (рис. 19). Тогда функция $f_3 f_1$ удовлетворяет условиям леммы 3.

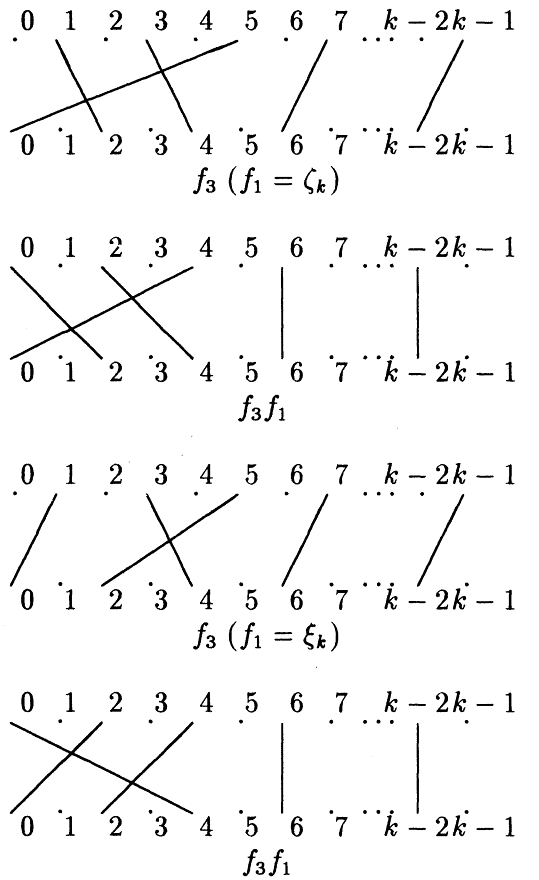

Рис. 19

Следовательно, в каждом из множеств $[\{\zeta_k\}]_A$, $[\{\xi_k\}]_A$ содержатся все функции g_1 такие, что $|\mathrm{Arg}g_1| = k/2$, $\mathrm{Arg}g_1 = \mathrm{Val}g_1$, и g_1 является четной подстановкой на множестве $\mathrm{Arg}g_1$. Кроме того, из леммы 7 следует, что в каждом множестве $[\{\zeta_k\}]_A$, $[\{\xi_k\}]_A$ содержатся все функции вида g_2.

Так как на двухэлементном множестве четная подстановка тождественна, то принадлежность множеству $[\{\zeta_4\}]_A$ всех функций вида g_1 с условием $\mathrm{Arg}g_1 = \mathrm{Val}g_1$ вытекает из леммы 1; в этом случае следует рассмотреть функцию $\zeta_4^{-1}\zeta_4$. Аналогичное утверждение справедливо для множества $[\{\xi_4\}]_A$.

Для завершения доказательства леммы остается показать, что в случае четности числа $k/2$ функции ζ_k и ξ_k не являются A-эквивалентными. С этой целью изучим строение функций h, которые двойственны к ζ_k, ζ_k^{-1} относительно четных подстановок и удовлетворяют условиям $\mathrm{Arg}h = \mathrm{Arg}\zeta_k$ или $\mathrm{Arg}h = \mathrm{Val}\zeta_k$.

Пусть сначала $h = \varphi^{-1}\zeta_k\varphi$, где $\varphi \in \mathbf{A}_k$ и $\mathrm{Arg}\varphi = \mathrm{Arg}\zeta_k$. Нетрудно видеть, что в этом случае в цикловом разложении подстановки φ всякий цикл состоит только либо из четных чисел, либо из нечетных. Пусть подстановка φ_0 есть произведение всех «четных» циклов подстановки φ и всех одноэлементных циклов $(1),(3),\dots,(k-1)$. Аналогичным образом определим подстановку φ_1, используя «нечетные» циклы подстановки φ и одноэлементные циклы $(0),(2),\dots,(k-2)$. Тогда $\varphi = \varphi_0\varphi_1$. Так как подстановка φ четна, то подстановки φ_0 и φ_1 имеют одинаковую четность. Пользуясь тем, что $\mathrm{Arg}\zeta_k = \{0,2,\dots,k-2\}$ и $\mathrm{Val}\zeta_k = \{1,3,\dots,k-1\}$, получаем $\varphi^{-1}\zeta_k\varphi = \varphi_1^{-1}\zeta_k\varphi_0$. Далее, действие подстановки φ_1^{-1} на множестве $\mathrm{Val}\zeta_k$ можно заменить эквивалентным действием подходящей подстановки φ_2 на множестве $\mathrm{Arg}\zeta_k$. Более точно, если в цикловом представлении подстановки φ_1^{-1} каждое нечетное число $2i+1$ заменить на четное число $2i$, а каждое четное число $2j$ — на нечетное число $2j+1$, то для полученной после такой замены подстановки φ_2 будем иметь $\varphi_1^{-1}\zeta_k = \zeta_k\varphi_2$. Таким образом, $\varphi_1^{-1}\zeta_k\varphi_0 = \zeta_k\varphi_2\varphi_0$. Поскольку подстановка φ_2 имеет такую же четность, что и подстановка φ_1^{-1}, приходим к выводу, что в рассматриваемом случае $\mathrm{Arg}h = \mathrm{Arg}\zeta_k$ и функция h представима в виде $h = \zeta_k\psi$, где ψ — четная подстановка на множестве $\mathrm{Arg}\zeta_k$.

Теперь предположим, что $h = \varphi^{-1}\zeta_k^{-1}\varphi$ и $\mathrm{Arg}h = \mathrm{Arg}\zeta_k$. Тогда в цикловом разложении подстановки φ каждый цикл состоит из равного количества четных и нечетных чисел, причем четные и нечетные числа в цикле чередуются. Обозначим через ω подстановку $(01)(23)\dots(k-2,k-1)$. В силу четности числа $k/2$ четной будет и подстановка ω. Имеем $\zeta_k^{-1} = \omega^{-1}\zeta_k\omega$. Следовательно, $h = \varphi^{-1}\omega^{-1}\zeta_k\omega\varphi$. Ясно, что в цикловом разложении подстановки $\omega\varphi$ каждый цикл состоит только либо из четных, либо из нечетных чисел. Кроме того, подстановка $\omega\varphi$ четна как произведение двух четных подстановок. Таким образом, приходим к разобранному выше случаю. Значит, функцию h можно представить в виде $h = \zeta_k\psi$, где ψ — четная подстановка на множестве $\mathrm{Arg}\zeta_k$.

Аналогично рассматриваются случаи, когда $\mathrm{Arg}h = \mathrm{Val}\zeta_k$ и $h = \varphi^{-1}\zeta_k\varphi$, либо $h = \varphi^{-1}\zeta_k^{-1}\varphi$, где $\varphi \in \mathbf{A}_k$. Однако здесь для функции h удобнее выбрать представление вида $h = \psi\zeta_k^{-1}$, где ψ — четная подстановка на множестве $\mathrm{Arg}\zeta_k$.

Допустим, что $\xi_k \in [\{\zeta_k\}]_A$. Тогда $\xi_k = h_s\dots h_1$, где функция h_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, двойственна одной из функций ζ_k, ζ_k^{-1} относительно подходящей четной подстановки. Поскольку $\mathrm{Arg}h_1 = \mathrm{Arg}\zeta_k$ и $\mathrm{Val}h_s = \mathrm{Val}\xi_k$, число s обязано быть нечетным и, кроме того, должны выполняться равенства $\mathrm{Arg}h_2 = \mathrm{Val}\xi_k$, $\mathrm{Arg}h_3 = \mathrm{Arg}\xi_k, \dots$, $\mathrm{Arg}h_s = \mathrm{Arg}\xi_k$. Если $s \geqslant 3$, то по доказанному функции h_1 и h_2 можно представить в виде $h_1 = \zeta_k\psi_1$, $h_2 = \psi_2\zeta_k^{-1}$, где ψ_1, ψ_2 — четные подстановки на множестве $\mathrm{Arg}\zeta_k$. Отсюда следует, что $\xi_k = h_s\dots h_3\psi_2\psi_1$. Продолжая этот процесс,

придем к равенству $\xi_k = \zeta_k\psi$, где ψ — четная подстановка на $\mathrm{Arg}\zeta_k$. Однако функция ξ_k получается из функции ζ_k транспозицией элементов 0 и 2. Противоречие показывает, что $\xi_k \notin [\{\zeta_k\}]_A$.

Аналогичным образом устанавливается, что $\zeta_k \notin [\{\xi_k\}]_A$. Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Пусть $f \in \Delta_4$, $|\mathrm{Arg}f| = 3$ и функция f является ограничением на $\mathrm{Arg}f$ нетождественной подстановки из четверной группы Клейна. Тогда множество $[\{f\}]_A$ состоит из всех функций g_1, g_2 и g_3 таких, что $|\mathrm{Arg}g_1| = 3$, g_1 представляет собой ограничение на $\mathrm{Arg}g_1$ подстановки из четверной группы Клейна, $|\mathrm{Arg}g_3| \leqslant 1$, $|\mathrm{Arg}g_2| = 2$, причем $\mathrm{Arg}g_2 = \mathrm{Val}g_2$ либо $\mathrm{Arg}g_2 \cap \mathrm{Val}g_2 = \varnothing$.*

Доказательство. Функции вида g_1 получаются из функции f путем перехода к двойственной функции относительно подходящей четной подстановки. В частности, $\kappa_4^1 \in [\{f\}]_A$. Согласно лемме 1 множеству $[\{f\}]_A$ принадлежат также функции α_4^1 и h_1, где $\mathrm{Arg}h_1 = \{0, 2\}$ и h_1 тождественна на $\mathrm{Arg}h_1$. Поэтому в $[\{f\}]_A$ содержатся функции $\mu_4^2 = \kappa_4^1\alpha_4^1$ и $\zeta_4 = \kappa_4^1 h_1$. Взяв в $[\{\mu_4^2\}]_A$ такую функцию h_2, что $\mathrm{Arg}h_2 = \{0, 2\}$ и $h_2(x) = x + 2 \pmod 4$, получаем функцию ξ_4: $\xi_4 = \zeta_4 h_2$. Принадлежность всех функций вида g_2 и g_3 множеству $[\{f\}]_A$ теперь следует из лемм 2 и 12. Отсутствие в $[\{f\}]_A$ функций, отличных от перечисленных в формулировке леммы, можно проверить, например, непосредственно. Лемма 13 доказана.

§ 3. Основные результаты

Из лемм 1–5 и 9–13 вытекает следующая

Теорема 1. *Каждая непустая функция из Δ_k является A-эквивалентной одной из функций $\alpha_k^i, \mu_k^i, \nu_k^i, \eta_k^i, \theta_k, \kappa_k, \zeta_k, \xi_k, \kappa_4^1$. Эти функции не являются A-эквивалентными (в том числе при различных значениях i).*

Непосредственный подсчет показывает, что в Δ_k имеется $4k - 3 + r_k$ попарно не A-эквивалентных функций, где $r_4 = 4$; $r_k = 3$, если k кратно 4 и $k \geqslant 8$; $r_k = 2$, если k четно, $k/2$ нечетно и $k \geqslant 6$; $r_k = 0$ при остальных значениях k.

Теорема 2. *Каждое множество непустых функций из Δ_k A-эквивалентно одному из наборов следующего списка основных функций (список* А*):*

- $\{\alpha_k^i\}, 0 \leqslant i \leqslant k-1$; $\{\mu_k^i\}, 2 \leqslant i \leqslant k$; $\{\nu_k^i\}, 1 \leqslant i \leqslant k-1$; $\{\eta_k^i\}, 3 \leqslant i \leqslant k$; $\{\theta_k\}$; $\{\kappa_k\}, k \geqslant 4$; $\{\zeta_k\}, k$ *четно*; $\{\xi_k\}, k$ *кратно* 4; $\{\kappa_4^1\}$;
- $\{\alpha_k^i, \alpha_k^{k-1}\}, 0 \leqslant i \leqslant k-2$; $\{\alpha_k^i, \mu_k^j\}$, $2 \leqslant j < k$, $j \leqslant i \leqslant k-1$ *или* $j = k, 0 \leqslant i \leqslant k-2$; $\{\alpha_k^i, \nu_k^j\}$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, $j \leqslant i \leqslant k-1$; $\{\alpha_k^i, \eta_k^j\}$, $3 \leqslant j < k$, $j \leqslant i \leqslant k-1$ *или* $j = k, 0 \leqslant i \leqslant k-2$; $\{\alpha_k^{k-1}, \theta_k\}$; $\{\alpha_k^i, \kappa_4\}$, $k = 4, 0 \leqslant i \leqslant 2$ *или* $4 \leqslant i \leqslant k-1$; $\{\alpha_k^i, \zeta_k\}, k$ *четно*, $k/2 \leqslant i \leqslant k-1$; $\{\alpha_k^i, \xi_k\}, k$ *кратно* 4, $k/2 \leqslant i \leqslant k-1$; $\{\alpha_4^3, \kappa_4^1\}$;

- $\{\mu_k^{k-1},\eta_k^k\}$; $\{\mu_4^3,\kappa_4\}$; $\{\mu_k^{k/2},\zeta_k\}, k$ *кратно* 4;
- $\{\nu_4^2,\kappa_4\}$; $\{\nu_4^2,\kappa_4^1\}$; $\{\eta_4^3,\kappa_4\}$;
- $\{\alpha_k^i,\alpha_k^{k-1},\mu_k^j\}$, $2\leqslant j\leqslant k-2$, $j\leqslant i\leqslant k-2$; $\{\alpha_k^i,\alpha_k^{k-1},\nu_k^j\}$, $1\leqslant j\leqslant k-2$, $j\leqslant i\leqslant k-2$; $\{\alpha_k^i,\alpha_k^{k-1},\eta_k^j\}$, $3\leqslant j\leqslant k-2$, $j\leqslant i\leqslant k-2$; $\{\alpha_k^i,\alpha_k^{k-1},\kappa_k\}$, $4\leqslant i\leqslant k-2$; $\{\alpha_k^i,\alpha_k^{k-1},\zeta_k\}, k$ *четно*, $k/2\leqslant i\leqslant k-2$; $\{\alpha_k^i,\alpha_k^{k-1},\xi_k\}, k$ *кратно* 4, $k/2\leqslant i\leqslant k-2$;
- $\{\alpha_k^i,\mu_k^{k/2},\zeta_k\}, k$ *кратно* 4, $k/2\leqslant i\leqslant k-1$; $\{\alpha_4^2,\nu_4^2,\kappa_4\}$; $\{\alpha_4^3,\nu_4^2,\kappa_4^1\}$.

Любые два различных набора из списка (A) *не* A-*эквивалентны.*

Доказательство. Согласно теореме 1 каждая непустая функция из Δ_k A-эквивалентна одной из основных функций $\alpha_k^i-\kappa_4^1$. Поэтому для доказательства теоремы 2 необходимо, во-первых, установить, что любой набор основных функций A-эквивалентен одному из наборов списка (A). Взяв всевозможные пары различных основных функций и исключая из них пары, попавшие в список (A), проверяем, что справедливы все равенства из следующего списка (список B):

$$[\{\alpha_k^i,\mu_k^j\}]_A=[\{\mu_k^j\}]_A,\ \text{если } i<j<k \text{ или } i=k-1 \text{ и } j=k;$$
$$[\{\alpha_k^i,\nu_k^j\}]_A=[\{\nu_k^j\}]_A,\ \text{если } i<j;$$
$$[\{\alpha_k^i,\eta_k^j\}]_A=[\{\eta_k^j\}]_A,\ \text{если } i<j<k \text{ или } i=k-1, j=k;$$
$$[\{\alpha_k^i,\theta_k\}]_A=[\{\theta_k\}]_A,\ \text{если } i\leqslant k-2;$$
$$[\{\alpha_k^i,\kappa_k\}]_A=[\{\kappa_k\}]_A,\ \text{если } i\leqslant 3 \text{ и } k>4 \text{ или } i=3 \text{ и } k=4;$$
$$[\{\alpha_k^i,\zeta_k\}]_A=[\{\zeta_k\}]_A,\ \text{если } k \text{ четно и } i<k/2;$$
$$[\{\alpha_k^i,\xi_k\}]_A=[\{\xi_k\}]_A,\ \text{если } k \text{ кратно 4 и } i<k/2.$$
$$[\{\alpha_4^i,\kappa_4^1\}]_A=[\{\kappa_4^1\}]_A,\ \text{если } i\leqslant 2;$$
$$[\{\mu_k^i,\mu_k^j\}]_A=[\{\alpha_k^{i-1},\mu_k^j\}]_A,\ \text{если } i<j;$$
$$[\{\mu_k^i,\nu_k^j\}]_A=[\{\nu_k^j\}]_A,\ \text{если } i\leqslant j;$$
$$[\{\mu_k^i,\nu_k^j\}]_A=[\{\alpha_k^{j-1},\mu_k^i\}]_A,\ \text{если } i>j;$$
$$[\{\mu_k^i,\eta_k^j\}]_A=[\{\alpha_k^{i-1},\eta_k^j\}]_A,\ \text{если } i<j \text{ и либо } j<k, \text{ либо } j-i>1;$$
$$[\{\mu_k^i,\eta_k^j\}]_A=[\{\mu_k^i\}]_A,\ \text{если } i=j;$$
$$[\{\mu_k^i,\eta_k^j\}]_A=[\{\alpha_k^{j-1},\mu_k^i\}]_A,\ \text{если } i>j;$$
$$[\{\mu_k^i,\theta_k\}]_A=[\{\theta_k\}]_A,\text{если } i\leqslant k-2;$$
$$[\{\mu_k^i,\theta\}]_A=[\{\nu_k^{k-1}\}]_A,\ \text{если } i=k-1;$$
$$[\{\mu_k^i,\theta\}]_A=[\{\alpha_k^{k-2},\mu_k^k\}]_A,\ \text{если } i=k;$$
$$[\{\mu_k^i,\kappa_k\}]_A=[\{\alpha_k^1,\kappa_k\}]_A,\ \text{если } i=2;$$

$$[\{\mu_k^i, \kappa_k\}]_A = [\{\kappa_k\}]_A, \text{ если } i = 3, k > 4;$$
$$[\{\mu_k^i, \kappa_k\}]_A = [\{\mu_k^4\}]_A, \text{ если } i = 4;$$
$$[\{\mu_k^i, \kappa_k\}]_A = [\{\alpha_k^3, \mu_k^i\}]_A, \text{ если } i > 4;$$
$$[\{\mu_k^i, \zeta_k\}]_A = [\{\zeta_k\}]_A, \text{ если } k \text{ четно и либо } i < k/2,$$
$$\text{либо } k \text{ не кратно 4 и } i = k/2;$$
$$[\{\mu_k^i, \zeta_k\}]_A = [\{\alpha_k^{k/2-1}, \mu_k^i\}]_A, \text{ если } k \text{ четно и } i > k/2;$$
$$[\{\mu_k^i, \xi_k\}]_A = [\{\xi_k\}]_A, \text{ если } k \text{ кратно 4 и } i < k/2;$$
$$[\{\mu_k^i, \xi_k\}]_A = [\{\mu_k^{k/2}, \zeta_k\}]_A, \text{ если } k \text{ кратно 4 и } i = k/2;$$
$$[\{\mu_k^i, \xi_k\}]_A = [\{\alpha_k^{k/2-1}, \mu_k^i\}]_A, \text{ если } k \text{ кратно 4 и } i > k/2;$$
$$[\{\mu_4^i, \kappa_4^1\}]_A = [\{\kappa_4^1\}]_A, \text{ если } i = 2;$$
$$[\{\mu_4^i, \kappa_4^1\}]_A = [\{\nu_4^3\}]_A, \text{ если } i = 3;$$
$$[\{\mu_4^i, \kappa_4^1\}]_A = [\{\alpha_4^2, \mu_4^4\}]_A, \text{ если } i = 4.$$
$$[\{\nu_k^i, \nu_k^j\}]_A = [\{\nu_k^j\}]_A, \text{ если } i < j;$$
$$[\{\nu_k^i, \eta_k^j\}]_A = [\{\alpha_k^{i-1}, \eta_k^j\}]_A, \text{ если } i < j \text{ и либо } j < k, \text{ либо } j - i > 1;$$
$$[\{\nu_k^i, \eta_k^j\}]_A = [\{\mu_k^{k-1}, \eta_k^k\}]_A, \text{ если } i = k - 1, j = k;$$
$$[\{\nu_k^i, \eta_k^j\}]_A = [\{\nu_k^i\}]_A, \text{ если } i \geqslant j;$$
$$[\{\nu_k^i, \theta_k\}]_A = [\{\theta_k\}]_A, \text{ если } i \leqslant k - 2;$$
$$[\{\nu_k^i, \theta_k\}]_A = [\{\nu_k^{k-1}\}]_A, \text{ если } i = k - 1;$$
$$[\{\nu_k^i, \kappa_k\}]_A = [\{\kappa_k\}]_A, \text{ если } i \leqslant 3, k > 4;$$
$$[\{\nu_k^i, \kappa_k\}]_A = [\{\mu_4^3, \kappa_4\}]_A, \text{ если } i = 3, k = 4;$$
$$[\{\nu_k^i, \kappa_k\}]_A = [\{\nu_k^i\}]_A, \text{ если } i \geqslant 4;$$
$$[\{\nu_k^i, \zeta_k\}]_A = [\{\zeta_k\}]_A, \text{ если } k \text{ четно и } i < k/2;$$
$$[\{\nu_k^i, \zeta_k\}]_A = [\{\nu_k^i\}]_A, \text{ если } k \text{ четно и } i \geqslant k/2;$$
$$[\{\nu_k^i, \xi_k\}]_A = [\{\xi_k\}]_A, \text{ если } k \text{ кратно 4 и } i < k/2;$$
$$[\{\nu_k^i, \xi_k\}]_A = [\{\nu_k^i\}]_A, \text{ если } k \text{ кратно 4 и } i \geqslant k/2;$$
$$[\{\nu_4^i, \kappa_4^1\}]_A = [\{\kappa_4^1\}]_A, \text{ если } i = 1;$$
$$[\{\nu_4^i, \kappa_4^1\}]_A = [\{\nu_4^3\}]_A, \text{ если } i = 3.$$
$$[\{\eta_k^i, \eta_k^j\}]_A = [\{\alpha_k^{i-1}, \eta_k^j\}]_A, \text{ если } i < j;$$
$$[\{\eta_k^i, \theta_k\}]_A = [\{\theta_k\}]_A, \text{ если } i < k;$$
$$[\{\eta_k^i, \theta_k\}]_A = [\{\alpha_k^{k-1}, \eta_k^k\}]_A, \text{ если } i = k;$$
$$[\{\eta_k^i, \kappa_k\}]_A = [\{\kappa_k\}]_A, \text{ если } i = 3, k > 4;$$

$$[\{\eta_k^i, \kappa_k\}]_A = [\{\alpha_k^3, \eta_k^i\}]_A, \text{ если } i \geqslant 4;$$
$$[\{\eta_k^i, \zeta_k\}]_A = [\{\zeta_k\}]_A, \text{ если } k \text{ четно и } i \leqslant k/2;$$
$$[\{\eta_k^i, \zeta_k\}]_A = [\{\alpha_k^{k/2-1}, \eta_k^i\}]_A, \text{ если } k \text{ четно и } i > k/2;$$
$$[\{\eta_k^i, \xi_k\}]_A = [\{\xi_k\}]_A, \text{ если } k \text{ кратно 4 и } i \leqslant k/2;$$
$$[\{\eta_k^i, \xi_k\}]_A = [\{\alpha_k^{k/2-1}, \eta_k^i\}]_A, \text{ если } k \text{ кратно 4 и } i > k/2;$$
$$[\{\eta_4^i, \kappa_4^1\}]_A = [\{\theta_4\}]_A, \text{ если } i = 3;$$
$$[\{\eta_4^i, \kappa_4^1\}]_A = [\{\alpha_4^2, \eta_4^4\}]_A, \text{ если } i = 4.$$
$$[\{\theta_k, \kappa_k\}]_A = [\{\eta_4^3, \kappa_4\}]_A, \text{ если } k = 4;$$
$$[\{\theta_k, \kappa_k\}]_A = [\{\theta_k\}]_A, \text{ если } k \geqslant 5;$$
$$[\{\theta_k, \zeta_k\}]_A = [\{\theta_k\}]_A, \text{ если } k \text{ четно};$$
$$[\{\theta_k, \xi_k\}]_A = [\{\theta_k\}]_A, \text{ если } k \text{ кратно 4 };$$
$$[\{\theta_4, \kappa_4^1\}]_A = [\{\theta_4\}]_A.$$
$$[\{\kappa_k, \zeta_k\}]_A = [\{\alpha_4^1, \kappa_4\}]_A, \text{ если } k = 4;$$
$$[\{\kappa_k, \zeta_k\}]_A = [\{\kappa_6\}]_A, \text{ если } k = 6;$$
$$[\{\kappa_k, \zeta_k\}]_A = [\{\zeta_k\}]_A, \text{ если } k \text{ четно и } k \geqslant 8;$$
$$[\{\kappa_k, \xi_k\}]_A = [\{\alpha_4^1, \kappa_4\}]_A, \text{ если } k = 4;$$
$$[\{\kappa_k, \xi_k\}]_A = [\{\xi_k\}]_A, \text{ если } k \text{ кратно 4 и } k \geqslant 8;$$
$$[\{\kappa_4, \kappa_4^1\}]_A = [\{\alpha_4^2, \kappa_4\}]_A.$$
$$[\{\zeta_k, \xi_k\}]_A = [\{\mu_k^{k/2}, \zeta_k\}]_A, \text{ если } k \text{ кратно 4};$$
$$[\{\zeta_4, \kappa_4^1\}]_A = [\{\kappa_4^1\}]_A.$$
$$[\{\xi_4, \kappa_4^1\}]_A = [\{\kappa_4^1\}]_A.$$

Чтобы установить эти равенства, следует воспользоваться леммами 1–13 и рядом легко проверяемых утверждений. Так, если $f \in \Delta_k$ и $|\mathrm{Arg} f| = i$, то $\alpha_k^{i-1} \in [\{f\}]_A$. Поэтому, например, при $i < j$ справедливо включение $\{\alpha_k^{i-1}, \mu_k^j\} \subset [\{\mu_k^i, \mu_k^j\}]_A$. Вместе с тем $\mu_k^i = \mu_k^j \alpha_k^{i-1}$. Следовательно, $[\{\mu_k^i, \mu_k^j\}]_A = [\{\alpha_k^{i-1}, \mu_k^j\}]_A$.

Справедливость равенства $[\{\mu_k^{k-1}, \theta_k\}]_A = [\{\nu_k^{k-1}\}]_A$ вытекает из следующих соображений. Функции μ_k^{k-1} и θ_k принадлежат множеству $[\{\nu_k^{k-1}\}]_A$ в силу леммы 5. Вместе с тем если функция f совпадает с функцией μ_3^2 при $k = 3$ и двойственна функции μ_k^{k-1} относительно четной подстановки $(01)(2, k-1)$ при $k \geqslant 4$, то функция $\theta_k f$ удовлетворяет условию (с) леммы 11. Следовательно, $\nu_k^{k-1} \in [\{\mu_k^{k-1}, \theta_k\}]_A$.

При доказательстве равенства $[\{\nu_k^{k-1}, \eta_k^k\}]_A = [\{\mu_k^{k-1}, \eta_k^k\}]_A$ включение $\mu_k^{k-1} \in [\{\nu_k^{k-1}\}]_A$ следует из леммы 5, а включение $\nu_k^{k-1} \in$

$[\{\mu_k^{k-1}, \eta_k^k\}]_A$ — из леммы 11, поскольку условию (с) этой леммы удовлетворяет функция $\eta_k^k f$, где $f = \mu_k^{k-1}$ при $k = 3$ и f двойственна к μ_k^{k-1} относительно четной подстановки $(01)(2, k-1)$ при $k \geqslant 4$.

Чтобы доказать равенство $[\{\nu_4^3, \kappa_4\}]_A = [\{\mu_4^3, \kappa_4\}]_A$, замечаем, что функция $\kappa_4 \mu_4^3$ удовлетворяет условию (с) леммы 11. Значит, $\nu_4^3 \in [\{\mu_4^3, \kappa_4\}]_A$. Включение $\{\mu_4^3, \kappa_4\} \subset [\{\nu_4^3, \kappa_4\}]_A$ очевидно.

Аналогичным образом устанавливаются остальные равенства из списка (B). Из этих равенств вытекает, что каждое множество непустых функций из Δ_k A-эквивалентно такому множеству основных функций, в котором содержится не более двух различных основных функций (2)–(9). Все эти не более чем двухэлементные наборы основных функций (2)–(9) приведены в списке (A). Рассматривая также функции α_k^i и пользуясь леммой 1 и соотношением $\alpha_k^{i-1} \in [\{f\}]_A$, где $|\mathrm{Arg} f| = i$, приходим к полному списку (A). То, что различные наборы из списка (A) не являются A-эквивалентными, следует из лемм 1, 5–10, 12 и 13. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 следует, что число A-замкнутых классов функций из Δ_k равно числу наборов в списке (A). Непосредственный подсчет показывает, что последнее число равно

$$3k^2 - 4k + 2 + \begin{cases} 5, & \text{если } k = 3, \\ 27, & \text{если } k = 4, \\ k, & \text{если } k \text{ нечетно и } k \geqslant 5, \\ 2k, & \text{если } k \text{ четно, } k \text{ не делится на 4 и } k \geqslant 6, \\ 7/2k + 1, & \text{если } k \text{ кратно 4 и } k \geqslant 8. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.** Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1–10; № 5. С. 1–9.

2. **Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1972.

3. **Марченков С. С.** О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1979. Вып. 36. С. 5–22.

4. **Марченков С. С.** Об однородных алгебрах // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 4. С. 787–790.

5. **Марченков С. С.** Однородные алгебры // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1982. Вып. 39. С. 85–106.

6. **Марченков С. С.** О классификации алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, № 3. С. 533–536.
7. **Марченков С. С.** Классификация алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1989. Вып. 2. С. 100–122.
8. **Марченков С. С.** Основные отношения S-классификации функций многозначной логики // Дискрет. математика. 1996. Т. 8, вып. 1. С. 95–128.
9. **Марченков С. С.** S-Классификация идемпотентных алгебр с конечным носителем // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 5. С. 587–589.
10. **Марченков С. С.** G-Предполные классы многозначной логики // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 3. С. 47–70.
11. **Нгуен Ван Хоа.** О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики P_3 // Дискрет. математика. 1992. Т. 4, вып. 4. С. 82–95.
12. **Нгуен Ван Хоа.** О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискрет. математика. 1993. Т. 5, вып. 4. С. 87–108.
13. **Нгуен Ван Хоа.** Описание замкнутых классов, сохраняемых всеми внутренними автоморфизмами k-значной логики // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 3. С. 16–19.
14. **Нгуен Ван Хоа.** О структуре замкнутых классов k-значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 6. С. 17–20.
15. **Нгуен Ван Хоа.** О замкнутых классах k-значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп // Дискрет. математика. 1996. Т. 8, вып. 1. С. 129–156.
16. **Csákány B., Gavalcová T.** Finite homogeneous algebras. I // Acta Sci. Math. 1980. T. 42, N 1–2. P. 57–65.

Адрес автора:

Институт прикладной
математики
им. М. В. Келдыша РАН,
Миусская площадь, 4,
125047 Москва, Россия.
E-mail:
marchen@applmat.msk.su

Статья поступила
24 февраля 1997 г.